This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

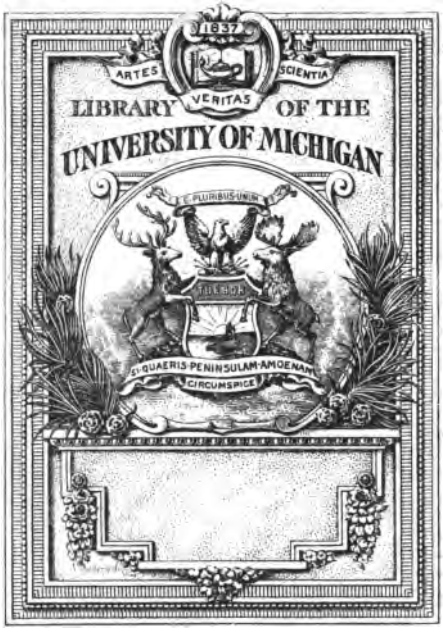
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

MATHEMATICS
QA
39
.B197
1885

Die

39053

Elemente der Mathematik.

Von

Dr. Richard Baltzer

Professor an der Universität Gießen, Mitglied der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Zweiter Band.

Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie.

Mit 339 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Sechste verbesserte Auflage.

Leipzig
Verlag von S. Hirzel.
1883.

Das Recht der Übersetzung ist vorbehalten.

Vorrede.

Die in der zweiten Auflage dieſer Elemente 1867 in Erinnerung gebrachten neuern Unterſuchungen der Raumbegriffe haben zu der Anerkenntnis geführt, daß die unendlich fernen Punkte einer Geraden ebenſowohl geſondert (real oder nicht real) ſein können, als ſie gemäß der Euclidiſchen Annahme vereint ſind, und daß die Gerade für eine geſchloſſene Linie gehalten werden kann oder muß, wenn auf ihr geſonderte unendlich ferne Punkte nicht vorhanden ſind. Es iſt daher nicht zuläſſig, die in der Parallelentheorie vorhandene Unbeſtimmtheit durch Einfügung eines beſondern Axioms zu verdecken; man hat vielmehr anzuerkennen, daß von jener Stelle ab die Geometrie verſchiedene Wege einſchlagen kann. Die Klärung dieſes Umſtandes und die Vereinfachung des Euclidiſchen Weges iſt eine weſentliche Verbeſſerung, welche die vierte Auflage dieſer Elemente 1874 durch einige Umſtellungen im zweiten Paragraphen der Planimetrie ſowie durch Präciſierung einiger Ausdrücke erhalten hat.

Die beigefügten hiſtoriſchen Notizen ſollen nicht nur erwünſchte Quellenanzeigen geben, ſie bilden auch die Elemente einer Geſchichte der Sätze, Theorien, Benennungen und Bezeichnungen. Die Geſchichte der Sätze iſt es, ohne welche die Geſchichte der mathematiſchen Meiſter nicht genügend gegeben werden kann. Auf dem Grunde beider Vorarbeiten kann die Geſchichte der Mathematik, ihre Entwickelung in verſchiedenen Epochen, ihr Anteil an den verſchiedenen Kulturepochen zu würdiger Darſtellung gelangen.

In der sechsten Auflage sind eine Anzahl Verbesserungen des Ausdrucks und kleinere Zusätze gemacht worden. Für korrekte Herstellung des Textes der neuen Auflage hat wiederum Herr Oberlehrer Dr. J. E. Böttcher in Leipzig, und in seiner Vertretung Herr Dr. P. Weinmeister treueste Sorge getragen, wofür ich beiden Herren zugleich im Namen der Verlagshandlung meinen besten Dank ausspreche.

Inhalt.

Viertes Buch.

Planimetrie.

§. 1. Grundbegriffe. Punkt, Linie, Fläche, Raum; Winkel, Kreis, Polygon. §. 2. Die Winkel der geradlinigen Figuren. Nebenwinkel, Scheitelwinkel. Parallelen. Die Winkel eines Dreiecks. Die Winkel eines Polygons. Legendre's Sätze. §. 3. Von den Seiten eines Dreiecks. Seiten und gegenüberliegende Winkel. Abstände. Zwei Kreise, Kreis und Gerade, Tangenten. §. 4. Von den Figuren, welche einem Kreise ein- oder umgeschrieben sind. Eingeschriebene Winkel und Polygone (1—5). Gleiche Bogen (6). Gerade durch einen gemeinschaftlichen Punkt von zwei Kreisen (7). Umgeschriebene Winkel und Polygone (8—10).

§. 5. Von den gleichen und ähnlichen Dreiecken. Allgemeine Bedingungen (1—4). Besondere Abhängigkeiten (5—6). §. 6. Die besonderen Vierecke. Parallelogramm (1—3). Rhomboid, Trapez, Halbierungen, das gleichschenkelige Dreieck (4—6). Bestimmung des Kreises durch 3 Punkte oder Tangenten, Höhenpunkt des Dreiecks (7—9). Sehnen und Tangenten des Kreises (10—13). §. 7. Von den gleichen und ähnlichen Figuren. Bedingungen, die sich selbst entsprechenden Elemente (1—4). Reguläre, centrische, symmetrische Figuren (5—7). §. 8. Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen. Teilung von Strecken. Apollonischer Kreis.

§. 9. Gleichheit der Flächen von Parallelogrammen und Dreiecken. Parallelogramme und Dreiecke von gleichen Basen und Höhen (1—3). Das dem Kreise umgeschriebene Polygon (4). Sätze von Pythagoras, Pappus, Varignon u. a. (5—9). Fläche eines Polygons (10—11). §. 10. Flächenmessung. Verhältnis von Dreiecksflächen (1—3). Quadraturen (4—6). Anwendungen (7—8).

§. 11. Ähnlichkeit der Dreiecke. Allgemeine Bedingungen (1—2). Anwendungen, goldner Schnitt (3—6). §. 12. Die ähnlichen Figuren. Bedingungen, ähnliche Kreisfiguren, Sicheln (1—3). Die sich selbst entsprechenden Elemente (4—6). Zwei Kreise, Eulers Gerade und Feuerbachs Kreis (7—8). §. 13. Cyklometrie. Fläche und Perimeter des Kreises, Annäherungsmethoden (1—6). Bogen und Winkel (7—8). Krümmung (9—10).

§. 14. Produkte und Quadrate von Strecken. Positive und negative Strecken, Quadratabstände eines Punktes von andern Punkten (1—2). Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis (3—7). Büschel von Kreisen (8—12). Perspektivisch-kreisverwandte Figuren, Sätze von Ptolemäus u. a. (13—16). Quadratabstände an Figuren (17—22). Fläche des einem Kreise eingeschriebenen Dreiecks und Vierecks (23—30). §. 15. Perimeter und Fläche von Figuren. Größte Fläche bei gegebenem Perimeter, kleinster Perimeter bei gegebener Fläche: das gleichschenkelige, rechtwinkelige Dreieck, der Kreis, der Halbkreis, die Kreissegmente, die regulären Polygone.

Fünftes Buch.

Stereometrie.

§. 1. Durchschnitt von Ebenen und Geraden. Zwei Ebenen mit einem gemeinschaftlichen Punkt, die Ebene und die Gerade, parallele Gerade und Ebenen (1—5). Drei Ebenen, Gerade, die nicht auf einer Ebene liegen, geradlinige Flächen zweiten Grades (6—8). Metrische und graphische Relationen, Dualität (9). §. 2. Winkel und Abstände von Ebenen und Geraden. Normale Gerade und Ebenen, Flächenwinkel (1—5). Normalprojektionen, Abstände (6—9). Winkel von Ebenen und Geraden (10).

§. 3. Kegel, Cylinder und Kugel. Ebene Schnitte des Kegels und Cylinders (1—3). Die Kugel und ihre Schnitte durch eine Ebene, durch einen Büschel von Geraden, durch eine Kugel (4—8). Bestimmung der Kugel und des Rotationskegels durch gegebene Punkte, Tangentenebenen u. s. f. (9—12). §. 4. Sphärik. Hauptkreis, der sphärische Winkel, das sphärische Polygon und Gegenpolygon, Excess und Fläche des Dreiecks (1—5). Pol und Polare, Polarfigur (6—9). Die sphärischen Dreiecke (10—11). Kreis und Polarkreis, das eingeschriebene und umgeschriebene Dreieck und Viereck, Sätze von Lexell u. a. (12—14). Besondere Punkte am Dreieck (15). Das Parallelogramm (16). Perimeter und Fläche (17). Gleiche und ähnliche Figuren (18—19). §. 5. Ecke, Prisma und die perspektivischen Figuren. Parallele Schnitte, Kugelschnitt der Ecke (1—3). Normalschnitt des Prisma, kongruente Schnitte, Kreisschnitte eines Cylinders (4—5). Die Projektionen (6). Perspektivische Figuren mit Kollineationsaxen oder Kollineationsebenen (7—11). Perspektivische Kreis- und Kugelfiguren, Isogonalität und Homocyklicität (12—16). Büschel von Kugeln, Kreise eines Kegels und einer Kugel (17—19). Stereographische Projektion (20—21).

§. 6. Tetraeder und Parallelepiped. Mittelschnitte und Schwerpunkt des Tetraeders, Diagonalen, Diagonal-Dreiecke und eingeschriebene Tetraeder des Parallelepipeds (1—7). Monge's Satz und die Höhen des Tetraeders (8—10). Gleiche und ähnliche Raumfiguren, ihre sich selbst entsprechenden Elemente (11—16). Ähnliche Raumfiguren (17). §. 7. Die Polyeder. Einfacher, mehrfacher Zusammenhang. Anzahlen ihrer Ecken, Flächen, Kanten (1—4). Platonische, Archimedische, Kepplersche und Poinsot'sche Polyeder (5—6). Summen der Polygonwinkel, der Ecken, der Flächenwinkel (8—9).

§. 8. Kubatur der Prismen und Pyramiden. Verhältnis der Volume von Prismen (1—6). Schichtweise Vergleichung von zwei Körpern (7—8). Verhältnis von Pyramiden (9—11). Sätze von Monge, Möbius, Steiner (12—15). Volum eines Polyeders (16—17). §. 9 Kubatur der Kugel und anderer Körper. Volum der Kugel, eines Sektors und Segments derselben (1—4). Segment einer geradlinigen Fläche zwischen parallelen Ebenen (5—8). Abhängigkeit des Volums von den Querschnitten eines Körpers (9—10). §. 10. Oberfläche des Cylinders, des Kegels und der Kugel. Zonen von Cylindern und Kugeln, Rotationsgebilde. Zusammenhang zwischen der Komplanation und Kubatur der Kugel.

§. 11. Von den Schwerpunkten der Figuren. Schwerpunkt eines Systems von Punkten (1—5). Besondere Systeme (6). Sätze von Lagrange, Apollonius u. a. (7—8). Schwerpunkte von Linien, Flächen, Räumen (9—12). Guldinsche Regel (13—16). Komplanation und Kubatur prismatischer Hufe (17—19). Kubatur eines Polyeders (20).

Sechstes Buch.

Trigonometrie.

§. 1. Von dem Sinus. Bestimmung einer Figur, Konstruktion und Berechnung, goniometrische Funktion, Sinus eines spitzen Winkels (1—5). Das rechtwinkelige Dreieck, Fläche eines Dreiecks, Sinus-Satz (6—9). §. 2. Von dem Cosinus. Das rechtwinkelige Dreieck, Cosinussatz und die durch ihn lösbaren Aufgaben. §. 3. Von der Tangente und Cotangente. Das rechtwinkelige Dreieck. Das gemeine Dreieck, Tangente eines halben Winkels, Gaußscher Doppelsatz. Pothenot'sche Aufgabe. Trigonometrische Linien am Kreise, Grenzwerte.

§. 4. Goniometrie. Winkel von zwei Geraden, Funktionen desselben (1—4). Fundamentalgleichungen für das Dreieck, goniometrische Relationen (5—9). Cosinus-Satz, Eulers Gleichungen (10—11). Fläche des Dreiecks, Sätze von Strehlke und L'Huilier (12). Sätze von Feuerbach, der Feuerbachsche Kreis (13—15). §. 5. Sphärische Trigonometrie. Das rechtwinkelige Dreieck (1—4). Das gemeine Dreieck, die Gaußschen Gleichungen (5—10). Die Höhen und die Radien der um- und eingeschriebenen Kreise (11—12). Funktionen der Winkelsumme (13—15). Sphärische Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis (16). Mittellinie des Dreiecks (17). Zusammenhang der sphärischen und der planen Trigonometrie, Legendre's Satz (18—19). §. 6. Polygonometrie und Polyedrometrie. Fundamentalgleichung, Zusammenhang der Polyedrometrie mit der Polygonometrie (1—4). Quadrat einer Seite oder Fläche. Sätze von Carnot und Gauß (5—7). Goniometrische Relationen (8—10). Das plane Polygon, Sätze von L'Huilier und Staudt (11—13). Volum des Tetraeders, Mittelschnitte, Abstände der gegenüberliegenden Kanten, Radius der umgeschriebenen Kugel (14—18). Produkt von zwei Polyedern (19).

§. 7. Die projektivischen Formeln. Teilungsverhältnis einer Strecke und eines Winkels, 3 Punkte einer Geraden, 4 Punkte einer Ebene, 5 Punkte des Raumes, 4 Punkte einer Kugel (1—3). Projektivische Formeln, Sätze von Ceva, Menelaus, Carnot (4—7). Doppelverhältnis von 4 Punkten, Geraden, Ebenen (8—10). Vierecke von 4 Geraden, Relationen bei 4 Punkten einer Geraden, 6 Punkten einer Ebene, 8 Punkten des Raumes (11—13). Gleichungen von Doppelverhältnissen, insbesondere bei Linien und geradlinigen Flächen zweiten Grades (14—16). Sätze von Pascal und Brianchon (17—18). Involution von 3 Paaren, Satz von Desargues (19—20). Pole und Polaren bei Linien zweiten Grades (21—23).

Viertes Buch.

Planimetrie.

§. 1. Grundbegriffe.

1. Der Raum ist ohne Unterbrechung und über jede Grenze hinaus ausgedehnt. Ein Ort im Raume, ohne Ausdehnung gedacht, heißt ein Punkt. Ein Ausgedehntes ist entweder eine Linie, oder eine Fläche, oder ein Raum im engern Sinne (Körper, στερεόν, solidum).

Auf einer Linie lassen sich unendlich viele Punkte unterscheiden, auf einer Fläche unendlich viele Linien, in einem Raume unendlich viele Flächen. Eine Linie ist zu beiden Seiten eines auf ihr liegenden Punktes ausgedehnt (in die Länge), eine Fläche ist zu beiden Seiten einer auf ihr liegenden Linie ausgedehnt (in die Länge und Breite), ein Raum ist zu beiden Seiten einer in ihm liegenden Fläche ausgedehnt (in die Länge, Breite und Dicke); Linie, Fläche, Raum heißen deshalb nach 1, 2, 3 Dimensionen ausgedehnt. Eine Linie kann als Bahn (Ort, τόπος) eines bewegten Punktes, eine Fläche als Bahn einer bewegten Linie, ein Raum als Bahn einer bewegten Fläche betrachtet werden.

2. Linien werden begrenzt durch Punkte (Endpunkte), Flächen durch Linien (Umfang, περίμετρος, περιφέρεια), Räume durch Flächen (Oberfläche, ἐπιφάνεια, superficies), und haben zwischen ihren Grenzen bestimmte Größe. Die Größe einer Linie heißt ihre Länge, die Größe einer Fläche ihre Fläche (Flächeninhalt, area, ἐμβαδόν, ἐπιφάνεια), die Größe eines Raumes sein Volum (Körperinhalt, volumen, capacitas, στερεόν); diese Größen werden extensive genannt im Gegensatz zu nicht ausgedehnten (intensiven) Größen.

3. Die einfachste unter den Linien ist die Gerade, welche eine von einem Punkte ausgehende Richtung (und die entgegengesetzte) angiebt und nach dieser Richtung unbegrenzt sich weiter erstreckt. Zwei Gerade sind kongruent, d. h. sie können so vereint werden, daß alle Punkte der einen mit Punkten der andern zusammenfallen, oder wie man kürzer sagt, daß sie sich decken (kongruieren, coincidieren). Wenn zwei Gerade 2 Punkte gemein haben, so decken sie sich (Axiom von der Geraden); eine Gerade ist also durch 2 Punkte bestimmt. Durch einen Punkt können unendlich viel Gerade in verschiedenen Richtungen gezogen

werden; je zwei derselben **schneiden** sich in dem gemeinschaftlichen Punkte d. h. jede erstreckt sich auf einer diese Linien enthaltenden Fläche von dem gemeinschaftlichen Punkte nach beiden Seiten der andern.

Eine Linie heißt **krumm** (curva), wenn irgend 3 Punkte derselben, die einander beliebig nahe sind, im allgemeinen nicht auf einer Geraden liegen. Ein begrenztes Stück von einer Geraden heißt eine **Strecke**, von einer Kurve ein **Bogen** (arcus); die Strecke zwischen den Endpunkten eines Bogens wird die **Sehne** (chorda) des Bogens genannt.

Sind A, B, C Punkte einer Linie, A und C durch B getrennt, und wird der zwischen A und B enthaltene Bogen (Strecke) durch AB bezeichnet, so erscheinen AB und BC als Teile von AC, und man hat

$$AC = AB + BC$$
$$AB = AC - BC,\ BC = AC - AB$$
$$AB < AC,\ BC < AC$$

Der Begriff der Geraden entspricht der Anschauung eines gespannten Fadens, einer Kryſtallkante, des Durchschnittes von 2 Ebenen (ruhender Oberflächen schwerer Liquide), und ist vermöge seiner Einfachheit nicht weiter definierbar, Richtung ohne die Gerade unverständlich. Die alte Definition (Eucl. I.) „Eine Gerade ist diejenige Linie, welche zwischen ihren Punkten gleichmäßig (ἐξ ἴσου) liegt" ist an sich dunkel, und gewinnt erst Klarheit durch das Axiom „zwei Gerade schließen keinen Raum ein", nach welchem behauptet wird, daß zwei Gerade sich decken, wenn sie zwei Punkte gemein haben, und daß eine Gerade ihre Lage nicht ändern kann, wenn sie in zwei Punkten festgehalten ist. Auch der alte Satz: „Eine Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten" ist als Definition vorangestellt worden.

4. Eine Fläche heißt **geradlinig** (Regelfläche, surface réglée), wenn durch jeden Punkt derselben eine Gerade sich ziehn läßt, die auf der Fläche liegt.*) Die Bahn einer irgendwie bewegten Geraden ist eine geradlinige Fläche. Die einfachste unter den geradlinigen Flächen ist die **Ebene** (ἐπί-πεδον, planum), auf der die Geraden liegen, die durch einen gegebenen Punkt gehn und mit einer gegebenen Geraden einen Punkt gemein haben. **Wenn eine Gerade mit einer Ebene 2 Punkte gemein hat, so liegt sie auf der Ebene** (Axiom von der Ebene).

Zwei Ebenen sind kongruent. **Wenn zwei Ebenen 3 Punkte gemein haben, die nicht auf einer Geraden liegen, so decken sie sich**; eine Ebene ist durch 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmt. Sind nämlich A, B, C solche gemeinschaftliche Punkte der Ebenen α, β, so liegen die Geraden AB, AC, BC auf beiden Ebenen. Diese Geraden teilen jede der Ebenen in 7 Felder, von denen eines einen geschlossenen Umfang hat. Ist nun D ein Punkt von α in dem geschlossenen Felde, so ist AD eine Gerade von α, und diese

*) Diese Benennung rührt von **Monge** her: Applications de l'Analyse à la Géom. 1795 §. V.

Gerade schneidet die Gerade BC in D', weil B und C auf verschiedenen Seiten von AD liegen. Der Punkt D' liegt aber auf β, also liegt auch die Gerade AD' mit dem Punkt D auf β. Ist ferner E ein Punkt von α in einem andern Felde, so daß z. B. E und A auf verschiedenen Seiten der Geraden BC liegen, so schneiden sich die Geraden AE und BC der Ebene α in E'. Der Punkt E' liegt aber auf β, also liegt auch die Gerade AE' mit dem Punkt E auf β.

Eucl. I. erklärt die Ebene als die Fläche, welche zwischen den auf ihr gezogenen Geraden gleichmäßig liegt, um (XI, 1) zu schließen, daß eine Gerade auf der Ebene liegt, wenn sie 2 Punkte mit ihr gemein hat. Etwas deutlicher hat Leibniz die Ebene und die Gerade dadurch erklärt, daß jene den unbegrenzten Raum, diese eine unbegrenzte Ebene in zwei kongruente Teile zerschneidet (Brief an Giordano, ed. Gerhardt I p. 196). Definitionen der Ebene, welche das Axiom „Wenn eine Gerade mit einer Ebene 2 Punkte gemein hat, so liegt sie auf der Ebene", verhüllt oder unverhüllt enthalten, sind unzulässig.

Bemerkenswerte Versuche, jenes Axiom zum Theorem zu erheben, sind in neuester Zeit gemacht worden. Deahna (Demonstr. theorematis, esse superficiem planam. Dissert. inaug. Marburg 1837) konstruiert die Ebene durch Rotation eines Winkels um einen seiner Schenkel, mit der Bedingung, daß eine concentrische Kugelfläche in zwei kongruente Teile zerschnitten werde. Gauß ist der Meinung gewesen, daß Deahnas Darstellung von einigen Mängeln, die in ihr anzutreffen sind, sich befreien lasse; in seinem Nachlaß befindet sich ein diesen Gegenstand betreffender Aufsatz. Auf ähnliche Art haben Crelle (Journ. 45 p. 15), Gerling (Crelle J. 20 p. 332), Erb (die Probleme der Geraden u. s. w. Heidelberg 1846) das Axiom von der Ebene zu beseitigen gesucht. Unter den geometrischen Objekten sind zunächst nicht die Gerade und die Ebene, sondern die Kugel und der Kreis so definierbar, daß deren Möglichkeit einem Zweifel nicht unterliegt; man braucht nur starre Verbindungen von Punkten vorauszusetzen. Durch zwei kongruente Scharen von concentrischen Kugeln entsteht die Ebene als das Gemeinschaftliche von je zwei gleichen Kugeln. Die Gerade entsteht durch zwei kongruente Scharen von concentrischen Kreisen einer Ebene als das Gemeinschaftliche von je zwei gleichen Kreisen. (Lobatschewsky und Bolyai in den unter §. 2 angeführten Schriften.)

Eine Fläche heißt **krumm**, und eine Linie heißt **uneben** (doppelt gekrümmt), wenn irgend 4 Punkte derselben, die einander beliebig nahe sind, im allgemeinen nicht auf einer Ebene liegen.

Sind AB, BC, CA Linien auf einer Fläche, wird die zwischen diesen Linien enthaltene Fläche durch ABC bezeichnet, sind endlich die Linien derselben Fläche AD, BD, CD von deren Umfang ABC eingeschlossen, so hat man

$$ABC = ABD + BCD + CAD, \text{ u. s. w. (3).}$$

5. Eine Ebene wird von 2 auf ihr sich schneidenden Geraden in 4 Felder geteilt, welche **Winkel** ($\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$, angulus) heißen. Die Stücke der Geraden, welche von dem gemeinschaftlichen Punkte sich erstrecken und einen Winkel einschließen, heißen die **Schenkel** des Winkels; der gemeinschaftliche Punkt der Schenkel heißt der **Scheitel** des Winkels (vertex, sommet, Centrum).

Ein Winkel wird durch einen Punkt des einen Schenkels, den Scheitel und einen Punkt des andern Schenkels (in dieser Ordnung) unzwei-

deutig bezeichnet, nachdem der Sinn gegeben ist, in welchem der erste Schenkel um den Scheitel gedreht werden soll, um den Winkel zurückzulegen. Z. B. die Formel ASB oder $A\hat{S}B$ für den von dem Schenkel SB mit dem Schenkel SA gebildeten Winkel bedeutet den Winkel, welchen der erste Schenkel SA zurücklegt, indem er um den Scheitel S in bestimmtem Sinne (entweder linksum oder rechtsum für einen auf einer bestimmten Seite der Ebene stehenden Zuschauer) gedreht wird, bis er mit dem zweiten Schenkel SB zusammenfällt. Bei entgegengesetztem Sinne der Drehung würde die Formel ASB den Winkel bedeuten, der von der Ebene nach Wegnahme des vorigen Winkels übrig bleibt.

Überhaupt ist der von zwei Geraden a und b gebildete Winkel, den man durch ab oder $a\hat{}b$ bezeichnet, unzweideutig bestimmt, wenn von jeder Geraden angegeben wird, welche Richtung der auf ihr liegende Schenkel hat, und wenn zugleich der Sinn der Drehung angegeben wird, durch welche der erste Schenkel mit dem zweiten vereint werden soll.

Bei der Bezeichnung von allen gleichzeitig in Betracht kommenden Winkeln einer Ebene setzt man voraus, daß die Winkel durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben sind. Hiernach haben die Formeln ASB und BSA, ab und ba verschiedene Bedeutung.*)

Ein Winkel kann als die Summe von andern Winkeln betrachtet werden. Wenn nämlich der Schenkel SB von dem Winkel ASC eingeschlossen ist, so hat man (unter der Voraussetzung desselben Sinnes der Drehung bei allen Winkeln)

$$ASC = ASB + BSC$$
$$ASB = ASC - BSC,\quad BSC = ASC - ASB$$
$$ASB < ASC,\quad BSC < ASC$$

insofern der Schenkel SA bei der Zurücklegung des Winkels ASC die Winkel ASB, BSC nach einander zurücklegt. Um zwei gegebene Winkel zu vergleichen, vereint man den Scheitel des einen mit dem Scheitel des andern, einen Schenkel des einen mit einem Schenkel des andern, die Ebene des einen mit der Ebene des andern, so daß beide Winkel auf eine Seite des gemeinschaftlichen Schenkels fallen; je nachdem nun der eine Winkel den andern deckt oder nicht deckt, so sind die Winkel gleich oder ungleich. Gleiche Winkel sind kongruent.

Ein Winkel heißt gestreckt (flach), wenn seine Schenkel entgegengesetzte Richtung haben und demnach auf einer Geraden liegen. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich, weil sie kongruent sind (3). Ein

*) Diese näheren Bestimmungen und Unterscheidungen verdankt man Möbius anal. Sphärik 1, Kreisverwandtschaft 8, und anderwärts.

Winkel heißt konkav (hohl) oder konvex (erhaben, überstumpf), je nachdem er kleiner oder größer ist als ein gestreckter.

Aus der Größe des von zwei Schenkeln eingeschlossenen Winkels beurteilt man die Abweichung (declinatio) der Richtung des einen Schenkels von der Richtung des andern, sowie die scheinbare Länge einer in dem Winkel enthaltenen und durch die Schenkel begrenzten Linie, wenn diese vom Scheitel aus betrachtet wird.

Die Definitionen: „Winkel ist die Neigung von zwei Linien gegen einander" (Eucl. I.), oder „der Unterschied ihrer Richtungen" oder „die Größe der Drehung, wodurch die eine in die Richtung der andern gebracht wird", machen den Winkel zu einer intensiven Größe, und stimmen nicht zu den üblichen Redeweisen z. B. ein Punkt liegt in oder außer dem Winkel, eine Gerade schneidet von dem Winkel ein Dreieck ab, u. dgl.

6. Auf einer Ebene können von einem gegebenen Punkte derselben unendlich viel Strecken ausgehn, die einer gegebenen Strecke gleich sind; die Endpunkte derselben liegen auf einer Linie, die ein Kreis (κύκλος, circulus) genannt wird. Der gegebene Punkt heißt das Centrum (κέντρον, Mittelpunkt) des Kreises, die Strecke vom Centrum bis zu einem Punkt des Kreises heißt ein Radius (Halbmesser) des Kreises. Der Kreis ist eine geschlossene (in sich zurückkehrende) Linie; der von dem Kreise (Peripherie) eingeschlossene Teil der Ebene heißt die Fläche des Kreises, der andere Teil der Ebene wird von dem Kreise ausgeschlossen. Kreise, welche das Centrum gemein haben, heißen concentrisch. Concentrische Kreise einer Ebene haben entweder keinen konstruierbaren Punkt gemein, oder sie decken sich. Ein Kreis ist durch einen Punkt und das Centrum bestimmt.

Eine Gerade auf der Ebene des Kreises, die durch das Centrum geht, schneidet den Kreis in 2 Punkten, welche Gegenpunkte heißen; die zwischen Gegenpunkten enthaltene Strecke heißt ein Diameter (Durchmesser) des Kreises. Alle Diameter des Kreises sind einander gleich, weil jeder Diameter aus zwei Radien besteht. Die Peripherie und die Fläche des Kreises werden von einem Diameter in 2 kongruente Teile geteilt, die sich decken, sowohl wenn man den einen Teil in der Ebene umdreht, bis die Endpunkte des ihn begrenzenden Diameters mit ihren Gegenpunkten zusammenfallen, als auch wenn man den einen Teil im Raume um den gemeinschaftlichen Diameter umdreht, bis seine Ebene mit der Ebene des andern wiederum zusammenfällt. Auch die durch verschiedene Diameter von dem Kreise abgeschnittenen Teile sind in der angegebenen Weise kongruent und heißen Halbkreise.

Ein am Centrum von zwei Geraden gebildeter Winkel heißt ein Centriwinkel, von dem gesagt wird, daß er auf dem in ihm enthaltenen Bogen steht. Eine von zwei Radien und dem Bogen, der in

ihrem Winkel liegt, eingeschlossene Fläche heißt ein Sektor des Kreises. Auch die zu gleichen Centriwinkeln gehörigen Bogen und Sektoren des Kreises sind kongruent und können auf doppelte Art so gelegt werden, daß sie sich decken. Ein von der Fläche des Kreises durch eine oder durch zwei Sehnen abgeschnittenes Stück heißt ein Segment des Kreises. Die Ausdrücke Sektor, Segment werden in ähnlicher Bedeutung bei krummen Linien überhaupt angewendet.

7. Unter Figuren (im weitern Sinne) werden Systeme von Punkten oder Linien oder Flächen verstanden. Die Figuren heißen Linearfiguren, oder Flächenfiguren, oder Raumfiguren, je nachdem ihre Punkte auf einer gegebenen Linie, oder auf einer gegebenen Fläche, oder im Raume überhaupt liegen. Die mathematische Wissenschaft, welche von den Figuren handelt, heißt Geometrie. Der Teil der Geometrie, in welchem nur erst Linearfiguren und Planfiguren betrachtet werden, die in einer Ebene enthalten sind, heißt Planimetrie (Epipedometrie). Die Lehre von den Raumfiguren sowohl, als auch von den Figuren überhaupt ohne die Beschränkung auf den Raum einer Ebene wird durch den Namen Stereometrie bezeichnet. Zur Stereometrie gehört die Betrachtung der Flächenfiguren, welche nicht plan sind.*)

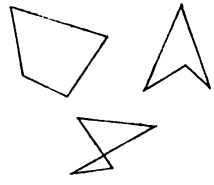
8. Geradlinige Figuren oder Polygone (*πολύγωνον*, Vieleck, *πολύγραμμον*, Vielseit) werden durch eine Reihe von Geraden gebildet, deren jede von der folgenden, die letzte von der ersten geschnitten wird; oder durch eine Reihe von Punkten, deren jeder mit dem folgenden, der letzte mit dem ersten durch eine Gerade verbunden ist. Die gemeinschaftlichen Punkte der aufeinander folgenden Geraden heißen die Eckpunkte (Scheitel) des Polygons; die Strecken zwischen den aufeinander folgenden Eckpunkten heißen die Seiten des Polygons; die Summe der Seiten bildet den Perimeter des Polygons, eine gebrochene Linie; die von den aufeinander folgenden Seiten eingeschlossenen Winkel heißen die Winkel des Polygons; die zwischen nicht aufeinander folgenden Eckpunkten enthaltenen Strecken heißen Diagonalen des Polygons. Wenn die Seiten oder die Winkel des Polygons einander gleich sind, so heißt das Polygon gleichseitig oder gleichwinkelig. Ein Polygon, das sowohl gleichseitig als auch gleichwinkelig ist, wird regulär genannt. Die Polygone werden nach der Anzahl ihrer Eckpunkte (oder Seiten) 3ecke, 4ecke, .., *n*ecke genannt und durch

*) Hiernach wird die Beschränkung auf eine Ebene in den folgenden Paragraphen dieses Buches nicht wiederholt angegeben werden.

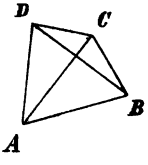
die Reihe ihrer Eckpunkte bezeichnet. Z. B. das Dreieck (τρίγωνον, triangulum) ABC hat die Eckpunkte A, B, C, die Seiten AB, BC, CA, die Winkel CBA, ACB, BAC; das Viereck $ABCD$ hat die Eckpunkte A, B, C, D, die Seiten AB, BC, CD, DA, die Winkel CBA, DCB, ADC, BAD, die Diagonalen AC, BD; das Polygon $ABCD \ldots MN$ hat die Eckpunkte A, B, $\ldots$, N, die Seiten AB, BC, $\ldots$, MN, NA, die Winkel CBA, DCB, $\ldots$, ANM, BAN, und die Diagonalen AC, AD, $\ldots$, BD, $\ldots$, $\ldots$. Von einem Eckpunkt eines $n$ecks gehn $n-3$ Diagonalen aus, also hat das $n$eck $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen. Die Gerade einer Seite hat mit den Geraden von $n-3$ Seiten noch einen Punkt gemein, es giebt also $\frac{1}{2}n(n-3)$ Durchschnittspunkte der Seiten, welche nicht Eckpunkte sind.

In einem Dreieck liegt jede Seite einem Winkel (Scheitel) gegenüber; in einem Viereck liegt jede Seite einer Seite, jeder Winkel einem Winkel gegenüber. In einem Dreieck kann jede Seite als Basis (βάσις, Grundlinie), der gegenüberliegende Eckpunkt als Spitze betrachtet werden.

Ein Polygon ist entweder plan oder nicht (gauche, uneben), je nachdem seine Eckpunkte auf einer Ebene liegen oder nicht. Jedes (geradlinige) Dreieck ist eine Planfigur (4), der von seinem Perimeter eingeschlossene Teil der Ebene heißt seine Fläche. Von planen Vierecken giebt es 3 Arten, darunter solche, deren Perimeter sich selbst einmal schneiden. Unter den planen Fünfecken giebt es solche, deren Perimeter sich selbst 5mal und weniger oft (nicht 4mal) schneiden. U. s. w.



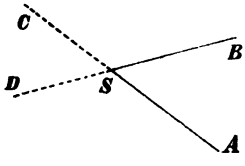
Die Vierecke $ABCD$, $ABDC$, $ACBD$ sind verschieden, obgleich sie dieselben Eckpunkte haben. Zu einem System von 4 Geraden einer Ebene*) gehören im allgemeinen 6 Punkte, in denen die Geraden sich schneiden. Diese Punkte, von denen 3mal 2 einander gegenüber liegen, sind die Eckpunkte von 3 Vierecken, zu denen 3 verschiedene Diagonalen gehören. Zu einem System von 4 Punkten einer Ebene gehören 6 Strecken, welche die Punkte verbinden. Diese Strecken, von denen 3mal 2 einander gegenüberliegen, sind die Seiten von 3 Vierecken, zu denen 3 Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten gehören.



*) „Quadrilatère complet“ nach Carnot géom. de pos. 103. Vergl. Poncelet propr. proj. 554. Steiner system. Entw. 19.

§. 2. Von den Winkeln der geradlinigen Figuren.

1. Zu jedem konkaven Winkel gehören zwei **Nebenwinkel**, welche von je einem Schenkel mit der Verlängerung des andern in der entgegengesetzten Richtung (über den Scheitel hinaus) gebildet werden, und ein **Scheitelwinkel**, den die Verlängerungen beider Schenkel einschließen. Die Summe dieser 4 Winkel ist die Ebene. Die Summe von 2 Winkeln, deren einer als des andern Nebenwinkel erscheint, ist ein gestreckter Winkel.



Zwei Winkel, deren einer des andern Scheitelwinkel ist, sind einander gleich, z. B. $ASB = CSD$. Denn $ASB + BSC = BSC + CSD$, als gestreckte Winkel (§. 1, 5); nach Subtraktion des Winkels BSC von den gleichen Summen bleibt $ASB = CSD$.

2. Ein konkaver Winkel heißt **spitz**, **recht**, **stumpf**, je nachdem er kleiner, ebenso groß, größer ist als sein Nebenwinkel. Alle rechten Winkel sind einander gleich, als Hälften von gestreckten Winkeln. Ein spitzer Winkel ist kleiner, ein stumpfer größer als ein rechter. Wenn zwei Gerade rechte Winkel bilden, so heißen sie **normal** (κάθετοι) zu einander.*)

Zwei konkave Winkel heißen **supplementär** (einer des andern Supplement), wenn ihre Summe ein gestreckter Winkel ist. Zwei spitze Winkel heißen **komplementär** (einer des andern Komplement), wenn ihre Summe ein rechter Winkel ist. Wenn zwei Winkel gleiche Supplemente oder Komplemente haben, so sind sie einander gleich. Zu dem größern Winkel gehört das kleinere Supplement und das kleinere Komplement. Z. B. Nebenwinkel sind supplementär; Scheitelwinkel sind einander gleich, weil sie dasselbe Supplement haben (1).

3. Ein gegebener Winkel hat zur Ebene, auf der er liegt (zu 4 rechten Winkeln), ein endliches Verhältnis. Man bilde die Summe von mehreren Winkeln, die dem gegebenen Winkel gleich sind, und einen Kreis von beliebigem Radius um den gemeinschaftlichen Scheitel; zu den gleichen Winkeln am Centrum gehören gleiche Bogen des Kreises (§. 1, 6). Weil nun eine endliche Anzahl solcher Bogen eine ganze

*) Von norma Modell des rechten Winkels. Die in derselben Bedeutung vorkommenden Ausdrücke **perpendikulär**, **lotrecht**, **senkrecht** sind geographisch und bezeichnen eigentlich die **vertikale** Richtung d. h. die Richtung eines ruhenden Pendels, welche normal zum Horizont ist.

Peripherie ausmacht oder übertrifft, so muß auch die gleiche Anzahl von zugehörigen Centriwinkeln eine Ebene ausmachen oder übertreffen.

Um das Verhältnis des Winkels zur Ebene anzugeben, teilt man die Ebene in 360 gleiche Winkel, welche **Grade** (360^0, μοῖραι) heißen, den Grad in 60 gleiche Winkel, die **Minuten** (60′, minutum primum) heißen, und die Minute in 60 gleiche Winkel, die **Sekunden** (60″, minutum secundum) heißen.*)

4. Zwei Winkel, deren Differenz 360^0 beträgt, sind in Bezug auf die gegenseitige Lage ihrer Schenkel voneinander nicht unterscheidbar. Wenn zwei Schenkel einen Winkel von a Grad bilden, so kann man von ihnen auch sagen, daß sie Winkel von $a + 360$, $a + 2.360, \ldots$, $a + k.360$ Grad bilden, wobei k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Insbesondere sind die Winkel 360^0 und 0 gleichbedeutend.

Wenn die Schenkel SA, SB, SC auf einer Ebene in beliebiger Ordnung liegen, so hat man (§. 1, 5)

$$ASB + BSC + CSA = 0$$

unter der üblichen Voraussetzung, daß alle Winkel durch Drehung in einerlei Sinn beschrieben sind.

Wenn die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen, so ist der Winkel ABC entweder 0 oder 180^0, folglich $2ABC = 0$. Wenn aber die genannten Punkte nicht auf einer Geraden liegen, so ist der Winkel ABC weder 0 noch 180^0, folglich $2ABC$ von 0 verschieden. Unter der Bedingung $2ABC = 0$ liegen also die Punkte A, B, C auf einer Geraden in unbestimmter Ordnung.**)

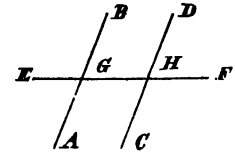
5. Wenn zwei Gerade mit einer dritten Geraden Winkel bilden, die gleich oder um 180^0 verschieden sind — jede Gerade in einer bestimmten Richtung, die Winkel in einerlei Sinn genommen nach §. 1, 5 — so schneiden sie sich nicht.

Beweis. Die beiden Geraden AB und CD bilden mit der Geraden EF die gleichen Winkel FGB und FHD, oder die um 180^0 sich unterscheidenden Winkel FGB und FHC. Dann sind die Winkel FGB

*) Vergl. Ptolemäus Almagest (d. i. ἡ μεγίστη für μεγάλη σύνταξις). Die Sexagesimalteilung stammt aus Babylon: man teilte in 60 gleiche Teile früher den ganzen Kreis, wie noch heute auf dem Zifferblatt der Uhr, später den 6ten Teil des Kreises; der Zodiakus war entsprechend den Monaten des Jahres in 12 Bilder von je 30 Abschnitten geteilt. Das Wort Grad ist die Übersetzung eines arabischen Kunstwortes, aus welchem degré gebildet worden. Kästner Gesch. d. Math. 1 p. 528. Klügel math. W. 2 p. 623.

**) Auf die Mehrdeutigkeit eines Winkels (oder eines concentrischen Kreisbogens) hat Newton Arithm. univ. ed. 1732 p. 180 hingewiesen. Die übrigen Bemerkungen sind von Möbius Kreisverw. §. 8 gemacht worden.

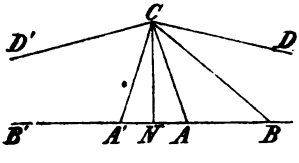
und EHC gleich, weil beide dem Winkel FHD gleich sind, und die Winkel DHE und AGF sind gleich, weil ihre Nebenwinkel gleich sind. Demnach sind die offenen Figuren $BGHD$ und $CHGA$ kongruent, und decken sich, nachdem man die eine in ihrer Ebene gedreht und fortgerückt hat, bis GB und HC zusammenfallen. Hätten die Schenkel GB und HD einen erreichbaren Punkt gemein, so würden zufolge der Kongruenz auch die Schenkel GA und HC einen erreichbaren Punkt gemein haben. Also hätten die Geraden AB und CD zwei Punkte gemein und fielen zusammen (§. 1, 3), gegen die Voraussetzung. Daher haben die Geraden AB und CD keinen erreichbaren Punkt gemein und schneiden sich nicht.



Der von den sich nicht schneidenden Geraden AB und CD eingeschlossene Streifen (bande) hat zur Ebene dasselbe Verhältnis, wie die Strecke GH zu der Geraden, von der die Strecke ein Teil ist. Wenn durch eine endliche Anzahl von Strecken die Gerade ausgefüllt wird oder nicht, so wird durch dieselbe Anzahl von Streifen die Ebene ausgefüllt oder nicht.

Der Schluß, daß ein Winkel von einem Streifen nicht ganz eingeschlossen sein könne, weil von den Verhältnissen des Winkels und des Streifens zur unendlichen Ebene das eine nicht verschwindet, das andere verschwindet, ist nicht berechtigt. Auf diesem mangelhaften Fundament war die Parallelentheorie von Bertrand (Développement nouveau de la partie élém. des Mathém. Genève 1778 II p. 19) errichtet.

6. Wenn in einem Dreieck ABC ein Winkel BAC und eine an demselben liegende Seite CA unverändert bleibt, und die andere daranliegende Seite AB zu wachsen beginnt, so beginnt der ihr gegenüberliegende Winkel ACB zu wachsen. Wenn es nun einen bestimmten Winkel ACD giebt, welchem der Winkel ACB bei hinreichender Größe der Seite AB bis auf eine beliebig kleine Differenz sich nähert, so heißt der Schenkel CD, welcher nach einem unendlich fernen Punkt*) des Schenkels AB gerichtet ist und den letztern nicht schneidet, während alle von C ausgehenden und in dem Winkel ACD enthaltenen Schenkel ihn schneiden, parallel ($\pi\alpha\rho$-$\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda o\varsigma$) mit AB.



Der Winkel ACD kann das Supplement des Winkels BAC erreichen, aber nicht überschreiten (5). Wenn NC normal zu AB ist, wenn NB und NB' entgegengesetzte Richtungen haben und wenn der Winkel

*) Dieser Ausdruck ist von Desargues 1630, und in weiterem Umfang von Newton 1687 gebraucht worden.

$D'CN = NCD$ ist, so folgt aus der Kongruenz der Figuren $BNCD$ und $B'NCD'$, daß auch CD' parallel mit NB'. Wenn insbesondere der Winkel NCD recht ist, so ist $D'CN + NCD = 180^0$, und die beiden Parallelen CD und CD' liegen auf einer Geraden.

Wenn aber eine solche Grenze ACD des Winkels ACB nicht existiert, wenn die Gerade eine geschlossene Linie ist, auf der man von A über B in derselben Richtung weitergehend nach A gelangt, so sind die Parallelen nicht konstruierbar.

Den Parallelen entsprechend werden einer Geraden entweder zwei getrennte unendlich ferne Punkte (real oder nicht real), oder ein unendlich ferner Punkt zugeschrieben.

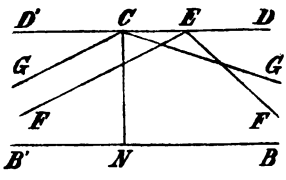
Welcher von den drei möglichen Fällen stattfindet, kann weder empirisch (durch Beobachtung) noch theoretisch (spekulativ) entschieden werden. Auf die Voraussetzung eines unendlich fernen Punktes der Geraden, welcher keiner Erfahrung widerspricht, ist die gemeine, Euklidische Geometrie gegründet, die im Folgenden entwickelt wird; auf die Voraussetzung eines Paares unendlich ferner Punkte der Geraden können zwei folgerichtige Nicht-Euklidische Geometrien gegründet werden.

Euclides nannte die Geraden AB, CD einer Ebene, welche unter der Bedingung $BAC + ACD = 180^0$ sich nicht schneiden, parallel, indem er ohne Beweis annahm, daß unter der Bedingung $BAC + ACD < 180^0$ die Schenkel AB und CD sich schneiden (11tes Axiom, Elem. I, 27 ff.). Daß die Versuche, jenes Axiom (oder ein Äquivalent desselben) zu beweisen, aussichtslos sind, diese von Gauß (seit 1792) gehegte Überzeugung findet ihre Bestätigung durch die Existenz einer widerspruchsfreien Geometrie, welche Gauß, J. Bolyai, Lobatschewsky erbaut haben, indem sie die Möglichkeit geradliniger Dreiecke mit verschiedenen Winkelsummen (unter 180^0) zuließen. Diese Geometrie, welche in gewissen Lehren mit der gemeinen Geometrie unbedingt übereinstimmt, übrigens aber eine durch Erfahrung zu bestimmende Konstante enthält, ist Nicht-Euklidische (imaginäre) Geometrie, Astralgeometrie, Pangeometrie genannt worden. Vergl. Gauß' Anzeigen von Schwab commentatio in primum elementorum Euclidis librum und Metternich Theorie der Parallellinien, Gött. gel. Anz. 1816 p. 617, und von C. R. Müller Theorie der Parallelen, Gött. gel. Anz. 1822 p. 1725. Gauß' Briefe an Schumacher (seit 1831) II. p. 268 und 431, V. p. 246. Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis p. 81. Ausgearbeitet wurde die Geometrie unter Voraussetzung von zwei realen unendlich fernen Punkten der Geraden gleichzeitig von J. Bolyai (Appendix zu dem Werke W. Bolyai's Tentamen in elementa matheseos etc. Maros Vasarhely 1832, in franz. Übersetzung La science absolue de l'espace etc. Paris, Gauthier-Villars 1868) und von Lobatschewsky Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen (im Kasan'schen Boten 1829 und in den gelehrten Schriften der Universität Kasan 1836 bis 1838), Géométrie imaginaire 1837 (in Crelles J. 17 p. 295), Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien: Berlin 1840 (in franz. Übersetzung Études géométriques etc. p. Hoüel. Paris, Gauthier-Villars 1866), Pangeometrie: Kasan 1855. Frischauf absolute Geometrie, Leipzig 1872. Die Möglichkeit einer Geometrie bei nicht realen unendlich fernen Punkten der Geraden ist von Riemann 1854 erkannt worden: Über die Hypothesen der Geometrie, Göttinger Abh. 1867. Vergl. Helmholtz über die Thatsachen der Geometrie, Gött. Nachrichten 1868 und Verh. des Heidelb. naturhist. Vereins 1868 und 69, Pop. wissensch. Vorträge 3. Heft 1876. Beltrami Saggio di interpretazione della geometria Non-Euclidea, Napoli 1868. Teoria degli spazii di curvatura costante, Milano

1868 (in franz. Überſetzung Ann. de l'école normale 1869). Genocchi dei primi princ. della meccanica e della geometria, Firenze 1869. Tilly études de mécanique abstraite (Mém. de l'ac. de Belgique 1870). Cayley Philos. Trans. 1859. Math. Ann. 5 p. 630. Klein Über die Nicht-Euklidiſche Geometrie Gött. Nachrichten 1871 n° 17. Math. Annalen 4 p. 573. 6 p. 112. Paſch Neuere Geometrie 1882 § 20.

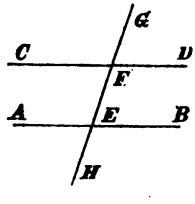
7. Wenn die Schenkel CD mit NB, CD' mit NB' parallel ſind (6), wenn die Winkel NCD, $D'CN$ recht ſind, und daher CD und CD' auf der Geraden DD' liegen (Axiom der gemeinen Geometrie), ſo ſind die Geraden BB', DD' parallel und haben folgende Eigenſchaften.

I. Eine Gerade, welche eine der beiden Parallelen ſchneidet, ſchneidet auch die andere. Ein in dem Winkel NCD enthaltener Schenkel ſchneidet NB, ein in dem Winkel $D'CN$ enthaltener Schenkel ſchneidet NB' gemäß der Definition (6). Wenn E ein Punkt des Schenkels CD und der Winkel



$FED < NED$ iſt, ſo ziehe man einen den Schenkel EF ſchneidenden Schenkel CG, welcher NB in H ſchneidet; der Schenkel EF ſchneidet die Seite HC des Dreiecks CNH, die Seite CN nicht, alſo ſchneidet er die Seite NH. Wenn dagegen $FED > NED$, ſo ziehe man einen den Schenkel EF nicht ſchneidenden Schenkel CG, welcher NB' in H ſchneidet; der Schenkel EF ſchneidet die Seite CN des Dreiecks CNH, die Seite HC nicht, alſo ſchneidet er die Seite NH. Die Figuren $BNCD$, $DCNB$ ſind kongruent; alſo wird von jeder Geraden, welche NB ſchneidet, auch DD' geſchnitten.

II. Wenn die Parallelen AB, CD von der Geraden HG in E, F geſchnitten werden, ſo iſt die Summe der innern Winkel $BEF + EFD = 180^0$. Wenn die Summe mehr als 180^0 betrüge, d. h. EFD größer wäre als das Supplement von BEF, ſo wäre der Schenkel FD nicht parallel mit EB (6). Wenn die Summe weniger als 180^0 betrüge, ſo wäre $CFE + FEA > 180^0$, und FC nicht parallel mit EA. Alſo iſt die Summe der innern Winkel von 180^0 nicht verſchieden.

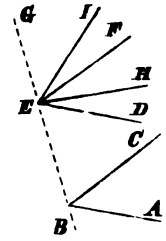


Die Gegenwinkel (correspondants) BEF und DFG und die Wechſelwinkel (alternes-internes) BEF und CFE ſind einander gleich, weil beide dasſelbe Supplement haben.

III. Wenn zwei Gerade mit einer dritten Geraden ſupplementäre innere Winkel bilden, oder gleiche Gegenwinkel, oder gleiche Wechſelwinkel, ſo ſind ſie parallel. Unter der Vorausſetzung $BEF + EFD = 180^0$ kann nicht FD' ſtatt FD mit EB parallel ſein, denn $BEF + EFD'$ betrüge 180^0 (II), alſo wäre $BEF + FED$ nicht 180^0, gegen die Vorausſetzung.

Gerade einer Ebene, welche sich nicht schneiden, sind parallel. Wenn zwei Gerade mit einer dritten Geraden parallel sind, so sind sie parallel. Parallele Gerade haben einerlei oder die entgegengesetzte Richtung, ihr Winkel mit unendlich fernem Scheitel ist 0 oder 180^0.

IV. Wenn die Schenkel eines Winkels mit den Schenkeln eines andern Winkels parallel sind und einerlei Richtung haben, so sind die Winkel einander gleich. Wenn ED und BA, EF und BC parallel (in einerlei Richtung) sind, so ist der Winkel $DEG = ABG$, $FEG = CBG$, folglich durch Subtraktion (oder Addition) $DEF = ABC$.



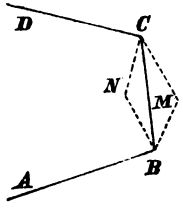
Wenn die Schenkel eines Winkels der Reihe nach mit den Schenkeln eines andern Winkels in einerlei Sinn gleiche Winkel bilden, so sind die Winkel einander gleich. Wenn die Winkel $BA\hat{}EH$ und $BC\hat{}EI$ (in einerlei Sinn) einander gleich sind, so sind auch die Winkel DEH und FEI einander gleich, welche von jenen Winkeln sich nicht unterscheiden. Durch Subtraktion der gleichen Winkel DEH und FEI von dem Winkel DEI erhält man $HEI = DEF$; weil aber $DEF = ABC$, so ist auch $HEI = ABC$.

8. Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt 180^0. Eucl. I, 32. Wenn CD parallel mit AB, so ist der Winkel $CBA = BCD$, $BAC + ACB + CBA = BAC + ACD = 180^0$ (7, II).

Die Summe von zwei Winkeln eines Dreiecks beträgt weniger als 180^0. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt; wenn zwei Winkel die Werte α, β haben, so ist der dritte $180^0 - (\alpha + \beta)$. Das Dreieck hat zwei spitze Winkel; je nachdem der dritte Winkel spitz, recht, stumpf ist, heißt das Dreieck spitzwinkelig, rechtwinkelig, stumpfwinkelig. Die in einem rechtwinkeligen Dreieck den rechten Winkel einschließenden Seiten heißen Katheten (2), die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt die Hypotenuse (ὑποτείνουσα, subtendens, im Altertum auch die einem beliebigen Winkel gegenüberliegende Seite). Die Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks sind komplementär (2).

Der von einer Seite eines Polygons mit der Verlängerung der vorhergehenden Seite gebildete Winkel heißt ein Außenwinkel des Polygons. Ein Außenwinkel des Dreiecks ist die Summe der an den beiden andern Eckpunkten liegenden Winkel des Dreiecks, denn der dritte Winkel des Dreiecks ist das Supplement sowohl dieser Summe als auch jenes Außenwinkels.

9. Die Summe der Winkel eines $n$ecks, dessen Perimeter sich selbst nicht schneidet, beträgt $(n-2).180^0$. Wenn nämlich aus dem $k$eck $ABCD..$ das $(k+1)$eck $ABMCD..$ oder $ABNCD..$ wird, so wächst die Summe seiner Winkel um 180^0. In dem ersten Falle ist die Differenz



$$MBA + CMB + DCM - (CBA + DCB)$$
$$= MBC + CMB + BCM = 180^0 \quad (8).$$

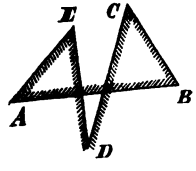
In dem zweiten Falle findet man für die Differenz

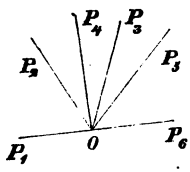
$$NBA + CNB + DCN - (CBA + DCB)$$

den Wert $360^0 - CBN - BNC - NCB = 180^0$, nachdem man den konvexen Winkel CNB durch $360^0 - BNC$ ersetzt hat. Nun ist die Summe der Winkel eines 3ecks 180^0, folglich beträgt die Summe der Winkel in einem 4eck 2.180^0, in einem 5eck 3.180^0, u. s. w., vorausgesetzt, daß die Perimeter sich selbst nicht schneiden.

Die Summe der Außenwinkel eines $n$ecks, das nur konkave Winkel hat, beträgt 360^0, unabhängig von der Anzahl der Eckpunkte. Denn die Summe eines Winkels und des daranliegenden Außenwinkels ist 180^0, also die Summe aller Winkel und Außenwinkel $n.180^0$. Nun beträgt die Summe der Winkel des $n$ecks $(n-2).180^0$, folglich die Summe der Außenwinkel 2.180^0.

Wenn der Perimeter des Polygons sich selbst schneidet, so beträgt die Summe der Winkel geradmal oder ungeradmal 180^0, je nachdem die Anzahl der Eckpunkte gerade oder ungerade ist. Z. B. die Summe der Winkel des 5ecks $ABCDE$, die auf der bezeichneten Seite des Perimeters liegen, wird gefunden, indem man durch einen beliebigen Punkt O die Schenkel OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP_5, OP_6 parallel mit den Seiten AB, BC, CD, DE, EA, AB zieht und zwar abwechselnd in der entgegengesetzten und in derselben Richtung.*) Dann ist $CBA = P_2OP_1$, $DCB = P_3OP_2$, u. s. w. (7, IV), folglich





$$CBA + DCB + EDC + AED + BAE$$
$$= P_2OP_1 + P_3OP_2 + P_4OP_3 + P_5OP_4 + P_6OP_5.$$

Diese Summe giebt den Winkel P_6OP_1, der ungeradmal 180^0 (in der gegebenen Figur 3.180^0) beträgt, weil der letzte Schenkel dem ersten entgegengesetzt ist. Bei der Summierung der Winkel eines Polygons von

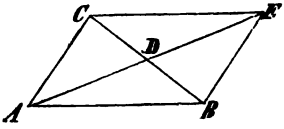
*) Vergl. J. H. T. Müller Lehrb. d. Geom. 1844 I p. 84.

gerader Seitenzahl findet man einen Winkel, dessen letzter Schenkel mit dem ersten einerlei Richtung hat, dessen Wert also 0, 360^0, .. ist. Hiernach findet man als Summe der Winkel eines 4ecks entweder 2- oder 4mal 180^0, als Summe der Winkel eines 5ecks entweder 1- oder 3- oder 5- oder 7mal 180^0, u. s. w.

10. Versuche, die Parallelentheorie der gemeinen Geometrie ohne ein besonderes Axiom aufzubauen, sind in verschiedenen Epochen gemacht worden, im Anfang dieses Jahrhunderts von Legendre, der zu der Meinung gelangte, daß durch Definition der Geraden die bemerkte Lücke sich werde ausfüllen lassen (Géom. Note 2). Auf weitere Versuche hatte man zu verzichten seit der Veröffentlichung (1860—65) der Briefe Gauß an Schumacher, nachdem Lobatschewskys und Bolyais Arbeiten nebst Riemanns Untersuchungen in Erinnerung gebracht worden waren. Legendres letzte Untersuchungen haben die folgenden Sätze I und II ergeben (Mém. de Paris 1833).

I. Die Summe der Winkel eines Dreiecks kann 180^0 nicht übersteigen.

Beweis. Wenn man durch die Mitte D von BC die Strecke $AE = 2AD$ zieht, so ist sowohl das Dreieck CDE mit BDA, als auch EDB mit ADC kongruent (1), daher in dem Dreieck AEC der Winkel $CEA = BAD$, $ACE = ACB + CBA$, und in dem Dreieck ABE der Winkel $AEB = DAC$, $EBA = ACB + CBA$. Man kann also, indem man den kleinern unter den Winkeln BAD und DAC durch A_1 bezeichnet, aus dem Dreieck ABC mit den Winkeln A, B, C ein Dreieck von derselben Fläche mit den Winkeln A_1, B_1, C_1 ableiten, so daß



$$A_1 \leqq \tfrac{1}{2}A, \quad A_1 + C_1 = A, \quad B_1 = B + C$$
$$A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C$$

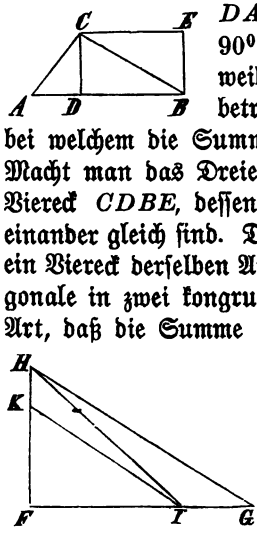
Ebenso kann aus dem abgeleiteten Dreieck ein Dreieck mit den Winkeln A_2, B_2, C_2 abgeleitet werden, so daß $A_2 \leqq \frac{1}{2}A_1 \leqq \frac{1}{4}A$, $A_2 + C_2 = A_1$, $A_2 + B_2 + C_2 = A_1 + B_1 + C_1$. U. s. w. Nachdem nun in einem abgeleiteten Dreieck der Winkel A_{k-1} kleiner als ein gegebener Winkel ω geworden ist, hat man in dem folgenden abgeleiteten Dreieck $A_k + C_k = A_{k-1} < \omega$ und, sofern $B_k < 180^0$ vorausgesetzt werden darf, $A_k + B_k + C_k < 180^0 + \omega$. Also kann auch die Summe der Winkel des gegebenen Dreiecks $180^0 + \omega$ nicht erreichen.

Anmerkung. Der gegebene Beweis verliert seine Geltung, wenn der auf der Verlängerung von AD liegende Punkt E nicht mehr in dem von BC mit der Verlängerung der Seite AB gebildeten Winkel

liegt, so daß der Winkel EBA nicht weniger als 180^0 beträgt; also unter der Voraussetzung, daß die Gerade reale unendlich ferne Punkte nicht hat. Ebenso der Beweis des Satzes, daß ein Außenwinkel des Dreiecks größer ist als ein nicht anliegender innerer Winkel (8), welchen Eucl. I, 16 mittelst der obigen Konstruktion geführt hatte.

II. Wenn bei einem Dreieck die Summe der Winkel 180^0 beträgt, so beträgt bei jedem Dreieck die Summe der Winkel 180^0.

Beweis. Es sei in dem Dreieck ABC die Summe der Winkel $= 180^0$, AB eine Seite, an welcher spitze Winkel liegen, CD normal zu AB, so liegt CD in dem Winkel ACB (vergl. I). Jede der Summen $DAC + ACD$, $DCB + CBD$ kann nicht mehr als 90^0 betragen (I), aber auch nicht weniger als 90^0, weil dann $BAC + ACB + CBA$ weniger als 180^0 betrüge; also giebt es ein rechtwinkeliges Dreieck BCD, bei welchem die Summe der Winkel an der Hypotenuse 90^0 beträgt. Macht man das Dreieck CBE mit BCD kongruent, so erhält man ein Viereck $CDBE$, dessen Winkel recht und dessen nichtfolgende Seiten einander gleich sind. Durch Vervielfältigung dieses Vierecks findet man ein Viereck derselben Art von beliebiger Größe, welches durch eine Diagonale in zwei kongruente rechtwinkelige Dreiecke geteilt wird von der Art, daß die Summe der Winkel an der Hypotenuse 90^0 beträgt.



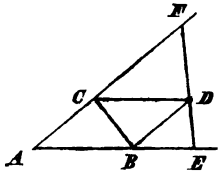
Wenn nun in dem beliebig großen rechtwinkeligen Dreieck FGH die Summe $FHG + HGF = 90^0$ ist, so kann in dem kleinern rechtwinkeligen Dreieck FIH die Summe $FHI + HIF$ nicht mehr als 90^0 betragen, aber auch nicht weniger als 90^0, weil dann $FHI + IHG + HGI + GIH + HIF$ weniger als 270^0, d. h. $FHG + HGI$ weniger als 90^0 betrüge. Ebenso schließt man, daß in dem kleinern rechtwinkeligen Dreieck FIK die Summe $FKI + KIF = 90^0$ ist. U. s. w.

Jedes Dreieck kann in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt werden, also beträgt unter der obigen Voraussetzung auch bei ihm die Summe der Winkel 180^0.

III. Daß die Summe der Winkel eines Dreiecks nicht weniger als 180^0 beträgt, läßt sich beweisen, wenn man annimmt, daß durch einen innerhalb eines Winkels gelegenen Punkt eine Gerade gezogen werden kann, welche beide Schenkel schneidet.*)

*) Vergl. den Aufsatz des Verf. in den Leipziger Berichten 1870 (Crelles J. 73 p. 372).

Man setze an das Dreieck ABC das mit ihm kongruente Dreieck CBD und ziehe durch D eine Gerade, welche die Fortsetzungen von AB und AC in E und F schneidet. Gesetzt, die Winkelsummen in ABC, BED, CDF, betragen



$$180^0 - \delta, \quad 180^0 - \delta', \quad 180^0 - \delta''$$

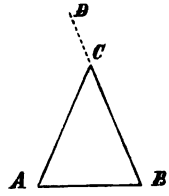
so beträgt die Winkelsumme in AEF

$$180^0 - \delta + 180^0 - \delta + 180^0 - \delta' + 180^0 - \delta'' - 3 \cdot 180^0$$

d. i. weniger als $180^0 - 2\delta$, in einem andern Dreieck $180^0 - 4\delta$, endlich in einem Dreieck weniger als eine gegebene Größe, während doch das Dreieck den gegebenen Winkel A enthält.

§. 3. Von den Seiten eines Dreiecks.*)

1. I. Ein Dreieck heißt **gleichschenkelig** (ἰσοσκελές), wenn zwei Seiten desselben einander gleich sind. Die dritte Seite heißt vorzugsweise die **Basis**, der gegenüberliegende Eckpunkt die **Spitze** des gleichschenkeligen Dreiecks.

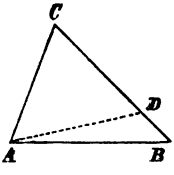


Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber. Oder: die Winkel an der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks sind einander gleich. Wenn die Seite $BC = CA$, so ist der Winkel $A = B$. Das Dreieck ABC deckt sich selbst auch dann, wenn man es umwendet und C mit C, CA mit CB, CB mit CA vereint. Dabei deckt der Schenkel AB den Schenkel BA (§. 1, 3), also sind die an der Seite AB liegenden Winkel einander gleich.

Ein Winkel an der Basis des gleichschenkeligen Dreiecks ist spitz (§. 2, 8) und die Hälfte des Außenwinkels an der Spitze, weil $DCA = BAC + CBA = 2CBA$.

II. Der größern Seite eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber. Wenn $BC > CA$, so ist $A > B$.

Beweis. Trägt man CA auf CB, so daß $DC = CA$, so ist der Winkel $BAC > DAC$. Ferner ist $DAC = CDA$ gegenüber den gleichen Seiten DC, CA des Dreiecks ADC (I). Endlich ist $CDA > CBA$, als Außenwinkel des Dreiecks ABD (§. 2, 8). Aus den Prämissen $BAC > DAC$, $DAC = CDA$, $CDA > CBA$ folgt $BAC > CBA$.



*) Vergl. Eucl. I, 5. 6. 18. 19. 20. und III.

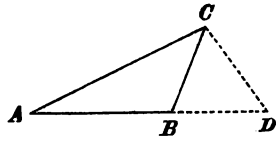
III. Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. Wenn $A = B$, so ist $BC = CA$. Wären BC und CA ungleich, so würden A und B ungleich sein (II). Dies ist gegen die Voraussetzung, also können BC und CA nicht ungleich sein.

IV. Dem größern Winkel eines Dreiecks liegt die größere Seite gegenüber. Wenn $A > B$, so ist $BC > CA$. Wäre $BC = CA$, so würde $A = B$ sein (I); wäre $BC < CA$, so würde $A < B$ sein (II). Beides ist gegen die Voraussetzung, also kann BC weder ebenso groß, noch kleiner sein als CA.

Im rechtwinkeligen Dreieck ist der rechte Winkel, im stumpfwinkeligen Dreieck ist der stumpfe Winkel größer als jeder von den beiden andern Winkeln (§. 2, 8). Also ist die Hypotenuse größer als jede von beiden Katheten; die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite ist größer als jede von den beiden andern Seiten.

2. I. Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden andern Seiten, größer als die Differenz derselben.

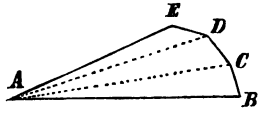
$$AB - BC < CA < AB + BC.$$



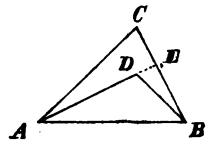
Beweis. Verlängert man AB und macht $BD = BC$, so ist $AD = AB + BC$ und der Winkel $CDB = BCD$ (1); ferner $BCD < ACD$, mithin $CDB < ACD$; endlich $CA < AD$ gegenüber den ungleichen Winkeln des Dreiecks ADC (1, IV), d. h. $CA < AB + BC$. Ebenso ist $AB < BC + CA$, woraus durch Subtraktion von BC geschlossen wird, daß $AB - BC < CA$.

Von den Strecken, welche zum Perimeter eines Dreiecks vereint werden sollen, sind 2 willkürlich; die 3te kann nur zwischen der Summe und der Differenz der beiden ersten gewählt werden.

II. Die gerade Linie zwischen 2 Punkten ist kürzer als jede andere zwischen denselben Punkten enthaltene Linie, und giebt den Abstand der Punkte an. Z. B. $AB < BC + CA$, $CA < CD + DA$, $DA < DE + EA$, . . (I). Folglich ist AB kürzer als die gebrochene Linie BCA, kürzer als die gebrochene Linie $BCDA$, kürzer als die gebrochene Linie $BCDEA$, . . , kürzer als eine Linie, die, in unendlich vielen zwischen B und A unendlich nahe aufeinander folgenden Punkten gebrochen, von irgend einer krummen Linie sich nicht unterscheidet.

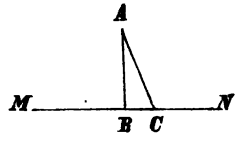


Wenn der Punkt D von dem Perimeter des Dreiecks ABC eingeschlossen ist, so ist die gebrochene Linie $AD + DB$ kürzer als $AC + CB$. Denn die Gerade AD schneidet BC in E, so daß $DB < DE + EB$, folglich



$$AD + DB < AE + EB < AC + CB.$$

III. Unter den Strecken, welche auf einer Geraden anfangen und in einem gegebenen Punkt endigen, ist die normale die kürzeste, und giebt den Abstand des Punktes von der Geraden an. Wenn AB normal zu MN, und AC eine beliebige andere Strecke ist, die einen Punkt der Geraden MN mit A verbindet, so ist in dem rechtwinkeligen Dreieck ABC die Kathete BA kleiner als die Hypotenuse CA (1).

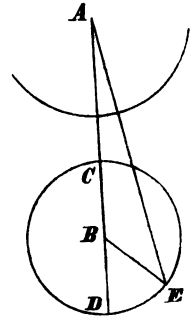


3. Wenn der Abstand der Centren von zwei Kreisen größer ist als die Summe der Radien, so schließen die Kreise einander aus. Wenn der Abstand der Centren der Summe der Radien gleich ist, so berühren sich die Kreise außen in einem Punkt. Wenn der Abstand der Centren kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien ist, so schneiden sich die Kreise in zwei Punkten. Wenn der Abstand der Centren der Differenz der Radien gleich ist, so berühren sich die Kreise innen in einem Punkte. Wenn der Abstand der Centren kleiner ist, als die Differenz der Radien, so schließt der größere Kreis den kleinern ein.

Beweis. Die Punkte des Kreises B haben von dem Centrum A verschiedene Abstände. Der Punkt C, welcher in der Richtung BA liegt, ist dem Punkt A am nächsten; der Punkt D, welcher in der entgegengesetzten Richtung liegt, ist dem Punkt A am fernsten; d. h. $AC < AE < AD$, weil (2)

$$AB - BE < AE < AB + BE$$

Ein Punkt liegt aber außer, auf, in dem Kreise A, je nachdem sein Abstand von dem Centrum A größer, ebenso groß, kleiner ist als der Radius des Kreises A, welcher durch r bezeichnet wird.



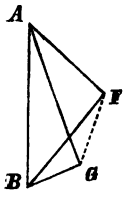
Unter der Bedingung $AB > r + BE$ hat man $AB - BE > r$, $AC > r$. Also sind alle Punkte des Kreises B vom Kreise A ausgeschlossen.

Unter der Bedingung $AB = r + BE$ hat man $AB - BE = r$, $AC = r$, $AE > r$. Also liegt C auf dem Kreise A, alle übrigen Punkte des

Kreises B sind von dem Kreise A ausgeschlossen, d. h. der Kreis A wird von dem Kreise B in C außen berührt.

Unter der Bedingung $r - BE < AB < r + BE$ ist $AB - BE < r$, $AC < r$ und $r < AB + BE$, $r < AD$. Also liegt C in, D außer dem Kreise A, und der Kreis A wird von dem Kreise B, der eine geschlossene Linie ist, in zwei Punkten (beim Ein- und Ausgang) geschnitten.

Auf einer Seite der Geraden AB können die Kreise nicht neben dem gemeinschaftlichen Punkt F einen Punkt G gemein haben. Der Punkt G kann nicht in dem Dreieck ABF liegen (2, II). Liegt er in dem Winkel BAF, so ist der Winkel $AFG > BFG$, $BFG = FGB$, $FGB > FGA$, folglich $AFG > FGA$ und $AG > FA$, gegen die Voraussetzung. Ebensowenig kann G in dem Winkel FBA oder in dem zu AFB gehörigen Scheitelwinkel liegen.

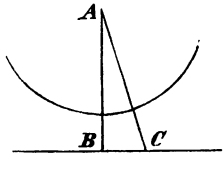


Unter der Bedingung $AB = r - BE$ ist $AB + BE = r$, $AD = r$, $AE < r$. Also liegt D auf dem Kreise A, alle übrigen Punkte des Kreises B sind von dem Kreise A eingeschlossen, d. h. der Kreis A wird von dem Kreise B in D innen berührt.

Unter der Bedingung $AB < r - BE$ ist $AB + BE < r$, $AD < r$. Also sind alle Punkte des Kreises B vom Kreise A eingeschlossen.

4. Wenn der Abstand einer Geraden vom Centrum eines Kreises größer ist als der Radius, so ist die Gerade vom Kreise ausgeschlossen. Wenn derselbe Abstand dem Radius gleich ist, so berühren sich die Gerade und der Kreis in einem Punkte. Wenn derselbe Abstand kleiner ist als der Radius, so schneiden sich die Gerade und der Kreis in zwei Punkten.

Beweis. Bezeichnet man den Abstand der Geraden von dem Centrum A durch AB, einen beliebigen andern Punkt der Geraden durch C, so ist $AB < AC$ (2, III).

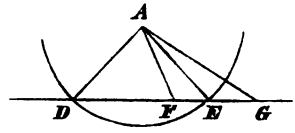


Unter der Bedingung $AB > r$, worin r den Radius des Kreises A bedeutet, sind alle Punkte der Geraden vom Kreise A ausgeschlossen.

Unter der Bedingung $AB = r$ ist $AC > r$. Also liegt B auf dem Kreise A, alle übrigen Punkte der Geraden sind von dem Kreise ausgeschlossen, d. h. der Kreis A wird von der Geraden in B berührt.

Unter der Bedingung $AB < r$ ist B von dem Kreise A eingeschlossen, und die Gerade, welche von B aus nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckt, schneidet den Kreis A in zwei Punkten D, E.

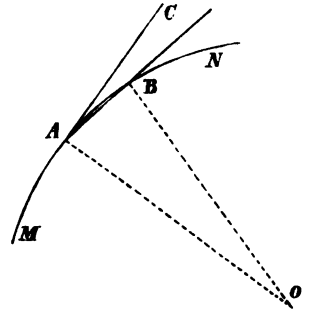
Die übrigen Punkte der Geraden sind von dem Kreise ein- oder ausgeschlossen, je nachdem sie zwischen D und E liegen oder nicht. Liegt F zwischen D und E, so ist der Winkel $FDA = AEF$ gegenüber den gleichen Seiten EA und AD des Dreiecks ADE (1), $AEF < AFD$ als Außenwinkel des Dreiecks AFE (§. 2. 8), mithin $FDA < AFD$, also $AF < AD$. Liegt G auf der Verlängerung von DE jenseit E, so ist der Winkel $GDA = AED$ $AED > AGD$, mithin $GDA > AGD$, also $AG > AD$.



Weil demnach 3 beliebig nahe Punkte des Kreises nicht auf einer Geraden liegen, so ist der Kreis eine krumme Linie (§ 1, 3).

5. Eine Gerade hat in allen Punkten dieselbe Richtung; eine Kurve hat im allgemeinen in jedem Punkte eine bestimmte Richtung, in verschiedenen Punkten verschiedene Richtungen. Unter den Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt einer Kurve sich ziehn lassen, fällt im allgemeinen eine mit der Kurve in der Nähe des gegebenen Punktes am genauesten zusammen, so daß zwischen ihr und der Kurve eine Gerade sich nicht ziehn läßt. Diese der Kurve in dem gegebenen Punkte am engsten sich anschmiegende Gerade heißt eine Tangente (Berührende) der Kurve; der gemeinschaftliche Punkt der Tangente und Kurve heißt der Berührungspunkt. Die Tangente giebt die Richtung der Kurve in dem Berührungspunkte an.

Um die Tangente der Kurve MN in A zu finden, zieht man die Gerade AB nach einem in der Nähe von A auf der Kurve liegenden Punkte B. Wenn nun der Punkt B den Bogen BA zurücklegt, so dreht sich die nach B gerichtete Gerade AB um A, und wird zur Tangente AC, indem B mit A zusammenfällt.*) Weil die Sehne AB die Richtung der Tangente AC erhält, wenn ihre Länge verschwindet, so sagt man, daß die Tangente mit der Kurve 2 unendlich nahe Punkte gemein hat, die in dem Berührungspunkt vereint sind. Der hinreichend kleine Bogen AB liegt in dem Winkel BAC, so daß zwischen



*) Diese „Methode der Tangenten" wurde im 17. Jahrhundert von Fermat, Descartes, Huygens, Newton, Leibniz ausgebildet. Im Altertum waren außer den Tangenten des Kreises und der Kegelschnitte die von Archimedes an seiner Spirale gezogenen Tangenten bekannt. Vergl. Klügel math. W. I. p. 280.

dem Bogen AB und seiner Tangente AC eine Gerade nicht gezogen werden kann.

Wenn insbesondere der Bogen AB einem Kreise angehört, dessen Centrum O ist, so ist das Dreieck OAB gleichschenkelig, also (1) der Winkel

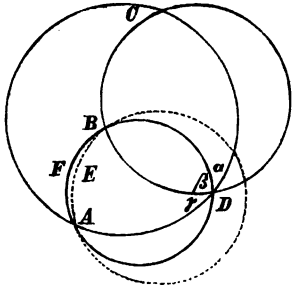
$$OAB = \tfrac{1}{2}(180^0 - BOA) = 90^0 - \tfrac{1}{2}BOA$$

Fällt nun B mit A zusammen, so verschwindet BOA, und OAB wird recht, während sein Schenkel AB zur Tangente des Bogens wird. Also ist die Tangente eines Kreises normal zum Radius des Berührungspunktes; ihr Abstand vom Centrum ist einem Radius gleich (4).

Aus dem Zusammenfallen von 2 gemeinschaftlichen Punkten wird nach derselben Methode die Berührung von 2 gegebenen Kurven abgeleitet. Die Kurven haben in dem Berührungspunkte eine gemeinschaftliche gerade Tangente, und liegen entweder einerseits derselben oder beiderseits.

6. Unter dem Winkel einer Kurve mit einer sie schneidenden geraden oder krummen Linie versteht man den Winkel ihrer Tangente in dem gemeinschaftlichen Punkte mit der Geraden oder mit der Tangente der andern Kurve in demselben Punkte. Eine Gerade, welche die Kurve rechtwinkelig schneidet, heißt eine Normale der Kurve. Der Winkel der Kurve mit ihrer eignen Tangente (angulus contactûs) ist null, obwohl zwischen der Kurve und ihrer Tangente durch den Berührungspunkt berührende Kurven gehn können, welche der erstern mehr oder minder sich anschmiegen und mit ihr sozusagen verschiedene unendlich kleine Winkel einschließen. Vergl. §. 13, 10.

Der Kreis bildet mit seinen Radien rechte Winkel (5), mit einer Sehne in den beiden Endpunkten derselben gleiche spitze Winkel, die Komplemente der Winkel an der Basis des gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Spitze das Centrum ist. Die Segmente eines Kreises werden mit Rücksicht auf den Winkel des Bogens mit der Sehne spitzwinkelig, rechtwinkelig, stumpfwinkelig genannt, je nachdem sie kleiner, ebenso groß, größer sind als ein Halbkreis.*)



Zwei Kreise, welche sich in 2 Punkten schneiden, bilden miteinander in beiden Punkten gleiche Winkel. Wenn 3 Kreise in einem Punkte sich schneiden, so bilden sie ein Bogendreieck, dessen Winkel die

*) Steiner Crelle J. 24 p. 108.

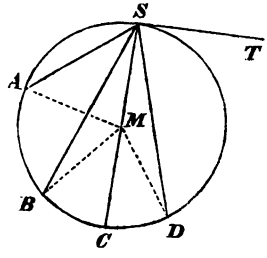
Summe 180^0 haben. Z. B. in dem Bogendreieck ABC ist der Winkel $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $A+B+C = \alpha+\beta+\gamma = 180^0$.

Wenn in dem Bogendreieck ABC die Summe der Winkel 180^0 beträgt, so schneiden sich die Bogen AB, BC, CA in einem Punkt. Denn sobald der Bogen AEB nicht durch den gemeinschaftlichen Punkt D der Bogen BC, CA geht, so ist die Summe der Winkel verschieden von der Summe der Winkel des Bogendreiecks ABC, dessen Bogen durch D gehn.*)

§. 4. Von den Figuren, welche einem Kreise ein- oder umgeschrieben sind.

1. Ein Polygon heißt einem andern Polygon **eingeschrieben** (inscriptum), wenn seine Eckpunkte der Reihe nach auf den Seiten des andern Polygons liegen; **umgeschrieben** (circumscriptum), wenn seine Seiten der Reihe nach durch die Eckpunkte des andern gehn. Ein Polygon heißt einer Kurve eingeschrieben, wenn seine Eckpunkte auf der Kurve liegen; umgeschrieben, wenn seine Seiten Tangenten der Kurve sind. Überhaupt, wenn eine Figur einer andern eingeschrieben ist, so ist die andere der erstern umgeschrieben, und umgekehrt (Eucl. IV).

Ein Winkel, der einem Kreise eingeschrieben ist, d. h. dessen Scheitel auf dem Kreise liegt, heißt ein **Peripheriewinkel**, der auf dem Bogen steht, welchen er einschließt. Seine Schenkel sind Sehnen, von denen eine ein Diameter, oder verschwindend klein d. h. Tangente des Kreises sein kann. Ein Winkel ist dem Kreise umgeschrieben, wenn seine beiden Schenkel den Kreis berühren.



2. Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte des Centriwinkels auf dem eingeschlossenen Bogen.**) Z. B. $ASB = \frac{1}{2}AMB$, $ASC = \frac{1}{2}AMC$, $ASD = \frac{1}{2}AMD$, $AST = \frac{1}{2}AMS$, wenn SC ein Diameter, ST eine Tangente des Kreises ist.

Beweis. $ASC = \frac{1}{2}AMC$, weil das Dreieck SAM gleichschenkelig ist (§. 3, 1). Ebenso ist $BSC = \frac{1}{2}BMC$, $CSD = \frac{1}{2}CMD$. Ferner ist $CST = \frac{1}{2}CMS$, weil die Tangente normal zum Radius des Berührungspunktes (§. 3, 5). Daher ist

$$ASC - BSC = \tfrac{1}{2}(AMC - BMC), \quad ASB = \tfrac{1}{2}AMB$$
$$ASC + CSD = \tfrac{1}{2}(AMC + CMD), \quad ASD = \tfrac{1}{2}AMD$$
$$ASC + CST = \tfrac{1}{2}(AMC + CMS), \quad AST = \tfrac{1}{2}AMS$$

*) Plücker, Crelle J. 11 p. 222. Miquel Liouville J. 9 p. 24 Möbius Kreisverw. 47.

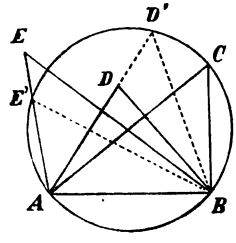
**) Eucl. III. 20.

wobei die durch je 3 Buchstaben bezeichneten Winkel einerlei Sinnes sind (§. 1, 5).

Anmerkung. Ein Peripheriewinkel ist spitz, recht, stumpf, je nachdem der eingeschlossene Bogen kleiner, ebenso groß, größer ist als ein Halbkreis. Zwei Peripheriewinkel sind komplementär oder supplementär, je nachdem die von ihnen eingeschlossenen Bogen zu einem Halbkreis oder zu einem Kreis sich ergänzen.

3. Alle Peripheriewinkel auf demselben Bogen oder auf gleichen Bogen eines Kreises sind einander gleich, weil sie Hälften desselben Centriwinkels oder gleicher Centriwinkel sind (§. 1, 6). Aus allen Punkten eines Kreisbogens hat die Sehne desselben gleiche scheinbare Größe.

Umgekehrt: die Spitzen der Dreiecke auf einer gemeinschaftlichen Basis, welche gleiche Winkel an den Spitzen haben, oder gleiche Summen der Winkel an der Basis, oder gleiche Differenz zwischen dem Winkel an der Spitze und der Summe der Winkel an der Basis, liegen auf dem Kreisbogen, der mit der Basis ein Segment bildet, dessen Winkel das Supplement der Winkel an den Spitzen ist. Wenn die Winkel ACB, ADB, AEB einander gleich sind, so liegen B, C, D, E, A auf einem Kreisbogen. Läge D in dem Segment $ABCD'$ auf der Geraden AD', so wäre der Winkel $ADB > AD'B$ oder ACB (§. 2, 8). Läge E außer dem Segment $ABCE'$, auf der Geraden AE', so wäre der Winkel $AEB < AE'B$ oder ACB. Wenn $CBA + BAC$ oder $CBA + BAC - ACB$ unverändert bleibt, so bleibt ACB unverändert, folglich u. s. w.

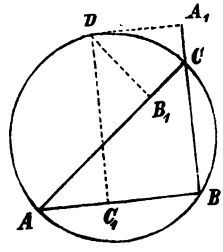


Wenn die 4 Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen, so hat die Winkeldifferenz $ACB - ADB$ den Wert 0 oder 180^0, je nachdem C und D auf einer Seite der Geraden AB liegen oder nicht. Also kann überhaupt $2(ACB - ADB) = 0$ gesetzt werden (§. 2, 4). Wenn dagegen D nicht auf dem Kreise liegt, der durch A, B, C geht, so ist $2(ACB - ADB)$ von 0 verschieden. Unter der Bedingung $2(ACB - ADB) = 0$ liegen demnach die Punkte A, B, C, D auf einem Kreise in unbestimmter Ordnung.*)

Wenn die Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen, und die Normalen DA_1, DB_1, DC_1 auf die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC gefällt werden, so liegen die Fußpunkte A_1, B_1, C_1 auf

*) Möbius Kreisverw. 8.

einer Geraden.*) Da A_1, C, B_1, D und A_1, B, C_1, D je auf einem Kreiſe liegen, ſo hat man $2DA_1B_1 = 2DCB_1 = 2DCA = 2DBA = 2DBC_1 = 2DA_1C_1$. Alſo iſt $2DA_1B_1 = 2DA_1C_1$ d. h. A_1, B_1, C_1 liegen auf einer Geraden. Die Kreiſe, deren Diameter DA, DB, DC ſind, ſchneiden einander in A_1, B_1, C_1 auf einer Geraden.



4. Bei einem dem Kreiſe eingeſchriebenen Viereck iſt die Summe des 1ten und 3ten Winkels gleich der Summe des 2ten und 4ten Winkels. Iſt M das Centrum des dem Viereck $ABCD$ umgeſchriebenen Kreiſes, ſo iſt $BAM = MBA$, $CBM = MCB$, u. ſ. f., daher für alle beſondern Lagen des Punktes D

$$BAM+MAD+DCM+MCB = CBM+MBA+ADM+MDC,$$
$$BAD + DCB = CBA + ADC.$$

Ebenſo**) iſt bei einem dem Kreiſe eingeſchriebenen Sechseck die Summe des 1ten, 3ten, 5ten Winkels gleich der Summe des 2ten, 4ten, 6ten Winkels u. ſ. w. Um den entſprechenden Satz für ein dem Kreiſe eingeſchriebenes Fünfeck aufzuſtellen, betrachte man dasſelbe als ein eingeſchriebenes Sechseck, deſſen 6ter Eckpunkt mit dem 1ten zuſammenfällt, ſo daß die letzte Seite den Kreis in dem erſten Eckpunkte berührt (§. 3, 5).

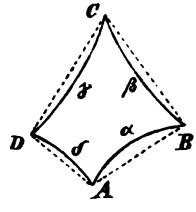
Wenn einem Kreiſe das Viereck $ABCD$ eingeſchrieben iſt, deſſen Seiten Bogen von beliebigen Kreiſen ſind, ſo iſt die Summe von zwei nichtfolgenden Winkeln der Summe der beiden andern gleich.***) Man hat

$$\begin{aligned}&\beta B\alpha + \delta D\gamma - (\alpha A\delta + \gamma C\beta)\\ &= CB\beta + \beta B\alpha + \alpha BA + AD\delta + \delta D\gamma + \gamma DC\\ &\quad - (BA\alpha + \alpha A\delta + \delta AD + DC\gamma + \gamma C\beta + \beta CB)\\ &= CBA + ADC - (ABD + DCB)\end{aligned}$$

weil die Kreisbogen mit ihren Sehnen beiderſeits gleiche Winkel bilden (§. 3, 6). Nun iſt $CBA+DCB+ADC+BAD = 360^0$ oder 0, folglich

$$\begin{aligned}&\beta B\alpha + \delta D\gamma - (\alpha A\delta + \gamma C\beta)\\ &= 2(CBA + ADC) = 2(CBA - CDA).\end{aligned}$$

Dieſe Differenz iſt null oder nicht null, je nachdem A, B, C, D auf einem Kreiſe liegen oder nicht (3).



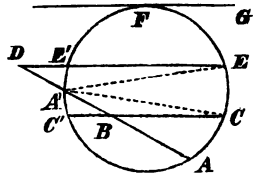
*) Dieſer Satz wird R. Simſon zugeſchrieben von Servois Gerg. Ann. 4 p. 250. Vergl. Gerg. Ann. 14 p. 28 und 280, Poncelet propr. proj. 468.

**) Carnot géom. de pos. 304.

***) Lexell Acta Petrop. 1782. I. p. 58 hat dieſen Satz an dem ſphäriſchen Viereck bemerkt. Vergl. Guénau d'Aumont Gerg. Ann. 12 p. 279. Miquel Liouv. J. 10 p. 347.

Umgekehrt schließt man: Wenn in einem von Bogen beliebiger Kreise gebildeten Viereck die Summe von zwei nichtfolgenden Winkeln der Summe der beiden andern gleich ist, so ist das Viereck einem Kreise eingeschrieben.

5. Ein Winkel, dessen Scheitel von einem Kreise eingeschlossen ist, ist die halbe Summe der Centriwinkel auf den Bogen, welche der Winkel und sein Scheitelwinkel einschließen. Ein Winkel, dessen Scheitel von dem Kreise ausgeschlossen ist, ist die halbe Differenz der Centriwinkel, auf den von dem Winkel eingeschlossenen Bogen.*) Die zwischen parallelen Sehnen enthaltenen Bogen des Kreises sind einander gleich. Wenn eine Tangente und eine Sehne des Kreises parallel sind, so ist der Berührungspunkt die Mitte des eingeschlossenen Bogens.



Beweis. Der Winkel ABC ist ein Außenwinkel des Dreiecks $A'BC$, folglich $ABC = BA'C + A'CB$ (§. 2, 8) oder $ABC = AA'C + A'CC'$.

Der Winkel ADE ist ein Winkel des Dreiecks $A'DE$, folglich $ADE = AA'E - DEA'$ oder $AA'E - E'EA'$.

Wenn die Sehnen CC', EE' parallel sind, so bilden sie mit der Sehne $E'C$ gleiche oder um 180^0 verschiedene Winkel, und die auf den Bogen CE und $E'C'$ stehenden Centriwinkel sind gleich; gleiche Centriwinkel schließen gleiche Bogen ein.

Die von den parallelen Sehnen CC', EE' eingeschlossenen Bogen bleiben einander gleich, während E mit E' in F zusammenfällt und EE' zur Tangente FG wird. In der That ist der Radius des Punktes F normal nicht nur zu FG, sondern auch zu CC', und halbiert den Winkel an der Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks, welches C, C' und das Centrum des Kreises bestimmen. Ein Centriwinkel und sein Bogen werden durch dieselbe Gerade halbiert.

6. Ein durch seinen Anfangspunkt und seinen Endpunkt (in dieser Ordnung) bezeichneter Kreisbogen läßt 2 sich ausschließende Deutungen zu, so lange nicht der Sinn gegeben ist, in welchem der Kreis durchlaufen werden soll. Bei der Bezeichnung von allen gleichzeitig in Betracht kommenden Bogen wird vorausgesetzt, daß der Kreis in demselben Sinne durchlaufen werde, übereinstimmend mit dem Sinne der Drehung, der bei der Bezeichnung der Centriwinkel, welche auf den Bogen stehn, angenommen wird (§. 1, 5).

*) Diese Sätze werden von Vitello Opt. I, 55 nach Alhazen mitgeteilt.

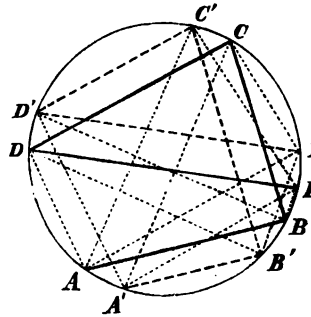
Zwei Bogen, deren Anfangspunkte vereint sind und deren Differenz eine Peripherie ist, haben dieselben Endpunkte; bezeichnet man einen Wert des Bogens AB durch a, den Wert der Peripherie durch p, so sind auch $a + p$, $a + 2p$, . ., $a + kp$ Werte des Bogens AB, wobei k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet (§. 2, 4). Daher ist

$$AB + BA = 0$$

oder eine beliebige positive oder negative ganze Anzahl von Peripherien; und für jede Lage der Punkte A, B, C auf dem Kreise hat man

$$AB + BC = AC$$

Wenn zwei Sehnen parallel sind, so ist der Bogen vom Anfang der ersten zum Anfang der zweiten dem Bogen gleich, der vom Ende der zweiten zum Ende der ersten Sehne sich erstreckt (5). Sind die Sehnen AB, $A'B'$ parallel, so sind die Bogen AA', $B'B$ oder AB', $A'B$ einander gleich.



Umgekehrt schließt man aus der Gleichheit der Bogen AA', $B'B$, daß die vom Anfang des einen nach dem Ende des andern Bogens gehenden Sehnen AB, $A'B'$ parallel sind.

Zieht man willkürlich die parallelen Sehnen AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CD und $C'D'$, DE und $D'E'$, . . , so sind die Bogen AA', $B'B$, CC', $D'D$, EE', . . einander gleich. Folglich sind die Sehnen

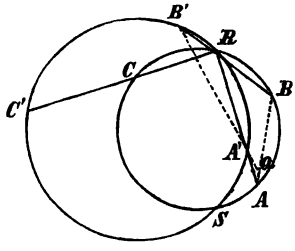
$C'A$ und CA', $D'A'$ und DA, $E'A$ und EA', . . .
$D'B$ und DB', $E'B'$ und EB, . . .
$E'C$ und EC', . . .

parallel.

Die Sehnen AB, BC, CA' bilden mit den parallelen Sehnen $A'B'$, $B'C'$, $C'A$ ein dem Kreise eingeschriebenes Sechseck. Die Sehnen AB, BC, CD, DA bilden mit den parallelen Sehnen $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ zwei dem Kreise eingeschriebene Vierecke. Die Sehnen AB, BC, CD, DE, EA' bilden mit den parallelen Sehnen $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'A$ ein dem Kreise eingeschriebenes Zehneck u. s. w. Überhaupt sind bei einem dem Kreise eingeschriebenen $(4n + 2)$eck die letzte und die $(2n + 1)$te Seite parallel, wenn die auf die $(2n + 1)$te folgenden Seiten der Reihe nach mit den ersten $2n$ Seiten parallel sind. Bei zwei dem Kreise eingeschriebenen $2n$ecken sind die letzten Seiten parallel, wenn die ersten $2n - 1$ Seiten des einen Polygons mit

den ersten $2n - 1$ Seiten des andern Polygons der Reihe nach parallel sind.*)

7. Wenn zwei Kreise sich in R und S schneiden, und durch R Gerade gezogen werden, die den einen Kreis in $A, B, C, \ldots$, den andern in $A', B', C', \ldots$ schneiden, so haben die in einerlei Sinn genommenen Bogen SA und SA', SB und $SB', \ldots$, AB und $A'B', \ldots$ gleiche Centriwinkel. Die Dreiecke SAB und $SA'B'$, SAC und $SA'C', \ldots$ haben der Reihe nach gleiche Winkel; die Winkel ASA', $BSB', \ldots$, $AB \wedge A'B'$, $AC \wedge A'C'$, $BC \wedge B'C', \ldots$ sind einander gleich und gleich dem Winkel der beiden Kreise.**)



Beweis. Weil R, A, A' auf einer Geraden liegen, so ist (§. 2, 4) $2SRA = 2SRA'$. Es sind aber $2SRA$, $2SRA'$ den Centriwinkeln gleich, die auf den Bogen SA, SA', stehn. Also stehn auf den Bogen SA und SA', SB und $SB', \ldots$, AB und $A'B', \ldots$ gleiche Centriwinkel. Die Punkte $S, A, B, C, \ldots$ liegen auf dem einen Kreise in derselben Reihenfolge, wie die Punkte $S, A', B', C', \ldots$ auf dem andern Kreise; folglich sind die Peripheriewinkel ASB und $A'SB'$, BAS und $B'A'S$, SBA und $SB'A'$ gleich. Ferner ist $ASB + BSA' = BSA' + A'SB'$, d. h. $ASA' = BSB'$, u. s. w. Endlich, weil $BAS = B'A'S$, so ist $AB \wedge A'B' + A'B' \wedge AS = A'B' \wedge AS + AS \wedge A'S$, d. h. $AB \wedge A'B' = ASA'$, u. s. w. Der Winkel ASA' ist aber der Winkel der beiden Kreise, wenn der Bogen SA und damit der Bogen SA' verschwindet (§. 3, 6).

Anmerkung. Der Durchschnitt der Geraden AB und $A'B'$ werde durch Q bezeichnet; nun ist $2AQA' = 2ASA'$, $2BQB' = 2BSB'$, folglich liegt S auf den Kreisen AQA', BQB' (3), und man schließt***):

Wenn zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks AB, $A'B'$ in Q, die beiden andern BB', $A'A$ in R sich schneiden, so gehn die Kreise ABR, $BB'Q$, $B'A'R$, $A'AQ$ durch einen Punkt S.

8. Die Tangenten an Gegenpunkten eines Kreises sind parallel, weil sie normal zu dem Diameter sind, der die Berührungspunkte verbindet (§. 3, 5. §. 2, 7).

Die Tangenten an den Endpunkten einer Sehne bilden mit der

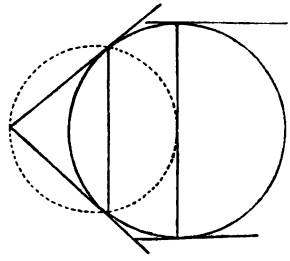
*) Möbius Crelle J. 36 p. 216. Vergl. Crelle J. 6 p. 310. Den Satz vom Sechseck, einen besondern Fall des Pascalschen Theorems (Trigon. §. 7), hatte Gergonne betrachtet Ann. 4 p. 78.

**) Vergl. die von Möbius Statik 118 angestellten Betrachtungen.

***) Steiner in Gergonnes Ann. 18 p. 302.

Sehne ein gleichschenkeliges Dreieck, weil sie mit ihr gleiche spitze Winkel einschließen (§. 3, 6. 1).

Durch jeden von dem Kreise ausgeschlossenen Punkt gehn 2 Tangenten des Kreises. Die Berührungspunkte liegen auf dem Kreise, von welchem der gegebene Punkt und das Centrum des gegebenen Kreises Gegenpunkte sind, weil diese Punkte mit einem der gesuchten Berührungspunkte ein rechtwinkeliges Dreieck bilden (3). Die Berührungspunkte haben von dem gegebenen Punkt gleiche Abstände.

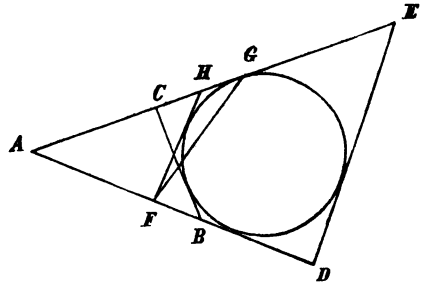


9. Die Dreiecke, welche einen Winkel gemein haben und demselben Kreise umgeschrieben sind, haben, wenn sie den Kreis ausschließen, dieselbe Summe der Seiten; wenn sie den Kreis einschließen, so haben sie dieselbe Differenz zwischen der Summe der den gemeinschaftlichen Winkel einschließenden Seiten und der dritten Seite.*)

Beweis. Bezeichnet man die Tangenten, welche von $A, B, C, \ldots$ bis an den Kreis reichen, der Reihe nach durch $a, b, c, \ldots$, so hat man

$$CA + AB + BC = a - c + a - b + b + c = 2a$$
$$EA + AD - DE = e + a + a + d - (d + e) = 2a$$

Umgekehrt schließt man: Die Dreiecke, welche einen Winkel gemein haben und gleiche Summe der Seiten, oder gleiche Differenz zwischen der Summe der den gemeinschaftlichen Winkel einschließenden Seiten und der dritten Seite, sind demselben Kreise umgeschrieben. Wenn FG nicht, wohl aber FH eine Tangente des von AB, BC, CA berührten Kreises ist, so ist $FG + GH > FH$ (§. 3, 2), also $GA + AF + FG > HA + AF + FH$. Nun ist $HA + AF + FH = CA + AB + BC$, folglich $GA + AF + FG > CA + AB + BC$, u. s. w.



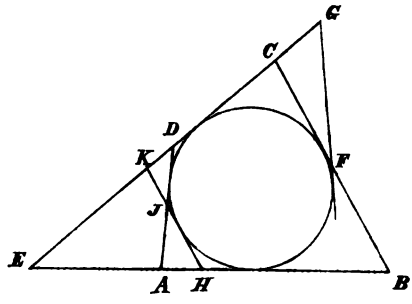
10. Bei einem dem Kreise umgeschriebenen Viereck ist die Summe von zwei nichtfolgenden Seiten der Summe der beiden andern Seiten gleich.**) Wenn das Viereck den Kreis nicht einschließt, so nimmt man

*) Der entsprechende Satz der Sphärik ist dem Lexellschen Satze zugeordnet. Stereom. §. 4, 13.

**) Diese Eigenschaft der einem Kreise umgeschriebenen Vierecke und die ähnliche Eigenschaft der Sechsecke, u. s. f. ist von Pitot Mém. de Paris 1725 p. 45 ange-

die Seiten mit den entgegengesetzten Zeichen, in bezug auf welche der Kreis die entgegengesetzte Lage hat.

Beweis. Nach der in (9) angenommenen Bezeichnung ist in dem Viereck $ABCD$ sowohl $AB + CD$, als auch $BC + DA = a + b + c + d$.



Ebenso ist in dem Viereck $EBFG$ sowohl $EB + FG$ als auch $BF + GE = e + b + g - f$.

Dagegen ist in dem Viereck $EHJD$ sowohl $EH - JD$ als auch $-HJ + DE = e - h - i - d$, während der Kreis in bezug auf die Seiten EH, DE (d. h. in bezug auf einen diese Seiten zurücklegenden Zuschauer) links, in bezug auf die Seiten HJ, JD rechts liegt. Ebenso ist in dem Viereck $EAJK$

$$EA - JK = -AJ + KE,$$

und in dem Viereck $AHKD$

$$AH - KD = -HK + DA.$$

Umgekehrt schließt man: Wenn in einem Viereck die Summe von zwei Seiten der Summe der beiden andern Seiten gleich ist, so ist das Viereck einem Kreise umgeschrieben. Es sei z. B. $EA + AJ = JK + KE$, oder $EA - JK = -AJ + KE$, so berührt KE den Kreis, welcher in bezug auf seine Tangenten AE (nicht EA), JK, AJ einerlei Lage hat, und der in der obigen Figur für dieselben rechts liegt. Würde AE von der durch K gehenden Tangente des erwähnten Kreises in E' geschnitten, so wäre $JK + KE' = E'A + AJ$, KE verschieden von $KE' \pm E'E$ (§. 3, 2), also $JK + KE$ verschieden von $JK + KE' \pm E'E$, also auch $JK + KE$ verschieden von $E'A + AJ \pm E'E$ und von $EA + AJ$, wider die Voraussetzung.

§. 5. Von den gleichen und ähnlichen Dreiecken.

1. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich*), d. h. es sind die Seiten der Dreiecke einander gleich, die den gleichen

geben worden. Auf die notwendige Modifikation derselben hat zuerst Steiner Crelle J. 32 p. 305 hingewiesen.

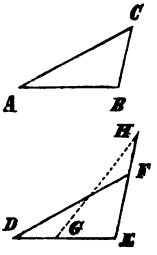
*) Dieser Ausdruck ist von Euclides erst in der Stereometrie (Elem. XI) gebraucht worden. Nach Legendre (Élém. de géom. Note 1) braucht man auch gleich in der Bedeutung von gleich und ähnlich.

Winkeln gegenüber liegen; es sind die Winkel gleich, die den gleichen Seiten gegenüber liegen; es sind die Flächen gleich. Eucl. I, 4.

Wenn die Seiten $AB = DE$, $BC = EF$, und der Winkel $CBA = FED$, so sind

$CA = FD$ gegenüber den gleichen Winkeln CBA und FED,
$ACB = DFE$ " " " Seiten AB " DE,
$BAC = EDF$ " " " " BC " EF,

und die Dreiecke ABC, DEF haben gleiche Flächen.



Beweis. Vereint man die gleichen Winkel, so daß BA auf ED, BC auf EF fällt, so fällt A auf D, C auf F, die Gerade CA auf FD (§. 1, 3), die Ebene ABC auf DEF (§. 1, 4). Die kongruenten Seiten, Winkel, Flächen sind einander gleich.

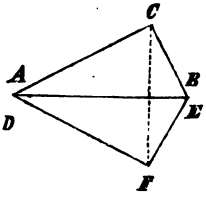
Anmerkung. Dreiecke, welche gleich und ähnlich sind, sind kongruent und werden dadurch vereint, daß man das eine entweder in seiner Ebene dreht und fortbewegt, oder erst im Raume umwendet und dann in seiner Ebene dreht und fortbewegt. Z. B. das Dreieck ABC kann in seiner Ebene so fortbewegt werden, daß es das Dreieck DEF deckt; dagegen muß das Dreieck ABC im Raume umgewendet werden, bevor es das Dreieck HEG decken kann, in welchem $HE = AB$, $EG = BC$ und der Winkel $HEG = CBA$ ist. Raumfiguren, welche gleich und ähnlich sind, sind entweder kongruent oder inkongruent.

Daß die Dreiecke ABC und DEF gleich und ähnlich sind, wird nach Leibniz (Opp. 3 p. 416) durch $ABC \backsimeq DEF$ bezeichnet. Das Zeichen über dem Gleichheitszeichen ist aus dem Anfangsbuchstaben von similis gebildet.

2. Wenn zwei Dreiecke die drei Seiten der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich. Eucl. I, 8.

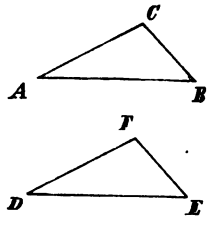
Wenn die Seiten $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$, so ist der Winkel $ACB = DFE$ gegenüber den gleichen Seiten AB und DE, u. s. w.

Beweis. Vereint man die gleichen Seiten AB und DE, so daß C und F auf verschiedene Seiten der gemeinschaftlichen Geraden fallen, so ist in den Dreiecken ACF, BCF der Winkel
$ACF = CFA$ gegenüber den gleichen Seiten AF, AC
$FCB = BFC$ " " " " BF, BC
(§. 3, 1), folglich $ACF + FCB = CFA + BFC$, d. i. $ACB = BFA$. Die Gleichung dieser Winkel in Verbindung mit den Gleichungen der Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, lehrt, daß die Dreiecke gleich und ähnlich sind (1).



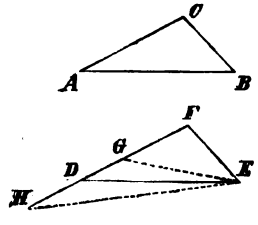
3. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel und eine dazu gleichliegende Seite der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich. Eucl. I, 26.

Wenn die Winkel BAC, CBA und die an ihnen liegende Seite AB der Reihe nach EDF, FED und der an ihnen liegenden Seite DE gleich sind, so ist die Seite $CA = FD$ gegenüber den gleichen Winkeln CBA und FED, u. s. w. Vereint man die gleichen Seiten AB, DE und die gleichen Winkel BAC, EDF, so fällt der Punkt C auf F; wo nicht, so wären die Winkel CBA, FED ungleich. Also ist die Seite $CA = FD$, u. s. w.



Wenn die Winkel BAC, CBA und die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite BC der Reihe nach EDF, FED, EF gleich sind, so sind auch die den gleichen Winkeln CBA und FED gegenüberliegenden Seiten CA und FD einander gleich, u. s. w. Vereint man die Seite BC mit EF und den Winkel CBA mit FED, so fällt CA auf FD: sonst wären in dem von CA und FD auf ED gebildeten Dreieck ein Winkel und der Nebenwinkel eines andern ungleich (§. 2, 8), mithin BAC und EDF ungleich, gegen die Voraussetzung. Die Gleichheit der dritten Winkel ACB und DFE kann auch daraus geschlossen werden, daß in beiden Dreiecken die Summen der Winkel übereinstimmen.

4. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten und den der größern Seite gegenüberliegenden Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich.



Wenn $AB > BC$, $AB = DE$, $BC = EF$, $ACB = DFE$, so ist $CA = FD$, u. s. w.

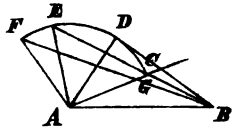
Beweis. Vereint man die gleichen Winkel und die gleichen Seiten BC, EF, so kann der Punkt A nicht neben D fallen. Fiele A auf G, so wäre der Winkel $DFE < DGE$ (§. 2, 8), $DGE = EDG$ (§. 3, 1), also $DFE < EDF$, mithin $DE < EF$ gegen die Voraussetzung $AB > BC$. Fiele A auf H, so wäre der Winkel $DFE < HDE$, $HDE = EHD$, folglich $HFE > EHF$, mithin $HE < EF$, gegen die Voraussetzung. Also muß A auf D fallen.

Anmerkung. Wenn insbesondere zwei rechtwinkelige Dreiecke die Hypotenuse und eine Kathete der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich; denn die Hypotenuse ist größer als eine Kathete (§. 3, 1), und den Hypotenusen liegen gleiche (rechte) Winkel gegenüber.

Ein Dreieck ist unzweideutig bestimmt durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel, durch die 3 Seiten, durch 2 Winkel und die Seite, welche an den beiden Winkeln liegt oder einem von ihnen gegenüber liegt, durch 2 Seiten und den Winkel, der der größern gegenüber liegt. Zwei Dreiecke können ungleich sein, obgleich sie zwei Seiten und den der kleinern Seite gegenüberliegenden Winkel der Reihe nach gleich haben.

5. Wenn in einem Dreieck zwei Seiten unverändert bleiben, während der von ihnen eingeschlossene Winkel wächst, so wächst auch die demselben gegenüberliegende Seite. Eucl. I, 24.

Sind die Strecken AD, AE, AF so lang als AC, die Winkel BAD, BAE, BAF größer als BAC, so sind die Strecken BD, BE, BF länger als BC.

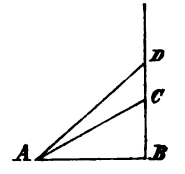


Beweis. Die Strecke AC wird von BD außen, von BE in C, von BF innen in G geschnitten. Dann ist

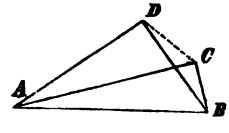
$BC+AC<BD+AD$ (§. 3, 2), folglich $BC<BD$;
BC ein Teil von BE, folglich $BC<BE$;
$BC<BG+GC$, $AF<GF+AG$, folglich
$BC+AF<BF+AC$, $BC<BF$.

Wenn C den Halbkreis $C'C''$ durchläuft, und B auf dem Diameter $C'C''$ ruht, so verändert sich BC entweder wachsend oder abnehmend von BC' bis BC''. Eucl. III, 7. Umgekehrt schließt man: Wenn in einem Dreieck zwei Seiten unverändert bleiben und die dritte Seite wächst, so wächst auch der ihr gegenüberliegende Winkel.

6. I. Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck eine Kathete unverändert bleibt, und ein anliegender Winkel wächst, so wächst sowohl die andere Kathete als auch die Hypotenuse. Die rechtwinkeligen Dreiecke ABC, ABD haben die Kathete AB gemein, den Winkel $BAD>BAC$. Dann ist $BD>BC$, und $AD>AC$ gegenüber dem stumpfen Winkel DCA des Dreiecks ACD.



II. Wenn die Hypotenuse unverändert bleibt und ein anliegender Winkel wächst, so wächst die ihm gegenüberliegende Kathete und die andere Kathete nimmt ab. Die rechtwinkeligen Dreiecke ABC, ABD haben die Hypotenuse AB gemein, den Winkel $BAD>BAC$. Dann ist der Winkel $DBA<CBA$, weil der Punkt C nicht auf die Seite BD oder in das

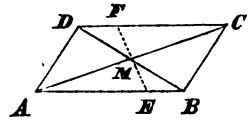


Dreieck ABD fallen kann, ohne daß der Winkel $ACB > ADB$ wäre (§. 2, 8). Die Winkel DCB und ADC sind stumpf, weil größer als ACB und ADB. Daher ist sowohl $DB > BC$, als auch $AD < AC$.

§. 6. Die besonderen Vierecke.

1. Ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm (παραλληλόγραμμον). Das Parallelogramm wird von einer Diagonale in zwei gleiche und ähnliche Dreiecke geteilt, von denen eines das andere ohne vorherige Umwendung deckt. Die gegenüberliegenden Seiten sind gleich. Die Diagonalen halbieren einander. Ihr Durchschnittspunkt heißt das Centrum des Parallelogramms; eine durch das Centrum gezogene Gerade schneidet die gegenüberliegenden Seiten in Gegenpunkten; die zwischen Gegenpunkten enthaltene Strecke ist ein Diameter des Parallelogramms, weil sie das Parallelogramm in zwei gleiche und ähnliche Teile zerschneidet, von denen einer den andern ohne Umwendung deckt. Die Mitten aller Diameter sind im Centrum des Parallelogramms vereint. Eucl. I, 34.

Beweis. Die Dreiecke ABC, CDA sind gleich und ähnlich (§. 5, 3), weil die Seite $CA = AC$ und die Winkel $BAC = DCA$, $ACB = CAD$ als Wechselwinkel der Parallelen mit AC (§. 2, 7). Vereint man die gleichen Winkel BAC und DCA, so decken sich die Dreiecke ABC und CDA. Die gegenüberliegenden Seiten AB und CD, BC und DA sind einander gleich, gegenüber den gleichen Winkeln der Dreiecke.

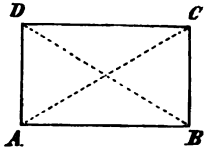


Ferner sind die Dreiecke ABM, CDM gleich und ähnlich (§. 5, 3), weil die Seite $AB = CD$ und die Winkel $BAM = DCM$, $MBA = MDC$ als Wechselwinkel der Parallelen mit AC und BD; also sind $BM = MD$, $AM = MC$, gegenüber den gleichen Winkeln der Dreiecke.

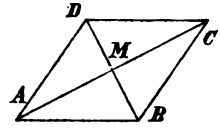
Endlich sind die Dreiecke AEM, CFM gleich und ähnlich (§. 5. 3), weil die Seite $AM = CM$ u. s. w., daher $AE = CF$, $EM = MF$. Die Vierecke $EBCF$, $FDAE$ decken sich, wenn man eines derselben in seiner Ebene um M gedreht hat, bis EF mit FE zusammenfällt.

2. Je zwei aufeinander folgende Winkel des Parallelogramms sind supplementär, je zwei gegenüberliegende Winkel sind einander gleich (§. 2, 7). Ist ein Winkel recht, so sind auch die übrigen Winkel recht, und das Parallelogramm heißt ein Rektangel (ὀρθογώνιον, rectangulum, oblongum). Die Diagonale der spitzen Winkel ist größer

als die Diagonale der stumpfen Winkel; die Diagonalen des Rektangels sind einander gleich. Denn in den Dreiecken ABC, BAD ist $BC = AD$, folglich AC größer, ebenso groß, kleiner als BD, je nachdem der Winkel CBA größer, ebenso groß, kleiner als BAD (§. 5, 5).



Wenn zwei folgende Seiten eines Parallelogramms gleich sind, so ist das Parallelogramm gleichseitig (1) und wird ein Rhombus (ῥόμβος, losange, Raute) genannt. Der rechtwinkelige Rhombus ist ein reguläres Viereck (§. 1, 8) und heißt ein Quadrat (τετράγωνον, quadratum). Eine Diagonale des Parallelogramms bildet mit den größeren Seiten die kleineren Winkel, auf den größeren Seiten stehen die größeren Winkel am Centrum; die Diagonalen des Rhombus halbieren die Winkel des Rhombus und sind normal zu einander. Wenn die Seite BC größer, ebenso groß, kleiner ist als die Seite AB, so ist der Winkel BAC größer, ebenso groß, kleiner als ACB oder CAD (§. 3, 1), und der Winkel BMC größer, ebenso groß, kleiner als AMB (§. 5, 5).



3. Wenn in einem Viereck, dessen Perimeter sich selbst nicht schneidet, ein Paar gegenüberliegende Seiten parallel und gleich sind, oder wenn die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind, oder wenn die Diagonalen einander halbieren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis. Wenn AB und CD parallel und gleich, mithin die Winkel BAC und DCA einander gleich sind, so sind die Dreiecke ABC, CDA gleich und ähnlich (§. 5, 1), d. h. der Winkel $ACB = CAD$, gegenüber den gleichen Seiten AB, CD. Die Geraden BC, DA, welche mit AC gleiche Wechselwinkel bilden, sind parallel (§. 2, 7).

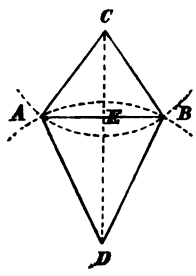
Wenn $AB = CD$, $BC = DA$, so sind die Dreiecke ABC, CDA gleich und ähnlich (§. 5, 2). Aus der Gleichheit der Winkel BAC, DCA schließt man, daß AB und CD parallel sind, u. s. w.

Wenn $AM = MC$, $BM = MD$, so sind die Dreiecke ABM, CDM gleich und ähnlich (§. 5, 1). Aus der Gleichheit der Winkel BAM, DCM schließt man, daß AB und CD parallel sind, u. s. w.

4. Die Gerade, welche die Spitzen von zwei gleichschenkeligen Dreiecken auf einer gemeinschaftlichen Basis verbindet, halbiert die Winkel an den Spitzen, halbiert die gemeinschaftliche Basis und ist normal zu derselben.

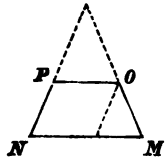
Wenn $AC = BC$, $AD = BD$, so ist der Winkel $ACD = DCB$,

$CDA = BDC$, und AB wird von CD in E so geschnitten, daß $AE = EB$, $CEA = 90^0$.



Beweis. In den Dreiecken ACD, BCD ist $CA = BC$, $AD = DB$, $CD = CD$, folglich (§. 5, 2) $ACD = DCB$ gegenüber den gleichen Seiten AD und DB, $CDA = BDC$ gegenüber den gleichen Seiten CA und BC. In den Dreiecken AEC, BEC ist $EC = EC$, $CA = CB$, der Winkel $ACE = ECB$, folglich (§. 5, 1) $AE = EB$ gegenüber den gleichen Winkeln ACE und ECB, der Winkel $CEA = BEC$ gegenüber den gleichen Seiten CA und BC. Die gleichen Nebenwinkel CEA und BEC sind rechte Winkel (§. 2, 2).

Anmerkung. Das Viereck $ACBD$, in dem zweimal zwei folgende Seiten gleich sind, verdient den Namen Rhomboid (ῥομβοειδές), durch welchen sonst ein Parallelogramm bezeichnet wird, das weder gleichwinkelig noch gleichseitig ist.



Das Viereck $NMOP$, in dem zwei nichtfolgende Seiten parallel (nicht gleich), die beiden andern gleich (nicht parallel) sind, verdient den Namen Trapez (τραπέζιον), durch den sonst ein Viereck bezeichnet wird, wenn es kein Parallelogramm ist, oder wenn es ein Paar parallele Seiten hat. Dieses Viereck wird auch Antiparallelogramm genannt.

Rhomboid und Trapez decken sich selbst nach vorheriger Umwendung im Raume und gehören zur Klasse der symmetrischen Figuren (§. 7, 7).

5. Der vorstehende Satz lehrt die Konstruktion der Halbierenden eines Winkels, der Mitte einer Strecke, der Normale einer Geraden. Eucl. I, 9 ff.

a. Um den Winkel ACB zu halbieren, schneidet man von ihm ein gleichschenkeliges Dreieck ab, dessen Basis AB dem gegebenen Winkel gegenüber liegt. Auf dieselbe Basis stellt man ein anderes gleichschenkeliges Dreieck ABD und zieht die Gerade CD durch die Spitzen. Die Halbierenden von Nebenwinkeln sind normal zu einander.

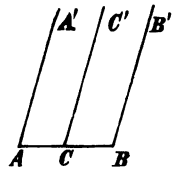
Die Halbierende eines Centriwinkels trifft die Mitte des eingeschlossenen Bogens.

b. Um die Strecke AB zu halbieren, stellt man auf dieselbe zwei gleichschenkelige Dreiecke ABC, ABD, und zieht die Gerade CD durch die Spitzen.

Um den Streifen $A'ABB'$ zu halbieren, konstruiert man die Mitte

C der Strecke AB, und zieht die Gerade CC' parallel mit AA'. Dann sind die Streifen $A'ACC'$, $C'CBB'$ kongruent (§. 2, 7).

c. Um die Normale der Geraden AB durch E zu ziehn (errichten), wählt man A und B in gleichen Abständen von E, stellt auf AB ein gleichschenkeliges Dreieck ABC, und zieht die Gerade CE durch die Spitze.



d. Um die Normale der Geraden AB durch C zu ziehn (fällen), wählt man A und B in gleichen Abständen von C, stellt auf AB ein anderes gleichschenkeliges Dreieck ABD, und zieht die Gerade CD.

6. Im gleichschenkeligen Dreieck

ist die Halbierende des Winkels an der Spitze normal zur Basis und halbiert dieselbe,

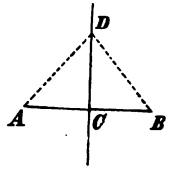
ist die Gerade von der Spitze nach der Mitte der Basis normal zur Basis und halbiert den Winkel an der Spitze,

geht die Normale der Basis aus der Mitte derselben durch die Spitze,

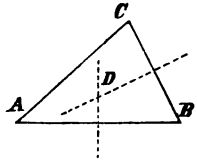
geht die Normale der Basis aus der Spitze durch die Mitte der Basis.

Beweis. Wenn $AC = CB$, der Winkel $ACE = ECB$, so ist $ACE \cong BCE$ (§. 5, 1). Wenn $AC = CB$, $AE = EB$, so ist $ACE \cong BCE$ (§. 5, 2). Eine Gerade aus der Mitte der Basis, welche nicht durch die Spitze geht, ist nicht normal zur Basis. Eine Gerade aus der Spitze, welche nicht durch die Mitte der Basis geht, ist nicht normal zur Basis.

7. Ein Punkt, der von 2 gegebenen Punkten gleiche Abstände hat, liegt auf der Geraden, welche die Strecke der gegebenen Punkte normal halbiert. Wenn $AC = CB$, so ist AD ebenso groß oder größer als BD, je nachdem Winkel DCA ebenso groß oder größer als BCD (§. 5, 1. 5). Oder: die Centren der Kreise, welche eine gemeinschaftliche Sehne haben (durch 2 gegebene Punkte gehn), liegen auf der Geraden, welche die gemeinschaftliche Sehne normal halbiert.

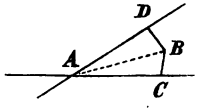


Die Geraden, welche die Seiten eines Dreiecks normal halbieren, haben einen Punkt gemein, der von den Eckpunkten gleiche Abstände hat, das Centrum des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises (Eucl. IV, 5). Wenn $AD = BD$, $BD = CD$, so ist $AD = CD$, und die Gerade, welche



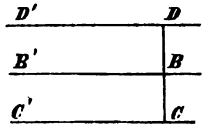
AC normal halbiert, geht durch D (6). Der Centriwinkel ADB ist zweimal so groß als der Peripheriewinkel ACB, also gleich 180^0 oder mehr als 180^0, wenn ACB recht oder stumpf ist. Ein Kreis ist durch 3 Punkte bestimmt; wenn die gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen, so ist das Centrum unendlich fern (§. 2, 7) und der Kreis unterscheidet sich nicht von der Geraden, auf der die gegebenen Punkte liegen.

8. Ein Punkt, der von 2 gegebenen Geraden gleiche Abstände hat, liegt auf den Geraden, welche die Winkel der Geraden halbieren.

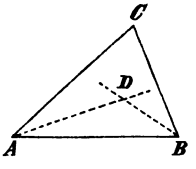


Die Normale BC ist ebenso groß oder größer als die Normale BD, je nachdem der Winkel CAB ebenso groß oder größer als BAD (§. 5, 6). Oder: Die Centren der Kreise, welche einem gegebenen Winkel eingeschrieben sind (2 Gerade berühren), liegen auf der Halbierenden des Winkels.

Wenn insbesondere die Geraden parallel sind, so liegt ein Punkt, der von ihnen gleiche Abstände hat, auf der Geraden, welche den Streifen halbiert. Die Normale BC ist ebenso groß oder größer als die Normale BD, je nachdem der Streifen $C'CBB'$ ebenso groß oder größer als der Streifen $B'BDD'$.



Die Geraden, welche die Winkel eines Dreiecks halbieren, haben einen Punkt gemein, der von den Seiten des Dreiecks gleiche Abstände hat, das Centrum des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises (Eucl. IV, 4). Wenn D auf der Halbierenden des Winkels BAC und auf der Halbierenden des Winkels CBA liegt, so hat D sowohl von CA und AB, als auch von AB und BC gleiche Abstände; also hat D von BC und CA gleiche Abstände und liegt auf der Halbierenden des Winkels ACB. Ebenso haben die Geraden, welche einen Winkel des Dreiecks und die an der gegenüberliegenden Seite liegenden Außenwinkel halbieren, je einen Punkt gemein, der von den Seiten des Dreiecks gleiche Abstände hat; diese Punkte sind die Centren der dem Dreieck im weitern Sinne eingeschriebenen Kreise. Ein Kreis ist durch 3 Gerade, die ihn berühren, 4deutig bestimmt; wenn die Geraden einen endlich oder unendlich fernen Punkt gemein haben, so fallen die berührten Kreise in den gemeinschaftlichen Punkt zusammen.

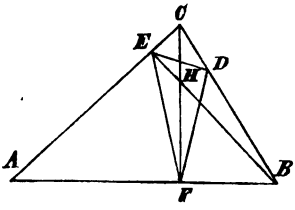


9. Die Höhen eines Dreiecks d. h. die Normalen aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten haben einen gemeinschaftlichen Punkt (Höhenpunkt). Oder: Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten normal zu einander sind, so sind auch die Diagonalen normal zu einander.*)

Beweis 1. Die Höhen BE, CF schneiden sich in H. Dann liegen B, C, E, F und A, E, F, H auf je einem Kreise (§. 4, 3), und es ist

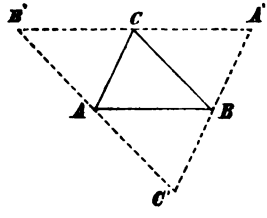
$$2\,CBA = 2\,CBF = 2\,CEF$$
$$2\,BAH = 2\,FAH = 2\,FEH$$

daher $2(CBA + BAH) = 2(CEF + FEH)$ $= 2\,CEH = 2\,CEB = 180^0$, also ist der dritte Winkel des von AB, BC, HA gebildeten Dreiecks recht. Eine durch A und nicht durch H gehende Gerade ist nicht normal zu BC.



Beweis 2. Zieht man ED und FD so, daß H von den Geraden DE, EF, FD gleiche Abstände hat (8), so haben auch A, B, C von denselben Geraden gleiche Abstände, weil AF und AE zu HF und HE normal sind. Daher liegt A auf der Geraden HD, und HD ist normal sowohl zu DB als auch zu DC, so daß D auf der Geraden BC liegt. Also ist AH normal zu BC, und eine durch A und nicht durch H gehende Gerade ist nicht normal zu BC.

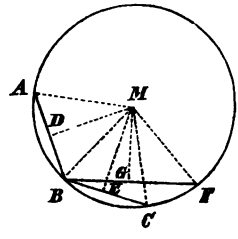
Beweis 3. Dem Dreieck ABC werde durch Gerade, die mit je einer Seite parallel sind, das Dreieck $A'B'C'$ umgeschrieben. Dann ist $A'C = BA = CB'$ (1), u. s. w. Die Höhen des Dreiecks ABC sind die Geraden, durch die die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ normal halbiert werden, und gehn durch einen Punkt, das Centrum des dem Dreieck $A'B'C'$ umgeschriebenen Kreises (7).



*) Dieser Satz kommt in dem 5ten der Archimedischen Lemmen vor, die dazu vorhandenen Scholien enthalten den ersten der hier gegebenen Beweise. Als Eigenschaft des Vierecks $ABHC$ wird derselbe Satz von Carnot géom. de pos. 130 ausgesprochen. Der zweite Beweis, dadurch bemerkenswert, daß er unabhängig ist von der Summe der Winkel eines Dreiecks und auch für das sphärische Dreieck gilt, ist von Gubermann niedere Sphärik 68 gegeben worden. Daß jeder der Punkte H, A, B, C von den Seiten des Dreiecks DEF der Fußpunkte gleiche Abstände hat, war von Feuerbach (das geradlinige Dreieck 1822 §. 24) bemerkt worden. Die Gleichheit der Kreise ABC, ABH, BCH, CAH, welche durch Vergleichung der Winkel AHB, BHC, CHA mit den Winkeln des Dreiecks ABC erkannt wird, ist bei Carnot a. a. O. erwähnt. Der dritte Beweis rührt von Gauß her und ist mitgeteilt in Schumachers Übers. von Carnot's géom. de pos. II p. 363.

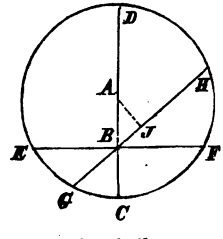
10. Gleiche Sehnen teilen auf einem Kreise gleiche Bogen ab, bilden mit dem Kreise gleiche Winkel, haben vom Centrum gleiche Abstände und berühren einen concentrischen Kreis. Wenn die Sehne wächst, so wächst ihr kleinerer Bogen und der Winkel des Segments, während ihr Abstand vom Centrum abnimmt. Eucl. III, 15.

Beweis. Sind die Sehnen AB, BC einander gleich, so sind die Dreiecke ABM, BCM gleich und ähnlich (§. 5, 2), d. h. die Winkel AMB, BMC sind einander gleich; also sind auch die von den gleichen Centriwinkeln eingeschlossenen Bogen AB, BC einander gleich (§. 1, 6).



Die Normalen aus M zu den Sehnen AB, BC treffen die Mitten derselben (6), also sind AD, BE einander gleich als Hälften gleicher Sehnen, mithin die rechtwinkeligen Dreiecke ADM, BEM gleich und ähnlich. Die gleichen Winkel AMD, BME sind den spitzen Winkeln der Sehnen mit dem Kreise gleich, weil MA, MB normal zum Kreise und MD, ME normal zu den Sehnen (§. 2, 7). Die gleichen Katheten DM, EM sind die Abstände der Sehnen vom Centrum; der concentrische Kreis, dessen Radius MD ist, wird von AB und BC berührt (§. 3, 4). Wenn ferner die Sehne BF länger ist als BC, so ist in den Dreiecken MBF, MBC der Winkel $BMF > BMC$ (§. 5, 5). Zieht man noch MG normal zu BF, so ist BG die Hälfte von BF, und $BG > BE$. Hieraus folgt, daß in den rechtwinkeligen Dreiecken MBG und MBE (§. 5, 6) der Winkel $BMG > BME$ und die Kathete $GM < EM$, d. h. die größere Sehne BF schneidet den Kreis unter einem größeren spitzen Winkel und hat einen kleineren Abstand vom Centrum.

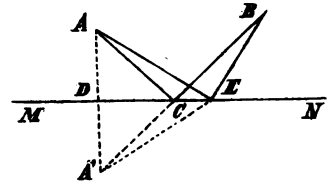
11. Unter den Sehnen des Kreises, welche durch einen gegebenen Punkt gehn, ist die *größte* der Diameter, dessen Abstand vom Centrum 0 ist, die *kleinste* diejenige, welche normal zu dem erwähnten Diameter ist und deren Abstand vom Centrum dem Abstand des gegebenen Punktes vom Centrum gleich kommt. Gehn durch B der Diameter CD, die Sehne EF normal zu CD, und eine andere Sehne GH, zu welcher aus dem Centrum die Normale AJ gezogen worden, so ist B die Mitte von EF, J die Mitte von GH. Nun ist $GJ < GA$, folglich $GH < CD$. In den rechtwinkeligen Dreiecken AGJ, AEB ist $AG = AE$, $AJ < AB$, folglich $GJ > EB$ oder $GH > EF$ (§. 5, 6).



Die Mitten der Sehnen, welche durch einen gegebenen Punkt gehn, liegen auf einem bestimmten Kreise, von welchem das Centrum des gegebenen Kreises und der gegebene Punkt Gegenpunkte sind. Ist A das Centrum des Kreises, B der gegebene Punkt, J die Mitte einer durch B gezogenen Sehne, so ist der Winkel AJB recht, mithin J ein Punkt des Kreises, dessen Diameter AB ist (§ 4, 3). Die Mitten von parallelen Sehnen liegen auf dem Diameter, der zu den Sehnen normal ist (auf einem Kreise, von dem ein Punkt unendlich fern ist).

12. Zwei Punkte liegen *symmetrisch* zu einer Geraden, wenn die Strecke zwischen den Punkten von der Geraden normal halbiert wird. Insbesondere liegen die Durchschnittspunkte von 2 Kreisen symmetrisch zu der Geraden, welche die Centren verbindet (4). Die Durchschnittspunkte eines Kreises und einer Geraden liegen symmetrisch zur Normale der Geraden aus dem Centrum des Kreises (6). Die Berührungspunkte von 2 Tangenten eines Kreises liegen symmetrisch zu der Geraden, welche aus dem Centrum nach dem Durchschnittspunkt der Tangenten geht (§. 4, 8).

Wenn die Gerade MN und auf einer Seite derselben die Punkte A, B gegeben sind, und auf der Geraden MN ein Punkt gesucht wird, aus welchem nach A und B Gerade sich ziehen lassen, die mit MN gleiche Winkel einschließen, so konstruiert man den Punkt A', welcher mit A zu MN symmetrisch liegt, und findet den gesuchten Punkt C als Durchschnitt von MN und $A'B$. Denn die Dreiecke ADC, $A'DC$ sind gleich und ähnlich, und der Winkel $ACD = DCA'$. Nun ist $DCA' = NCB$ als Scheitelwinkel, folglich $ACM = NCB$. Der gefundene Punkt ist vor allen Punkten der Geraden MN dadurch ausgezeichnet, daß die Summe seiner Abstände von den gegebenen Punkten am kleinsten ist*), daß also $AC + CB < AE + EB$, wenn E irgend ein anderer Punkt von MN ist. In der That ist $AC = A'C$, $AE = A'E$, $A'C + CB < A'E + EB$ (§. 3, 2). Dagegen erreicht die Differenz $A'E - BE$ oder $AE - BE$ ihren größten Wert AB, wenn E mit dem Durchschnitt der Geraden MN und AB zusammenfällt.

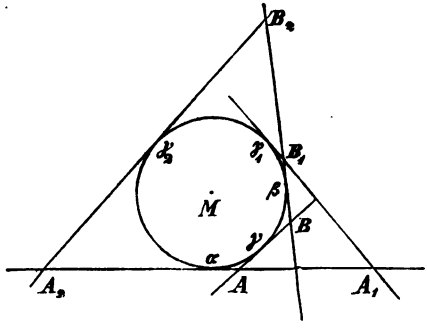


Die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkeligen Dreiecks bestimmen ein dem gegebenen Dreieck eingeschriebenes Dreieck von der Art, daß

*) Dieser Satz wird Heron von den griechischen Optikern zugeschrieben. Wilde Gesch. der Optik I p. 49. Die folgende Bemerkung über den Perimeter des Dreiecks der Fußpunkte hat der jüngere Fagnano gemacht (Acta Erud. 1775 p. 296).

jedesmal die durch einen Eckpunkt gehenden Seiten mit der durch denselben Eckpunkt gehenden Seite des gegebenen Dreiecks entgegengesetzt gleiche Winkel bilden (9). Das Dreieck der Fußpunkte hat unter den dem gegebenen Dreieck einschreibbaren Dreiecken den kleinsten Perimeter, weil die Verschiebung eines seiner Eckpunkte mit einer Vermehrung des Perimeters verbunden ist.

13. Wenn zwei Gerade den Kreis, dessen Centrum M, in α und β berühren, und von einer Tangente des Kreises in A und B geschnitten werden, so erscheint aus dem Centrum der Bogen $\alpha\beta$ zweimal so groß, als die Tangente AB. Wird der Kreis von AB in γ berührt, so ist der Winkel $\alpha M\gamma = 2AM\gamma$, weil α und γ symmetrisch zu MA liegen; ebenso $\gamma M\beta = 2\gamma MB$; folglich $\alpha M\beta = 2AMB$. Auf dieselbe Weise findet man $\alpha M\beta = 2A_1MB_1 = 2A_2MB_2$ u. s. f. Zwischen zwei gegebenen Tangenten eines Kreises erscheinen alle andern Tangenten desselben Kreises aus dem Centrum halb so groß als der zwischen den Berührungspunkten der gegebenen Tangenten enthaltene Bogen, mithin (§. 2, 4) gleich groß oder um 180^0 verschieden.*)



Wenn das Viereck $ABCD$ dem Kreise, dessen Centrum M, umgeschrieben ist, und die Seiten BC, DA den Kreis in α, β berühren, so ist $2AMB = \beta M\alpha$, $2CMD = \alpha M\beta$, folglich $2(AMB + CMD) = 0$. Wenn ferner das Sechseck $ABCDEF$ dem Kreise, dessen Centrum M, umgeschrieben ist, und die Seiten BC, DE, FA den Kreis in α, β, γ berühren, so ist $2AMB = \gamma M\alpha$, $2CMD = \alpha M\beta$, $2EMF = \beta M\gamma$, folglich $2(AMB + CMD + EMF) = 0$. U. s. w.**)

Wenn bei einem dem Kreise umgeschriebenen Sechseck die Diagonalen von der 1ten nach der 4ten, von der 2ten nach der 5ten Ecke durchs Centrum gehn, so geht auch die Diagonale von der 3ten nach der 6ten Ecke durchs Centrum.***) Bezeichnet man die doppelten Centriwinkel, welche die Seiten des Sechsecks einschließen, der Reihe nach durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, so ist $\alpha_4 = \alpha_1$, folglich $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_1 +$

*) Poncelet propr. proj. 462.
**) Poncelet propr. proj. 463.
***) Gergonne in den Ann. de Math. 4 p. 78 hat diesen besondern Fall des Brianchon'schen Theorems in Betracht gezogen. Vergl. oben §. 4, 6.

$\alpha_3 + \alpha_5 = 0$ nach dem vorhin bewiesenen Satze; hieraus fließt die Behauptung nach §. 2, 4. Wenn bei einem dem Kreise umgeschriebenen Zehneck die Diagonalen von der 1ten nach der 6ten, von der 2ten nach der 7ten, von der 3ten nach der 8ten, von der 4ten nach der 9ten Ecke durchs Centrum gehn, so geht auch die Diagonale von der 5ten nach der 10ten Ecke durchs Centrum. Nach der angenommenen Bezeichnung hat man $\alpha_6 = \alpha_1$, $\alpha_8 = \alpha_3$, folglich $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 = 0$. U. s. w. Wenn bei 2 dem Kreise umgeschriebenen Vierecken die die 1ten, 2ten, 3ten Ecken verbindenden Geraden durchs Centrum gehn, so geht auch die die 4ten Ecken verbindende Gerade durchs Centrum. Denn man hat bei ähnlicher Bezeichnung $\alpha_5 = \alpha_1$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_5 + \alpha_7 = 0$, folglich $\alpha_7 = \alpha_3$. U. s. w.

§. 7. Von den gleichen und ähnlichen Figuren.

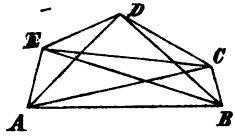
1. Für einen Zuschauer, der eine Seite eines Dreiecks ABC z. B. AB von A nach B zurücklegt, liegt der dritte Eckpunkt C entweder zur Linken oder zur Rechten, und der Zuschauer, welcher den Perimeter des Dreiecks ABC von A nach B und von da nach C bis A (nicht entgegengesetzt) zurücklegt, dreht sich in dem ersten Falle linksum, in dem andern Falle rechtsum. Zwei Dreiecke ABC und DEF derselben Ebene heißen eines Sinnes oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem es die Drehungen sind, welche ein Zuschauer bei der Zurücklegung der Perimeter ABC und DEF macht.

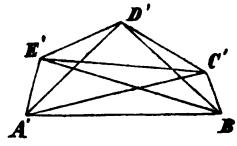
Wenn jedem Punkt einer Figur ein Punkt einer andern Figur so entspricht, daß die Dreiecke ABC, ABD, ABE, .. welche von zwei Punkten der einen Figur mit den übrigen Punkten derselben Figur gebildet werden, den entsprechenden Dreiecken der andern Figur $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'B'E'$, .. der Reihe nach gleich und ähnlich sind, und dabei ABD, ABE, .. mit ABC eines oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem $A'B'D'$, $A'B'E'$, .. mit $A'B'C'$ eines oder entgegengesetzten Sinnes sind: so sind die Figuren $ABCDE$ .. und $A'B'C'D'E'$ .. gleich und ähnlich, d. h. alle übrigen Dreiecke der einen Figur sind den entsprechenden Dreiecken der andern Figur gleich und ähnlich, ACD und $A'C'D'$, BCD und $B'C'D'$, ACE und $A'C'E'$, ADE und $A'D'E'$, BCE und $B'C'E'$, BDE und $B'D'E'$, CDE und $C'D'E'$, ...*)

Beweis. Nach den gemachten Voraussetzungen ist die Seite $AC = A'C'$, $AD = A'D'$, der Winkel $BAD - BAC = B'A'D' - B'A'C'$

*) Vergl. des Verf. Abhandlung über Gleichheit und Ähnlichkeit ꝛc. Dresden 1852 p. 15 und 40.

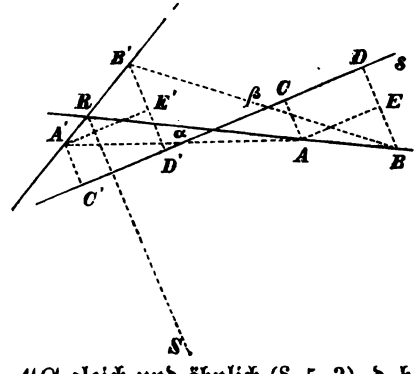
d. h. $CAD = C'A'D'$, folglich $ACD \leqq A'C'D'$ (§. 5, 1). Ebenso erkennt man, daß $ACE \leqq A'C'E'$, $ADE \leqq A'D'E'$, und daß $BCD \leqq B'C'D'$, $BCE \leqq B'C'E'$, $BDE \leqq B'D'E'$. Aus den Ergebnissen $BCD \leqq B'C'D'$, $BCE \leqq B'C'E'$ wird ferner geschlossen, daß $CDE \leqq C'D'E'$, u. s. f.





Anmerkung. Je nachdem ein Paar entsprechende Dreiecke der gleichen und ähnlichen Figuren eines oder entgegengesetzten Sinnes sind, so sind es alle Paare von entsprechenden Dreiecken und die ganzen Figuren.

2. Zu zwei gleichen Strecken AB, $A'B'$ auf Geraden, welche sich in R schneiden, giebt es einen Punkt S, mit dem die Strecken gleiche und ähnliche Dreiecke eines Sinnes bilden. Ist nämlich S der zweite Durchschnittspunkt der Kreise RAA', RBB', so haben die Dreiecke SAB, $SA'B'$ der Reihe nach gleiche Winkel (§. 4, 7) und die Seite $AB = A'B'$, folglich ist $SAB \leqq SA'B'$ (§. 5, 3). Zugleich ist der Winkel $ASA' = BSB' = AB\text{^}A'B'$ (§. 4, 7). Durch S gehn die Geraden, welche AA' und BB' normal halbieren, weil $AS = A'S$ und $BS = B'S$. Durch S geht auch die Gerade, welche den Nebenwinkel des von AB und $A'B'$ gebildeten Winkels halbiert, weil S von AB und $A'B'$ gleiche Abstände hat (§. 6, 7. 8). Wird die Figur SAB in ihrer Ebene um S gedreht, bis SA mit SA' oder mit der entgegengesetzten Verlängerung von SA' zusammenfällt, so gelangt AB zur Deckung von $A'B'$ oder bildet mit $A'B'$ ein Parallelogramm, dessen Centrum S ist (§. 6, 1).



Ferner giebt es eine Gerade s, mit der AB und $A'B'$ entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, und von der die Punkte A und A', B und B' entgegengesetzt gleiche Abstände haben. Ist α die Mitte von AA', und die Gerade s durch α parallel mit der Halbierenden des Winkels $AB\text{^}A'B'$ gezogen, sind ferner die Geraden AC und $A'C'$ normal zu s, so sind die Dreiecke αAC und $\alpha A'C'$ gleich und ähnlich (§. 5, 3), d. h. $AC = A'C'$ und α die Mitte von CC'. Wird nun BB' von s in β geschnitten, und zieht man die Geraden BD und $B'D'$ normal zu s, die Geraden AE und $A'E'$ parallel

mit s, so sind die Dreiecke ABE und $A'B'E'$ gleich und ähnlich (§. 5, 3), d. h. $BE = B'E'$, $AE = A'E'$. Zugleich hat man $ED = AC$, $CD = AE$, $E'D' = A'C'$, $C'D' = A'E'$ (§. 6, 1), folglich $BD = B'D'$ und $CD = C'D'$. Da nun $BDB'D'$ ein Parallelogramm ist (§. 6, 3), so ist β die Mitte sowohl von BB' als auch von DD'. Indem man die gleichen Strecken CD, $C'D'$ von $C'D$ subtrahiert oder zu $D'C$ addiert, findet man noch $CC' = DD'$, und daher $\alpha\beta = CD = C'D'$, weil $\alpha D - \beta D = CD$. Wird die Figur $ABDC$ in ihrer Ebene der Geraden s entlang fortbewegt, bis C mit C' zusammenfällt, so gelangt A mit A', B mit B' in symmetrische Lage zu s (§. 6, 12).

Wenn insbesondere $ABA'B'$ ein Parallelogramm ist, so ist der Punkt S das Centrum des Parallelogramms und die Gerade s normal zu AB. Wenn $ABB'A'$ ein Parallelogramm ist, so ist S ein unendlich ferner Punkt der Ebene $ABB'A'$, und die Gerade s ist die Halbierende des von AB und $A'B'$ eingeschlossenen Streifens. Wenn A mit A' vereint ist, so fällt S mit dem Punkt AA' zusammen und die Gerade s ist die Halbierende des von AB und $A'B'$ eingeschlossenen Winkels.

3. Zu zwei **gleichen und ähnlichen Polygonen eines Sinnes**, $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$, giebt es einen sich selbst so entsprechenden Punkt S, daß $SABC\ldots$ und $SA'B'C'\ldots$ gleiche und ähnliche Polygone eines Sinnes sind. Ist nämlich S der Punkt, mit welchem AB und $A'B'$ gleiche und ähnliche Dreiecke eines Sinnes bilden (2), so folgt aus den Bedingungen $ABS \backsimeq A'B'S$, $ABC \backsimeq A'B'C'$, $\ldots$, daß $SABC\ldots \backsimeq SA'B'C'\ldots$ (1).

Weil die Winkel ASA', BSB', CSC', $\ldots$, $AB{\wedge}A'B'$, $AC{\wedge}A'C'$, $BC{\wedge}B'C'$, $\ldots$ von derselben Größe sind (2), so schneiden sich die entsprechenden Geraden AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, $\ldots$ auf dem Kreise $AA'S$ (§. 4, 3), die entsprechenden Geraden BA und BA', BC und $B'C'$, $\ldots$ auf dem Kreise $BB'S$, u. s. f. Weil der Punkt S von den entsprechenden Punkten A und A', B und B', C und C', $\ldots$ der Reihe nach gleiche Abstände hat, so gehn die Geraden, welche AA', BB', CC', $\ldots$ normal halbieren, durch S. Weil der Punkt S von den entsprechenden Geraden AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und $B'C'$, $\ldots$ der Reihe nach gleiche Abstände hat, so gehn die Geraden, welche die Nebenwinkel der Winkel $AB{\wedge}A'B'$, $AC{\wedge}A'C'$, $BC{\wedge}B'C'$ halbieren, durch S. Wird das Polygon $SABC\ldots$ in seiner Ebene um S gedreht, bis SA mit SA' oder mit der entgegengesetzten Verlängerung von SA' zusammentrifft, so gelangt $ABC\ldots$ zur Deckung von $A'B'C'\ldots$, oder $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$, $\ldots$ werden Parallelogramme, deren gemeinschaftliches Centrum S ist (§. 6, 1).

Wenn insbesondere die gegebenen Polygone so liegen, daß $ABB'A'$

ein Parallelogramm ist, so sind auch $ACC'A'$, $BCC'B'$, .. Parallelogramme, und die Strecken AA', BB', CC', .. sind parallel und gleich. Bewegt man das Polygon ABC .. in der Richtung AA', bis A mit A' zusammenfällt, so gelangt ABC .. mit $A'B'C'$ .. zur Deckung.*)

4. Zu zwei gleichen und ähnlichen Polygonen nicht eines Sinnes, ABC .. und $A'B'C'$ .., giebt es eine sich selbst entsprechende Gerade s, mit welcher die entsprechenden Geraden AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und $B'C'$, .. der Reihe nach entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, und von welcher die entsprechenden Punkte A und A', B und B', C und C', .. der Reihe nach entgegengesetzt gleiche Abstände haben. Ist nämlich die Gerade s durch die Mitte von AA' parallel mit der Halbierenden des Winkels $AB\wedge A'B'$ gezogen, sind ferner AF, BG, CH, .., $A'F'$, $B'G'$, $C'H'$, .. normal zu s, so sind (2) $AFA'F'$, $BGB'G'$, $CHC'H'$, .. Parallelogramme, woraus man schließt, daß die Mitten von AA', BB', CC', .. auf der Geraden s liegen. Dabei findet man $FF' = GG' = HH'$ u. s. f. Wird die Figur ABC .. FGH .. in ihrer Ebene der Geraden s entlang fortbewegt, bis F mit F' zusammenfällt, so gelangt A mit A', B mit B', C mit C', .. in symmetrische Lage zu s.

Wenn insbesondere die gegebenen Polygone so liegen, daß AA' zur Halbierenden des Winkels $AB\wedge A'B'$ normal ist, so haben dieselben bereits symmetrische Lage zu der Geraden, welche AA' normal halbiert und deren Punkte sich selbst entsprechen.**)

5. Die Konstruktion eines regulären $n$ecks (§. 1, 8) kann auf die Teilung der Ebene in n gleiche Winkel oder auf die Teilung des Kreises in n gleiche Bogen gegründet werden. Denn n gleiche und ähnliche gleichschenkelige Dreiecke, deren Spitzen in dem gemeinschaftlichen Scheitel jener Winkel liegen, bilden zusammen ein reguläres $n$eck; ebenso bilden die Sehnen dieser Bogen den Perimeter eines regulären $n$ecks (§. 6, 10).

Es giebt aber verschiedene Arten von regulären $n$ecken, und zwar halb soviel, als Zahlen vorhanden sind kleiner als n und prim zu n

*) Der Punkt S ist einerlei mit dem von Euler (1777) betrachteten centrum similitudinis (Nov. Act. Petrop, 9 p. 154) und dem von Magnus sogenannten Situationspunkt (Aufg. d. anal. Geom. I. p. 59). Auf die Bemerkung, daß jede Verrückung einer Planfigur in ihrer Ebene als Drehung um einen bestimmten Punkt S angesehn werden kann, gründet sich eine Methode, Normalen zu Kurven zu ziehn, von der zuerst Descartes Gebrauch gemacht hat. Vergl. Chasles ap. hist. p. 649 d. Übers.

**) Die Gerade s ist einerlei mit der von Magnus (l. c.) sogenannten „Situationsaxe".

(Allg. Arithm. §. 13, 15). Um nämlich ein reguläres Polygon zu erhalten, kann man bei einem in n gleiche Bogen geteilten Kreise nicht nur die Sehnen vom 1ten nach dem 2ten Teilpunkt, vom 2ten nach dem 3ten, .. ziehn, sondern auch vom 1ten nach dem 3ten, vom 3ten nach dem 5ten, .., oder überhaupt vom 1ten nach dem $(1+k)$ten, vom $(1+k)$ten nach dem $(1+2k)$ten, .., wobei diejenigen Teilpunkte sich nicht unterscheiden, deren Nummern nach dem Modul n dieselben Reste haben. Wenn nun k prim zu n ist, so haben die n Zahlen $1, 1+k, 1+2k, .., 1+(n-1)k$ nach dem Modul n verschiedene Reste (Allg. Arithm. §. 13, 19), mithin fällt erst die $(n+1)$te unter den gezogenen Sehnen mit der ersten zusammen. Vertauscht man k mit $n-k$, so wird das konstruierte Polygon nicht verändert, weil zu zwei Bogen, die zur Peripherie sich ergänzen, gleiche Sehnen gehören. Es giebt also nicht mehr verschiedene reguläre $n$ecke, als Zahlen, die prim zu n sind, in der Reihe von 1 bis $\frac{1}{2}(n-2)$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$, je nachdem n gerade oder ungerade.*) Wird diese Anzahl durch z bezeichnet, so hat man

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
z	1	1	2	1	3	2	3	2	5	2	...

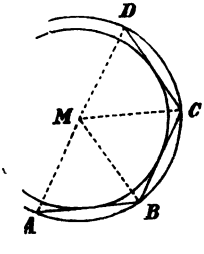
Durch die Teilung des Kreises in n gleiche Teile ist die Teilung desselben in m gleiche Teile gegeben, wenn n durch m teilbar ist; ferner ist aber auch die Teilung des Kreises in $2n, 4n, 8n, ..$ gleiche Teile ausführbar, indem man jeden der gegebenen Teile halbiert (§. 6, 5). Durch die Teilungen des Kreises in n gleiche Teile und in m gleiche Teile ist die Teilung desselben in mn gleiche Teile gegeben, wenn m prim zu n ist, weil $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{mn}$ irreducibel.

Die Teilung des Kreises in 6 gleiche Teile geschieht durch Abteilung von Bogen, deren Sehnen dem Radius gleich sind. Eine solche Sehne bildet mit den Radien ihrer Endpunkte ein gleichseitiges Dreieck, welches gleichwinkelig ist (§. 3, 1), und dessen Centriwinkel folglich der 3te Teil von 180^0 oder der 6te Teil von 360^0 ist. Die Teilung des Kreises in 10 gleiche Teile geschieht durch Abteilung von Bogen, deren Sehnen dem sogenannten goldnen Abschnitt des Radius gleich sind (§. 11, 6). Aus dem 3ten und 5ten Teile eines Kreises findet man den 15ten Teil desselben.

---

*) Die regulären Polygone der ersten Art und das zweite Fünfeck (Pentagramm) sind in der Pythagoreischen Schule untersucht worden (vergl. Eucl. IV), die übrigen (sternförmigen) im 13ten Jahrh. von Campanus, im 14ten Jahrh. von Bradwardine, im 16. Jahrh. von Ramus, dann von Keppler (harmonice mundi 1619), genauer von Meister Comm. Gott. 1769 p. 148 und Poinsot 1809 J. de l'éc. polyt. Cah. 10 p. 16. Vergl. Chasles ap. hist. p. 545 d. Übers. Bretschneider Geometrie vor Euclides p. 85.

Die Teilung des Kreises in n gleiche Teile, wenn n eine Primzahl ist, läßt sich durch elementare Konstruktion (d. h. mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Geraden und Kreisen) im allgemeinen nicht ausführen, sondern nur in dem Falle, daß zugleich $n - 1$ eine Potenz von 2 ist, z. B. für die Primzahlen 3, 5, 17, 257, 65537, .., weil $4 = 2^2$, $16 = 2^4$, $256 = 2^8$, $65536 = 2^{16}$.*)



Jedem regulären Polygon kann ein Kreis umgeschrieben und ein concentrischer Kreis eingeschrieben werden. Ist die Seite $AB = BC = CD = ..$, der Winkel $CBA = DCB = ..$, und M das Centrum des Kreises ABC, so ist das Dreieck $ABM \cong BCM$ (§. 5, 2) d. h. der Winkel $MBA = MCB$. Nun ist der Winkel $CBA = DCB$, folglich $CBM = DCM$, und das Dreieck $BCM \cong CDM$ (§. 5, 1) d. h. $CM = DM$. Also geht der Kreis ABC durch D, u. s. w. Die gleichen Sehnen $AB, BC, CD, ..$ dieses Kreises haben von dem Centrum M gleiche Abstände (§. 6, 10) und berühren einen concentrischen Kreis, der dem Polygon $ABCD ..$ eingeschrieben ist.

6. Wenn in einem $2n$eck $ABC .. A_1B_1C_1$ die Teile $ABC .. A_1$ und $A_1B_1C_1 .. A$ gleich und ähnlich eines Sinnes sind, so hat das Polygon ein Centrum von der Art, daß jede durch das Centrum gezogene Gerade den Perimeter des Polygons in Gegenpunkten und das Polygon in zwei gleiche und ähnliche Teile eines Sinnes teilt. Die zwischen Gegenpunkten enthaltene Strecke ist ein Diameter. Die Mitten aller Diameter sind im Centrum vereint. Denn die Seiten AB und A_1B_1 sind nach der Voraussetzung nicht nur gleich, sondern auch parallel, weil die Winkel BAA_1 und B_1A_1A gleich sind, also ist ABA_1B_1 ein Parallelogramm (§. 6, 3), dessen Centrum zugleich das Centrum des Polygons ist. Vergl. §. 6, 1.

Wenn in einem $3n$eck $ABC .. A_1B_1C_1 .. A_2B_2C_2 ..$ die Teile $ABC .. A_1$, $A_1B_1C_1 .. A_2$, $A_2B_2C_2 .. A$ gleich und ähnlich eines Sinnes sind, so hat das Polygon ein Centrum von der Art, daß je 3 aus dem Centrum nach der Peripherie gezogene Radien, die die Ebene in 3 gleiche Winkel teilen, einander gleich sind und das Polygon in 3 gleiche und

*) Dieser Zusatz zur alten Geometrie ist von Gauß 1796 entdeckt worden (Disq. arithm. 365). Von der Konstruktion des regulären 17ecks handeln Legendre (Élém. de trigon. 110), Grunert in Klügels math. W. V p. 811, Staudt Crelle J. 24 p. 251. Die Teilung des Kreises in 257 gleiche Teile hat Richelot Crelle J. 9 untersucht. Fermat's Vermutung (nicht Behauptung), daß $2^m + 1$ eine Primzahl sei, wenn m eine Potenz von 2 ist, hat sich nicht bestätigt; Euler (Comm. Petrop. VI p. 104) hat gelegentlich erkannt, daß $2^{32} + 1$ durch 641 teilbar ist. Vergl. Lucas Comptes rendus 1877b p. 131.

ähnliche Teile eines Sinnes zerschneiden. Weil nach Voraussetzung $AA_1 = A_1A_2 = A_2A$, so ist AA_1A_2 ein reguläres Dreieck. Ist M das Centrum des dem Dreieck AA_1A_2 umgeschriebenen Kreises, und werden MF, MF_1, MF_2 nach der Peripherie des Polygons so gezogen, daß die Winkel FMF_1, F_1MF_2, F_2MF einander gleich sind, so sind nicht nur $MA = MA_1 = MA_2$, $MABC..A_1$, $MA_1B_1C_1..A_2$, $MA_2B_2C_2..A$ gleich und ähnlich eines Sinnes, sondern es sind auch die Winkel AMF, A_1MF_1, A_2MF_2 einander gleich, die Dreiecke MAF, MA_1F_1, MA_2F_2, sowie die Polygone $MF..F_1$, $MF_1..F_2$, $MF_2..F$ gleich und ähnlich eines Sinnes, wobei $MF = MF_1 = MF_2$.

Wenn überhaupt in einem $m$necke $AB..A_1B_1..A_2B_2....$ $A_{m-1}B_{m-1}..$ die Teile $AB..$, $A_1B_1..,..,$ $A_{m-1}B_{m-1}..$ gleich und ähnlich eines Sinnes, und A, A_1, $A_2,..A_{m-1}$ die Eckpunkte eines regulären $m$ecks sind, so hat das Polygon ein Centrum von der Art, daß es m Radien, die die Ebene in m gleiche Winkel teilen, einander gleich sind und das Polygon in m gleiche und ähnliche Teile eines Sinnes zerschneiden.*)

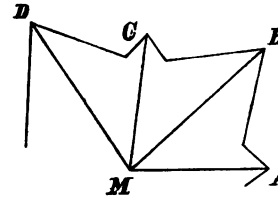
7. Eine Figur, welche von einer Geraden in zwei entgegengesetzt gleiche und ähnliche Teile geteilt wird, die zu der Geraden symmetrisch liegen (§. 6, 12), heißt *symmetrisch*, und die Gerade eine *Axe* der Figur.**) Das gleichschenkelige Dreieck ist symmetrisch, die den Winkel an der Spitze Halbierende ist seine Axe. Ein Viereck, in dem zweimal zwei folgende Seiten gleich sind, oder in dem zwei gegenüberliegende Seiten parallel und ungleich, die beiden andern gleich und nicht parallel sind (§. 6, 4), ist symmetrisch; die Gerade, welche einen von gleichen Seiten gebildeten Winkel halbiert, ist die Axe des Vierecks. Alle symmetrischen Figuren können durch Zusammenfügung von gleichschenkeligen Dreiecken mit einer gemeinschaftlichen Axe zu Stande gebracht werden.

Es giebt Figuren, die mehr als eine Axe besitzen. Ein Rhombus hat 2 Axen, die seine gegenüberliegenden Winkel halbieren; ein Rektangel hat 2 Axen, die seine gegenüberliegenden Seiten normal halbieren; ein Quadrat hat 4, ein reguläres $n$eck hat nAxen; ein Kreis hat unendlich viel Axen, denn jeder Diameter desselben ist eine Axe.

*) Der allgemeine Begriff von Centrum und Diameter findet sich bei Archimedes und bei Apollonius, unter den Neuern hat ihn Newton aufgestellt im Anfang der Enumeratio linearum etc. Kurven der obigen Arten hat Euler (Introd. II cap. 15) betrachtet.

**) Im weitern Sinne werden auch die in (6) betrachteten Figuren symmetrische genannt. Vergl. Bravais sur les polyèdres symmétriques Liouville J. 1849 t. 14 und Möbius über symmetrische Figuren 1851 Crelle J. 44. p. 335. Axe und Diameter sind von Apollonius und Newton (l. c.) unterschieden worden; bei Euler wird die Axe diameter orthogonalis genannt.

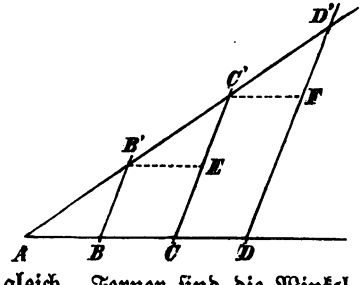
Wenn eine Figur 2 Axen besitzt, deren Winkel zu 180^0 das rationale Verhältnis $l : m$ hat, wobei l prim zu m, so besitzt die Figur überhaupt m Axen, die sich in einem Punkte, die Ebene in $2m$ gleiche Winkel und die Figur in $2m$ gleiche und ähnliche Teile schneiden, von denen je zwei folgende nicht eines Sinnes sind. Der gemeinschaftliche Punkt der Axen ist ein Centrum von der Art, daß je m Radien, die die Ebene in m gleiche Winkel teilen, einander gleich sind und die Figur in m gleiche und ähnliche Figuren eines Sinnes zerschneiden.



Sind nämlich MA und MB Axen der Figur, $MB\,..\,C$ und $MB\,..\,A$ entgegengesetzt gleich und ähnlich, so ist $MB\,..\,C$ ein Bestandteil der Figur, weil MB eine Axe ist, und MC eine Axe derselben, weil MC mit MA symmetrisch zu MB liegt und MA eine Axe der Figur ist. Ebenso schließt man, daß MD eine Axe ist, wenn $MC\,..\,D$ und $MC\,..\,B$ entgegengesetzt gleich und ähnlich sind, u. s. w. Nach der Voraussetzung fällt aber unter den Radien $MA, MB, MC, ..$ der $(2m+1)$te mit dem ersten zusammen; daher teilen diese Radien die Ebene in $2m$ gleiche Winkel, der $(m+1)$te Radius bildet mit dem ersten die erste Axe, u. s. f. Vergl. Euler Introd. II, 344.

§. 8. Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen.

1. Wenn man auf einem Schenkel eines Winkels vom Scheitel aus Strecken abteilt, die einander gleich sind, und durch die Teilpunkte parallele Gerade zieht, die den andern Schenkel schneiden, so erhält man auf dem andern Schenkel ebensoviel Strecken, die einander gleich sind, und die parallelen Strecken vom Scheitel aus gezählt, verhalten sich der Reihe nach wie die natürlichen Zahlen. Sind AB, BC, CD einander gleich, und BB', CC', DD' parallel, so sind $AB', B'C', C'D'$ einander gleich und

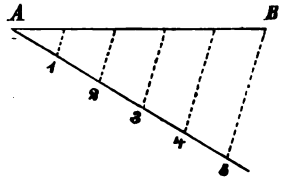


$$BB' : CC' : DD' = 1 : 2 : 3.$$

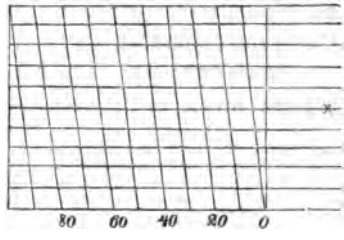
Beweis. Zieht man $B'E, C'F$ parallel mit AB, so ist $B'E = BC$, $C'F = CD$, als gegenüberliegende Seiten von Parallelogrammen (§. 6, 1), also sind $AB, B'E, C'F$ einander gleich. Ferner sind die Winkel $BAB' = EB'C' = FC'D'$, und $AB'B = B'C'E = C'D'F$, weil ihre Schenkel der Reihe nach parallel sind

(§. 2, 10). Nach §. 5, 3 schließt man, daß die Dreiecke ABB', $B'EC'$, $C'FD'$ gleich und ähnlich sind, d. h. $AB' = B'C' = C'D'$, $BB' = EC' = FD'$. Dabei sind $CE = BB'$, $DF = CC'$, als gegenüberliegende Seiten von Parallelogrammen, folglich $CC' = 2BB'$, $DD' = 3BB'$, u. s. w.

Anwendung. Um die Strecke AB in n gleiche Teile zu teilen (Eucl. VI, 9), zieht man durch A eine beliebige Gerade, schneidet auf derselben von A aus n gleiche Strecken ab, und zieht durch die Teilpunkte Gerade, welche mit der den letzten Teilpunkt und B verbindenden Geraden parallel sind. Die Parallelen teilen die Strecke AB in n gleiche Teile.

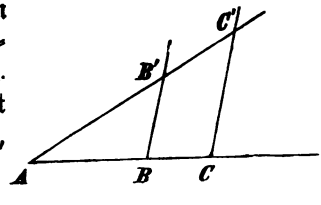


Um einen verjüngten Maßstab*) zu konstruieren, teilt man auf dem aufrechten Schenkel eines kleinen Winkels vom Scheitel (Nullpunkt) aus 10 gleiche Strecken ab, und zieht durch den Nullpunkt, sowie durch die Teilpunkte (normale) Parallelen, deren erste innerhalb des Winkels 1 Längeneinheit ist, deren letzte 10 Längeneinheiten beträgt. Auf jeder Parallele sind zur Linken 9 Abschnitte von je 10 Längeneinheiten, zur Rechten mehrere Abschnitte von je 100 Längeneinheiten hinzugefügt, so daß man z. B. Strecken von 3, 13, 23, . . , 103, . . 253 Längeneinheiten auf der 3ten Parallele vorfindet, u. s. w.



2. Die Schenkel eines Winkels werden von 2 Parallelen so geschnitten, daß die Abschnitte des einen Schenkels zu einander der Reihe nach sich verhalten wie die zwischen denselben Parallelen enthaltenen Abschnitte des andern Schenkels. Die Parallelen verhalten sich zu einander der Reihe nach, wie die auf einem Schenkel vom Scheitel bis zu den Parallelen sich erstreckenden Abschnitte (Eucl. VI, 2). Sind BB', CC' parallel, so ist

$$AB : BC : AC = AB' : B'C' : AC',$$
$$BB' : CC' = AB : AC.$$



*) Den Gebrauch dieses nützlichen Instruments hat Hommel zu Leipzig um die Mitte des 16ten Jahrhunderts gelehrt nach Tycho de Brahe epist. astron. p. 62.

Beweis. Der $m$te Teil von AB ist in BC entweder $n$mal enthalten, oder mehr als $n$mal und weniger als $(n+1)$mal. Wenn man den $m$ten Teil von AB auf AC von A aus $(m+n+1)$mal abteilt und durch die Teilpunkte Gerade zieht, die mit BB', CC' parallel sind, so schließt man (1), daß $B'C'$ den $m$ten Teil von AB' ebenfalls entweder $n$mal enthält, oder mehr als $n$mal und weniger als $(n+1)$mal. Zugleich ist BB' die $m$te Parallele im Winkel CAC', und CC' entweder die $(m+n)$te, oder größer als die $(m+n)$te und kleiner als die $(m+n+1)$te. Daher verhalten sich entweder $AB : BC : AC$ und $AB' : B'C' : AC'$ der Reihe nach wie $m : n : m+n$, und $BB' : CC' = m : m+n$; oder es ist zugleich

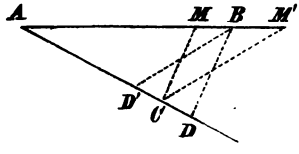
$$n : m < BC : AB < n+1 : m$$
$$n : m < B'C' : AB' < n+1 : m$$

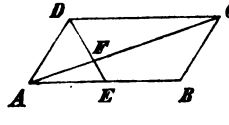
und

$$m+n : m < AC : AB < m+n+1 : m$$
$$m+n : m < CC' : BB' < m+n+1 : m$$

Diese Begrenzungen gelten für ein beliebig großes m, also sind sowohl die Verhältnisse $BC : AB$ und $B'C' : AB'$, als auch $AC : AB$ und $CC' : BB'$ einander gleich (Algebra §. 1, 2).

Anwendung. Um die Strecke AB nach einem gegebenen Verhältnis innen in M, oder außen in M' zu teilen, so daß die Verhältnisse $AM : MB$ und $AM' : BM'$ den gegebenen Wert haben, nehme man irgend zwei Strecken, deren Verhältnis den gegebenen Wert hat, ziehe in beliebiger Richtung AC gleich der ersten Strecke, und in derselben Richtung CD oder in der entgegengesetzten Richtung CD' gleich der zweiten Strecke. Macht man CM parallel mit DB, CM' parallel mit $D'B$, so erhalten die Verhältnisse $AM : MB$ und $AM' : BM'$ den gegebenen Wert.

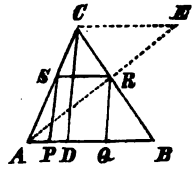




Wenn man in dem Parallelogramm $ABCD$ durch D eine Gerade zieht, welche die Seite AB in E, die Diagonale AC in F schneidet, so verhalten sich die Teile $AF : FC$ auf dem einen Schenkel des Winkels F, wie die Teile $EF : FD$ auf dem andern, und wie die Parallelen $AE : DC$ d. i. wie $AE : AB$. Wenn $AE : EB = 1 : n$, so ist $AF : FC = 1 : n+1$.

Wenn dem Dreieck ABC das Parallelogramm $PQRS$ eingeschrieben werden soll, dessen Seite PQ auf AB liegt, zu QR ein gegebenes Verhältnis hat, und mit ihr einen gegebenen Winkel einschließt, so ziehe

man CD, welche mit AB den gegebenen Winkel bildet, EC parallel entgegengesetzt mit AB und so lang, daß $EC : CD$ den gegebenen Wert hat. Die Gerade AE schneidet BC in R so, daß $RS : EC$ und $SP : CD$ den Wert $AS : AC$ haben. Folglich ist $RS : EC = SP : CD$ und $RS : SP = EC : CD$. Zieht man EC parallel mit AB in derselben Richtung, u. s. w., so erhält man ein zweites Parallelogramm, das den Forderungen der Aufgabe genügt.

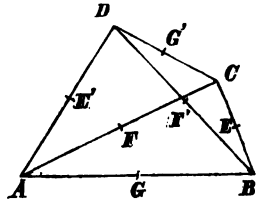


3. Umgekehrt schließt man: Wenn A, B, C und A, B', C' auf je einem Schenkel so liegen, daß $AB : BC = AB' : B'C'$, so sind die Geraden BB', CC' parallel. Würde AB' von der Geraden, welche mit BB' parallel ist und durch C geht, in D' geschnitten, so wäre $AB : BC = AB' : B'D'$, folglich $AB : BC$ von $AB' : B'C'$ verschieden, gegen die Voraussetzung.

Wenn A, B, C auf einer Geraden liegen, BB' und CC' parallel sind und von solcher Länge, daß $BB' : CC' = AB : AC$, so liegen auch A, B', C' auf einer Geraden. Würde CC' von der Geraden AB' in E' geschnitten, so wäre $BB' : CE' = AB : AC$, folglich $BB' : CC'$ von $AB : AC$ verschieden, gegen die Voraussetzung.

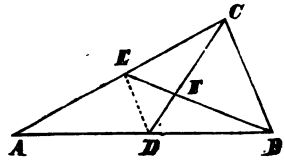
Anwendung. Die Gerade, welche die Mitten von zwei Seiten eines Dreiecks verbindet, ist mit der dritten Seite parallel und halb so groß. Wenn E, F die Mitten von BC, CA sind, so hat man $CE : EB = CF : FA$, also sind EF und AB parallel, und zwar $EF : BA = CF : CA = 1 : 2$.

Die Mitten der Seiten eines Vierecks sind die Eckpunkte eines Parallelogramms. Wenn E, E', F, F', G, G', die Mitten von BC, AD, CA, BD, AB, CD sind, so sind GE und $E'G'$ parallel mit AC und halb so groß, folglich ist $GEG'E'$ ein Parallelogramm. Ebenso bilden die Mitten der Seiten im Viereck $BCAD$ das Parallelogramm $EFE'F'$, im Viereck $CABD$ das Parallelogramm $FGF'G'$. Die Parallelogramme, deren Eckpunkte die Mitten der Seiten von den Vierecken sind, welche zu demselben System von 4 Punkten gehören (§. 1, 8), sind concentrisch.*) Denn die Mitte von GG' ist zugleich die Mitte von EE' und von FF'.



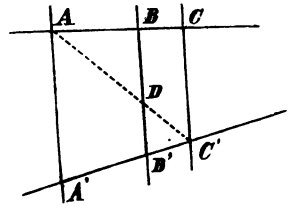
*) Gergonne Ann. de Math. 1 p. 313.

Wenn die Strecken AB und AC, welche einen gemeinschaftlichen Anfang haben, nach dem Verhältnis $m : n$ geteilt sind, so teilen die Strecken von den Teilpunkten nach den gegenüberliegenden Endpunkten einander nach dem Verhältnis $m : m+n$. Denn unter der Voraussetzung $AD : DB = AE : EC = m : n$ sind DE und BC parallel und $DE : BC = m : m+n$ (2). Nun ist $DE : BC = DF : FC = EF : FB$, also haben auch diese letzteren Verhältnisse den Wert $m : m+n$.

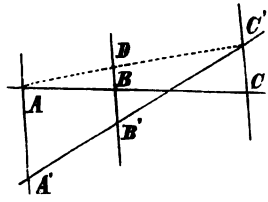


Insbesondere teilen die Geraden aus den Mitten der Seiten eines Dreiecks nach den gegenüberliegenden Eckpunkten einander nach dem Verhältnis 1 : 2, und gehen deshalb durch einen Punkt, den Schwerpunkt gleicher Massen, die in den Eckpunkten sich befinden, und der Dreiecksfläche.*)

4. Wenn zwei Gerade von 3 Parallelen geschnitten werden, so verhalten sich die Abschnitte der einen Geraden zu einander der Reihe nach, wie die zwischen denselben Parallelen enthaltenen Abschnitte der andern Geraden. Werden die Geraden von den Parallelen in A und A', B und B', C und C' geschnitten, und ist D der Durchschnitt von AC' mit BB', so verhalten sich sowohl $AB : BC : AC'$ als auch $A'B' : B'C' : A'C'$, wie $AD : DC' : AC'$ (2), also



$$AB : BC : AC = A'B' : B'C' : A'C'$$



Eine Gleichung zwischen den Parallelen erhält man aus den Gleichungen

$$BD = \frac{AB}{AC} CC'$$

$$DB' = \frac{B'C'}{A'C'} AA' = \frac{BC}{AC} AA'$$

Bei der angenommenen Folge der Punkte A, B, C haben die Strecken BD und CC', DB' und AA' paarweise einerlei Richtung. Wenn nun AA' und CC' einerlei Richtung haben, so haben auch BD und DB' einerlei Richtung und man findet durch Addition

$$BB' = \frac{BC}{AC} AA' + \frac{AB}{AC} CC'$$

---

*) Archimedes *Ἰσορροπικὰ ἢ κέντρα βαρῶν.*

$$AC \cdot BB' = BC \cdot AA' + AB \cdot CC'$$*)

Wenn die Parallelen AA', BB', CC' nicht einerlei Richtung haben, so erhält man durch Subtraktion die zwischen denselben bestehende Gleichung, worin die Parallele negativ ist, deren Richtung der gemeinschaftlichen Richtung der beiden anderen entgegengesetzt ist.

Wenn z. B. D die Mitte von AB, und Parallelen durch A, B, D von einer Geraden in A', B', D' geschnitten werden, so ist

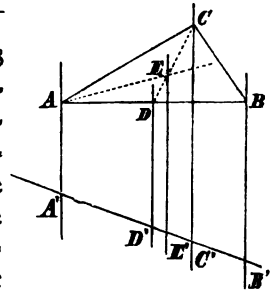
$$DD' = \frac{AA' + BB'}{2}$$

das arithmetische Mittel von AA' und BB'.

Wenn E der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist, so hat man bei analoger Konstruktion

$$EE' = \frac{2DD' + CC'}{3} = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$

d. h. der Abstand des Schwerpunkts eines Dreiecks von einer Geraden ist das arithmetische Mittel zwischen den Abständen der Eckpunkte von derselben Geraden.**) Wenn die Gerade $A'B'C'$ den Schwerpunkt enthält, so ist die Summe der Parallelen null, eine der Summe der beiden andern entgegengesetzt gleich. Daher findet man, indem man die Parallelen der $A'B'C'$ mit der Geraden EE' schneidet,



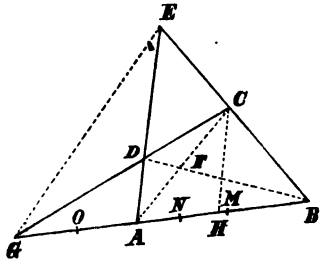
$$E'A' + E'B' + E'C' = 0$$

5. Umgekehrt schließt man wie oben (3): Wenn A, B, C und A', B', C' auf je einer Geraden so liegen, daß $AB : BC = A'B' : B'C'$, und AA', BB' parallel sind, so ist auch CC' mit AA', BB' parallel.

Wenn A, B, C auf einer Geraden in der angegebenen Ordnung liegen, und AA', BB', CC' parallel und so groß sind, daß sie der Gleichung

$$AC \cdot AB' = BC \cdot AA' + AB \cdot CC'$$

genügen, so liegen A', B', C' auf einer Geraden.



Anwendung. Die Mitten der 3 Diagonalen, welche zu einem System

*) Eine barycentrische Gleichung. Vergl. Stereom. §. 11. L'Huilier polygon. p. 44.

**) Deshalb hat Carnot (géom. de pos. 269) den Schwerpunkt von Punkten ihr Centrum der mittlern Abstände genannt.

von 4 Geraden gehören, liegen auf einer Geraden.*) Sind AC, BD, EG die Diagonalen der von den Geraden AB, BC, CD, DA gebildeten Vierecke, und zieht man CH mit DA parallel, so ist (2)

$$GA' = GH\frac{AD}{HC} \qquad AB = HB\frac{AE}{HC}$$

folglich durch Addition

$$GB \,.\, HC = GH \,.\, AD + HB \,.\, AE$$

Bezeichnet man durch M, N, O die Mitten von AB, AH, AG, und zieht durch M, N, O Parallelen mit HC, welche BD, AC, GE in M', N', O' schneiden, so sind M', N', O' die Mitten von BD, AC, GE (2), und man hat

$$GB = 2OM, \quad GH = 2ON, \quad HB = 2NM$$
$$HC = 2NN', \quad AD = 2MM', \quad AE = 2OO'$$

demnach

$$OM \,.\, NN' = ON \,.\, MM' + NM \,.\, OO'$$

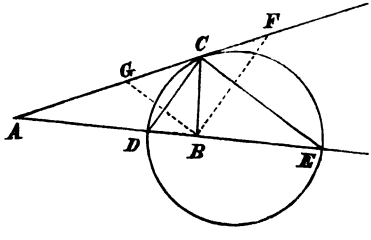
Zufolge dieser Gleichung liegen M', N', O' auf einer Geraden.

Bei einem System von 4 Punkten A, B, C, D werde AD von BC in E geschnitten, BD von CA in F, CD von AB in G; dann liegen die Mitten von

$$AB, \quad CD, \quad EF$$
$$BC, \quad AD, \quad FG$$
$$CA, \quad BD, \quad GE$$

auf je einer Geraden. Diese 3 Geraden aber gehen durch einen Punkt (3).

6. I. Die Geraden, welche in einem Dreieck einen Winkel und dessen Nebenwinkel halbieren, teilen die gegenüberliegende Seite innen und außen nach dem Verhältnis der den Winkel einschließenden Seiten.**)



Beweis. Die Halbierenden des Winkels C und seines Nebenwinkels schneiden AB innen in D, außen in E. Zieht man BF und BG parallel mit CD und CE, so sind sowohl die Winkel CFB und FBC gleich, weil sie den gleichen Winkeln ACD und DCB gleich

*) Diese Eigenschaft des Vierecks ist von Gauß 1810 bemerkt worden (v. Zach monatl. Korresp. 22 p. 115). Beweise davon findet man Gerg. Ann. I p. 314, Poncelet propr. proj. 164, Kunze Geom. p. 200, und anderwärts. Eine wesentliche Vervollständigung des obigen Satzes hat Bodenmiller gegeben. Vergl. §. 14, 11 und Trigon. §. 7, 11.

**) Eucl. VI, 3, ergänzt von Pfleiderer (Apollonius ebene Örter von R. Simson, übers. von Camerer 1796 p. 217). Die Teilung einer Strecke innen und außen nach demselben Verhältnis heißt eine Teilung derselben in proportionale

sind, als auch BGC und CBG, weil sie den gleichen Winkeln ECF und BCE gleich sind. Daher sind CF und GC der Seite BC gleich. Nun ist (2)

$$AD : DB = AC : CF$$
$$AE : BE = AC : GC$$

folglich

$$AD : DB = AE : BE = AC : BC$$

Umgekehrt schließt man: Wenn D die Seite AB so teilt, daß $AD : DB = AC : BC$, so halbiert CD den Winkel ACB oder dessen Nebenwinkel, je nachdem D von AB eingeschlossen ist oder nicht. Gesetzt, CH halbierte den Winkel, so wäre $AH : HB = AC : BC$, folglich $AD : DB$ von $AC : BC$ verschieden, gegen die Voraussetzung.

II. Jeder Punkt, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältnis haben, liegt auf dem Kreis, der die Strecke der gegebenen Punkte innen und außen nach dem gegebenen Verhältnis normal schneidet.*) Sind A und B die gegebenen Punkte, D und E diejenigen unter den gesuchten Punkten, welche auf der Geraden AB liegen, und ist C einer unter den übrigen gesuchten Punkten, mithin $AD : DB$, $AE : BE$, $AC : BC$ dem gegebenen Verhältnis gleich, so wird der Winkel ACB und sein Nebenwinkel von CD und CE halbiert. Folglich ist der Winkel DCE recht, und C liegt auf dem Kreis, dessen Gegenpunkte D und E sind (§. 4, 3). Wenn das gegebene Verhältnis den Wert 1 hat, so ist D die Mitte von AB, E unendlich fern, der unendlich große Kreis eine Gerade (§. 6, 7).

Umgekehrt schließt man: Wenn $AD : DB = AE : BE$ und C auf dem Kreis liegt, dessen Gegenpunkte D und E sind, so ist $GC = CF = BC$, weil FBG recht, folglich $AC : BC = AD : DB$. Es giebt zwei Punkte von solcher Lage, daß ihre Abstände von 3 gegebenen Punkten gegebene Verhältnisse haben. Diese Punkte sind 3 bestimmten Kreisen gemein; sie können nicht real oder vereint sein. S. Trigonom. §. 7, 11.

III. Der kleinere Winkel eines Dreiecks hat die längere Halbierende. Wenn CD die Halbierende des kleinern Winkels C, BG die Halbierende des größern Winkels B, wenn FB und EC parallel mit CD und BG, so ist $AB < AC$, $CF = BC = BE$, $FB > EC$ (§. 5, 5), folglich**)

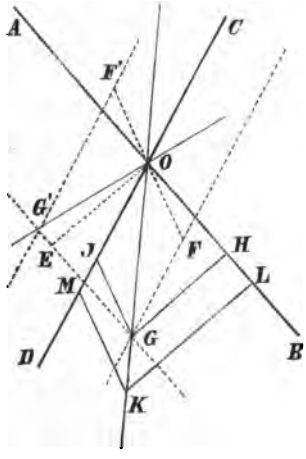
Segmente (Carnot géom. de pos. 225), oder besser eine harmonische Teilung derselben, weil $AE - AB : AB - AD = AE : AD$, d. h. AB das harmonische Mittel zwischen AD und AE ist (Algebra §. 1, 9). Die Paare A, B und D, E heißen harmonische Punkte nach Brianchon lignes du 2. ordre 1817. V.

*) Dieser Kreis ist von Apollonius im 2ten Buch der „ebenen Örter" betrachtet worden, wie Pappus in der Einleitung zum 7ten Buch seiner Sammlung p. 247 berichtet. Vergl. Apollonius ebene Örter von Simson, übers. von Camerer 1796 p. 211 und Chasles aperçu hist. p. 620 d. Übers.

**) Wertheim Brief Frankfurt a. M. 1871. Vergl. Grunert Archiv 13 p. 341, 16 p. 201.

$$CD : FB = AC : AF, \quad BG : EC = AB : AE$$
$$\frac{CD}{BG} = \frac{AC}{AB}\,\frac{FB}{EC}\,\frac{AE}{AF} > 1$$

7. Jeder Punkt, aus dem an zwei gegebene Gerade in gegebenen Richtungen Strecken von gegebenem Verhältnis gezogen werden können, liegt auf einer von zwei bestimmten Geraden, die durch den gemeinschaftlichen Punkt der gegebenen Geraden gehen.*)



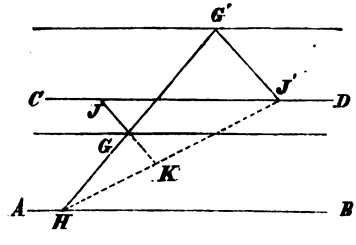
Beweis. Zieht man durch den gemeinschaftlichen Punkt O der gegebenen Geraden AB und CD die Strecken OE und OF, welche die gegebenen Richtungen und das gegebene Verhältnis haben, zieht man ferner durch E und F die Parallelen der gegebenen Geraden, die sich in G schneiden, zieht man dann die Strecken GH und GJ an die Geraden AB und CD parallel mit OE und OF, so ist $GH : GJ$ das gegebene Verhältnis, weil $GH = EO$, $GJ = FO$ als gegenüberliegende Seiten von Parallelogrammen. Ist nun K irgend ein Punkt der Geraden OG, und sind KL, KM parallel mit OE, OF, so hat man

$$KL : GH = OK : OG = KM : GJ \quad (2)$$

folglich $KL : KM = GH : GJ$.

Die andere Gerade OG', deren Punkte dieselbe Eigenschaft haben, wie die Punkte der Geraden OG, wird gefunden, wenn man OF' entgegengesetzt so groß macht, als OF, u. s. w.

Wenn die Geraden AB, CD parallel, und aus dem Punkt G die Strecken GH, GJ gezogen sind, so können aus allen Punkten der Geraden, welche mit AB parallel durch G geht, Strecken von derselben Richtung und von demselben Verhältnis gezogen werden. Es giebt aber noch eine andere Gerade, deren Punkte die angezeigte Eigenschaft besitzen. Macht man GK entgegengesetzt gleich GJ, und zieht die Gerade HK, welche CD



*) Apollonius im 1ten Buch der ebenen Örter. Vergl. Camerer's Übersetzung der Simson'schen Bearbeitung p. 77. Die Teilung des Winkels DOB durch die Geraden OG, OG' wird eine harmonische genannt. Die Paare AB, CD und

in J' schneidet, und durch J' die Gerade, welche mit GK parallel ist und GH in G' schneidet, so hat man

$$G'H : GH = G'J' : GK = G'J' : JG$$

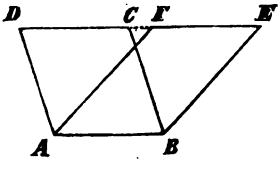
folglich $G'H : G'J' = GH : JG$, und es können auch aus allen Punkten der Geraden, die mit AB parallel durch G' geht, Strecken von derselben Richtung und von demselben Verhältnis gezogen werden.

Es giebt überhaupt 4 Punkte von solcher Lage, daß ihre Abstände von 3 gegebenen Geraden gegebene Verhältnisse haben. Jeder von diesen Punkten ist 3 bestimmten Geraden gemein, welche die Winkel der gegebenen Geraden teilen. Vergl. §. 6, 8.

§. 9. Gleichheit der Flächen von Parallelogrammen und Dreiecken.

1. Die Punkte, welche von einer gegebenen Geraden gleiche Abstände haben, liegen auf einer Geraden, die mit der gegebenen Geraden parallel ist, weil die Normalen einer Geraden parallel sind (§§. 2, 7 und 6, 3). Unter dem Abstand paralleler Geraden (Breite des Streifens) versteht man den Abstand eines beliebigen Punktes der einen Geraden von der andern. Höhe eines Parallelogramms heißt der Abstand einer Seite von der parallelen Seite, die man als Basis betrachtet. Höhe eines Dreiecks heißt der Abstand der Spitze von der als Basis betrachteten Seite. Wenn Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe sind, und ihre Basen auf einer Geraden liegen, so liegen die gegenüberliegenden Seiten oder die Spitzen auf einer Geraden, die mit der ersten Geraden parallel ist.

2. Wenn zwei Parallelogramme (Dreiecke) gleiche Basen und gleiche Höhen haben, so sind sie gleich d. h. sie haben gleiche Flächen, z. B. $ABCD$ und $ABEF$, ABC und ABE.*)



Beweis. Die Dreiecke CBE und DAF sind gleich und ähnlich, weil $CB = DA$, $BE = AF$ und der Winkel $CBE = DAF$ (§. 5, 1). Durch Subtraktion der gleichen Flächen CBE und DAF von der Fläche $ABED$ erhält man die gleichen Flächen

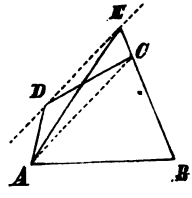
OG, OG' heißen Harmonikalen (Lahire sect. coniques I p. 5) oder harmonisch, faisceau harmonique (Brianchon a. a. O.).

*) Eucl. I, 35—42. Man kann zwei Polygone von gleichen Flächen durch Gerade so zerschneiden, daß die Stücke beider der Reihe nach gleich und ähnlich sind, wie Gerwien 1833 Crelle J. 10 p. 228 nachgewiesen hat. Vergl. Göpel Grun. Archiv 4 p. 237.

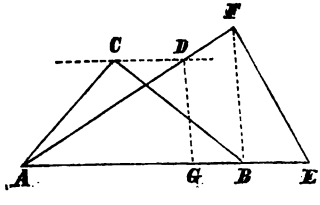
$ABCD$ und $ABEF$. Die Dreiecke ABC und ABE haben gleiche Flächen als Hälften der gleichen Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ (§. 6, 1).

Wenn zwei Parallelogramme oder Dreiecke gleiche Basen und ungleiche Höhen haben, so haben sie ungleiche Flächen. Unter den Dreiecken, welche zwei Seiten von gegebenen Längen haben, ist dasjenige das größte, in welchem diese Seiten einen rechten Winkel einschließen. Wenn zwei Parallelogramme oder Dreiecke gleiche Flächen und gleiche Basen haben, so haben sie gleiche Höhen, u. s. w.

Die Gleichheit der Dreiecke ABC und ABE kann auch unmittelbar nachgewiesen werden, indem man durch A, B, C, E die Normalen zu der Halbierenden des Streifens $BACE$ zieht. Diese Bemerkung ist im Altertum gemacht worden. Vergl. Chasles ap. hist. p. 503 d. Übers.



3. Ein Viereck kann auf verschiedene Weise in ein Dreieck von gleicher Fläche verwandelt werden, z. B. $ABCD = ABE$, wenn BC von der Parallelen mit AC, welche durch D geht, in E geschnitten wird. Denn die Dreiecke ACD und ACE haben gleiche Basen und gleiche Höhen, folglich gleiche Flächen. Ein Fünfeck kann in ein Viereck von gleicher Fläche, ein Polygon in ein Dreieck von gleicher Fläche verwandelt werden.



Wenn der Winkel EAF von den Parallelen BF und GD durchschnitten wird, so ist das Dreieck $ABD = AGF$, weil $DGB = DGF$. Um ein Dreieck zu konstruieren, dessen Fläche die Differenz der Dreiecke AEF und ABC ist, ziehe man CD parallel mit AB und DG parallel mit BF. Dann ist $ABC = ABD = AGF$, $AEF - ABC = GEF$. U. s. w.

4. Ein einem Kreise umgeschriebenes Polygon ist einem Dreieck gleich, dessen Basis dem Perimeter des Polygons und dessen Höhe dem Radius des eingeschriebenen Kreises gleich ist. Denn ein solches Polygon erscheint als Summe der Dreiecke, welche die Seiten (Basen) mit dem Centrum des Kreises (Spitze) bilden; diese Dreiecke sind von gleicher Höhe und werden addiert, indem man ihre Basen addiert. Dabei sind Dreiecke von entgegengesetztem Sinn (§. 7, 1) und ihre Basen mit den entgegengesetzten Zeichen zu nehmen.

Die Kreisfläche ist einem Dreieck gleich, dessen Basis der Peripherie

und deſſen Höhe dem Radius gleich iſt.*) Denn die Fläche eines dem Kreiſe umgeſchriebenen Polygons unterſcheidet ſich von der Kreisfläche um ſo weniger, in je mehr Punkten ſein Perimeter den Kreis berührt. Die Fläche des Polygons iſt von der Fläche des Kreiſes nicht verſchieden, wenn ſein Perimeter den Kreis in allen Punkten berührt und mit dem Kreiſe zuſammenfällt. In der That iſt das angegebene Dreieck größer als ein dem Kreiſe eingeſchriebenes reguläres Polygon; alſo iſt die Differenz zwiſchen der Kreisfläche und dem angegebenen Dreieck geringer als die Differenz zwiſchen der Kreisfläche und dem Polygon, und geringer als ein Rektangel, deſſen Länge der Perimeter des Polygons oder des Kreiſes, und deſſen Breite die beliebig kleine Differenz zwiſchen dem Radius und dem Abſtand einer Seite des Polygons vom Centrum iſt. Eine Größe aber, die kleiner iſt, als eine beliebig kleine Größe, kann von Null nicht verſchieden ſein.

Durch dieſelbe Betrachtung findet man, daß ein Kreisſektor einem Dreieck gleich iſt, deſſen Baſis dem Bogen und deſſen Höhe dem Radius gleich iſt.

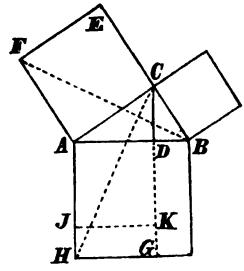
5. Unter dem Quadrat einer Strecke verſteht man ein Quadrat, deſſen Seite der Strecke gleich iſt. Unter dem Rektangel aus zwei Strecken verſteht man ein Rektangel, in welchem zwei folgende Seiten den gegebenen Strecken gleich ſind.

Wenn man ein rechtwinkeliges Dreieck durch die Normale aus der Spitze des rechten Winkels zur Hypotenuſe teilt, ſo iſt

das Quadrat einer Kathete gleich dem Rektangel aus der Hypotenuſe und dem der Kathete anliegenden Abſchnitt derſelben;

das Quadrat der Hypotenuſe gleich der Summe der Quadrate der Katheten;

das Quadrat der Normale gleich dem Rektangel aus den Abſchnitten der Hypotenuſe.**)



Beweis. Das Quadrat der Kathete AC iſt an Fläche 2mal ſo groß als das Dreieck FAB, das mit ihm gleiche Baſis und Höhe hat. Das Rektangel $AHGD$ aus der Hypotenuſe AB und dem an AC liegenden Stück AD der Hypotenuſe iſt 2mal ſo groß als das Dreieck AHC, das mit ihm gleiche Baſis und Höhe hat. Nun ſind die Dreiecke FAB, AHC an

*) Archimedes Cyclom. 1.

**) Eucl. I, 47. II, 14 und X, 33 lemma 1. Dieſer Satz wird von alters her der Pythagoreiſche Lehrſatz genannt.

Fläche gleich, weil sie gleich und ähnlich sind (§. 5, 1), also haben das Quadrat von AC und das Rektangel aus AB und AD gleiche Fläche.

Das Quadrat von AB ist die Summe von zwei Rektangeln, deren erstes aus AB und AD, deren zweites aus AB und DB gebildet ist. Jenes ist dem Quadrat von AC, dieses dem Quadrat von CB gleich.

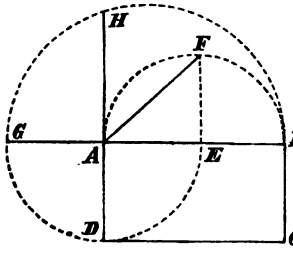
Das Quadrat von CD wird gefunden, wenn man das Quadrat von AC um das Quadrat von AD vermindert, weil das Dreieck ACD rechtwinkelig ist. Nun ist das Quadrat von AC dem Rektangel $AHGD$ gleich, und wenn man davon das Quadrat von AD subtrahiert, so bleibt das Rektangel $JHGK$, in welchem $JH = AH - AJ = AB - AD = DB$, $HG = AD$ ist. Also ist das Quadrat von CD dem Rektangel aus AD und DB gleich.

6. Die Aufgaben, ein Quadrat zu konstruieren, dessen Fläche der Summe oder der Differenz gegebener Quadrate, oder einem gegebenen Rektangel, oder einem Vielfachen oder einem Teile eines gegebenen Quadrats gleich ist, finden zufolge des Pythagoreischen Lehrsatzes ihre Lösungen durch Konstruktion bestimmter rechtwinkeliger Dreiecke.

Um die Summe von zwei Quadraten in ein Quadrat zu verwandeln, konstruiert man das rechtwinkelige Dreieck, dessen Katheten die Seiten der gegebenen Quadrate sind; die Hypotenuse ist die Seite des gesuchten Quadrats.

Um die Differenz von zwei Quadraten in ein Quadrat zu verwandeln, konstruiert man das rechtwinkelige Dreieck, dessen erste Kathete und Hypotenuse die Seiten der gegebenen Quadrate sind; die zweite Kathete ist die Seite des gesuchten Quadrats.

Um das Rektangel $ABCD$ in ein Quadrat zu verwandeln, macht man auf AB die Strecke $AE = AD$, konstruiert den Halbkreis, dessen Gegenpunkte A und B sind, und die Normale zu AB durch E, welche den Halbkreis in F schneidet; dann ist AF die Seite des gesuchten Quadrats. Denn der Winkel AFB ist recht (§. 4, 2) und EF normal zu AB, folglich das Quadrat von AF dem Rektangel aus AB und AE oder AD gleich.



Oder man macht auf der Verlängerung von BA die Strecke $AG = AD$, konstruiert den Halbkreis, dessen Gegenpunkte B und G sind, und die Normale zu GB durch A, welche den Halbkreis in H schneidet; dann ist AH die Seite des gesuchten Quadrats. Denn der Winkel GHB ist recht und

AH normal zu GB, folglich das Quadrat von AH dem Rektangel aus AB und AG oder AD gleich.

Um das Quadrat zu konstruieren, welches $n$mal oder den $n$ten Teil so groß ist als ein gegebenes Quadrat, hat man das Rektangel, welches $n$mal oder den $n$ten Teil so groß ist als das gegebene Quadrat, in ein Quadrat zu verwandeln.

7. Der Perimeter einer geschlossenen Figur kann auf zwei verschiedene Arten durchlaufen werden. Der Ausdruck des Perimeters $ABCD$ bedeutet den Weg von A über B bis C, D, A; der Ausdruck $ADCB$ bedeutet den Weg von A über D bis C, B, A. Ein Punkt, der zur Linken desjenigen liegt, der ein Stück des einen Weges zurücklegt, befindet sich zur Rechten desjenigen, der den entgegengesetzten Weg zurücklegt. Die Ausdrücke $ABCD$, $BCDA$, u. s. w. sind gleichbedeutend.

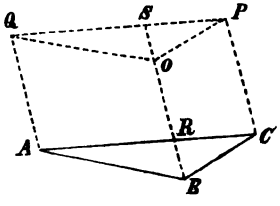
Die Fläche des Dreiecks ABC wird von der Geraden AB beschrieben, wenn diese um A sich so dreht, daß B den Weg von B nach C zurücklegt. Nimmt man die durch Drehungen in einem bestimmten Sinn (linksum) beschriebenen Flächen positiv, so hat man die in dem entgegengesetzten Sinn beschriebenen Flächen negativ zu nehmen. Hiernach sind die Ausdrücke einer Fläche ABC, BCA, CAB gleichbedeutend und eines Zeichens, dagegen sind ABC und ACB, u. s. w. entgegengesetzt gleich.

Wenn O ein beliebiger Punkt auf der Ebene des Dreiecks ABC ist, und die Strecke CP mit BO einerlei Richtung und Länge hat, so ist

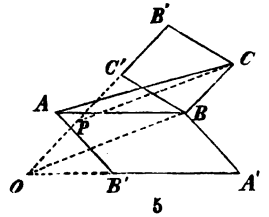
$$ABO + BCO = ACP$$

wobei die Dreiecke dieselben Zeichen oder die entgegengesetzten Zeichen haben, je nachdem sie eines Sinnes sind oder nicht (§. 7, 1).

Beweis. Vollendet man das Parallelogramm $ACPQ$ und bezeichnet die Durchschnitte von BO mit AC und PQ durch R und S, so hat man $QABO = QARS$, $CPOB = CPSR$ (2), folglich durch Addition $ABOQ + BCPO = ACPQ$, also auch $ABO + BCO = ACP$. Wenn O im Nebenwinkel des Winkels CBA liegt, so sind die Dreiecke ABO und BCO entgegengesetzten Sinnes und Zeichens; in der That ist $ACPQ$ die Differenz von Parallelogrammen, die den Parallelogrammen $ABOQ$ und $BCPO$ gleich sind.



Wenn man auf zwei Seiten eines Dreiecks AB, BC Parallelogramme konstruiert, und den Durchschnitt der Seiten, die mit AB und BC

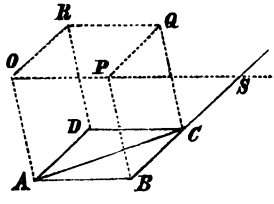


parallel sind, durch O bezeichnet, so ist bei Bestimmung der Zeichen nach der obigen Regel die Summe der Parallelogramme einem Parallelogramme gleich, dessen auf einander folgende Seiten mit AC und BO einerlei Richtung und Länge haben. Denn die Parallelogramme sind 2mal so groß als die Dreiecke ABO und BCO, u. s. w.*)

8. Wenn O ein beliebiger Punkt auf der Ebene des Parallelogramms $ABCD$ ist, so hat man mit Rücksicht auf die Regel der Zeichen (7)

$$ABO + ADO = ACO$$**)

Beweis. Haben BP, CQ, DR mit AO einerlei Richtung und gleiche Länge, so sind $ABPO$, $BCQP$, $ACQO$ Parallelogramme und zwar (7)



$$ABPO + BCQP = ACQO$$

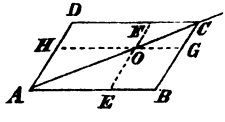
Nun ist $BCQP$ von $ADRO$ an Größe und Sinn nicht verschieden, folglich

$$ABPO + ADRO = ACQO$$
$$ABO + ADO = ACO$$

Anmerkung. Für jeden Punkt auf der Ebene des Parallelogramms $ABCD$ ist

$$ABO + CDO = \tfrac{1}{2} ABCD$$

Wenn die parallel mit AB durch O gezogene Gerade die Seite BC in S schneidet, so ist $ABO + CDO = ABS + CDS = ABC$.



Wenn O auf der Diagonale AC liegt, so ist $ACO = 0$, $ABO = DAO$. Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man durch O die Geraden EF und GH parallel mit BC und CD zieht. Dann ist $ABC = CDA$, $AEO = OHA$, $OGC = CFO$, folglich durch Subtraktion $EBGO = FDHO$ (Eucl. I, 43). Durch Addition von $AEOH$ findet man $ABGH = AEFD$, $ABO = DAO$.

9. I. Wenn O ein beliebiger Punkt auf der Ebene des Dreiecks ABC ist, so hat man mit Rücksicht auf die Regel der Zeichen

$$OAB + OBC + OCA = ABC$$***)

Beweis. Wenn O in dem Dreieck ABC liegt, so sind die Dreiecke OAB, OBC, OCA von einerlei Sinn, und ABC ist die Summe derselben. Wenn O in dem Winkel BAC jenseits BC liegt, so ist OBC

*) Dieser Satz ist von Pappus (coll. math. IV, 1) in beschränkterer Weise mitgeteilt worden. Die Regel der Zeichen verdankt man Möbius (baryc. Calcul 17 und anderwärts).

**) Varignon's Lehrsatz. Mém. de Paris 1719 p. 66. Vgl. Möbius Statik 34.

***) Monge J. de l'éc. polyt. Cah. 15 p. 68. Möbius baryc. Calc. 18.

den Dreiecken OAB, OCA entgegengesetzt, und man hat nach der Regel der Zeichen

$$OAB + OBC + OCA = OAB - OCB + OCA = ABC$$

Wenn aber O in dem Scheitelwinkel von BAC liegt, so sind die Dreiecke OAB, OCA dem Dreieck OBC entgegengesetzt, und man hat nach der Regel der Zeichen

$$OAB + OBC + OCA = -OBA + OBC - OAC = ABC$$

II. Wenn $ABC \ldots MNA$ der Perimeter einer beliebigen geschlossenen Planfigur ist, so ist für jeden beliebigen Punkt O derselben Ebene die Summe der Dreiecksflächen

$$\Sigma = OAB + OBC + \ldots + OMN + ONA$$

von derselben Größe.

Beweis. Für einen andern Punkt P der Ebene hat man

$$\begin{aligned} PAB &= OAB + OBP + OPA \\ PBC &= OBC + OCP + OPB \\ &\cdots \\ PMN &= OMN + ONP + OPM \\ PNA &= ONA + OAP + OPN \end{aligned}$$

folglich durch Addition

$$PAB + PBC + \ldots + PMN + PNA = \Sigma$$

weil die Glieder der letzten Kolonne den Gliedern der vorhergehenden Kolonne entgegengesetzt gleich sind, $OBP + OPB = 0$ (7), u. s. w.

10. Der Verlauf eines Perimeters, besonders wenn dieser sich selbst schneidet, wird dadurch kenntlich gemacht, daß man den Perimeter auf einer Seite schattiert (sein „linkes Ufer" zur Linken dessen, welcher ihn dem gegebenen Ausdruck gemäß zurücklegt. Vergl. §. 2, 9). Ein sich selbst schneidender Perimeter teilt die Ebene in mehrere nebeneinanderliegende Zellen, deren Perimeter sich selbst nicht schneiden, φ_1, φ_2, φ_3, .. und den von diesen Zellen ausgeschlossenen unendlichen Teil φ_0.

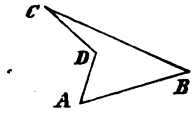
Ein bestimmtes unendlich kleines Flächenstück der Ebene wird von der Strecke OA (9), während A den gegebenen Perimeter durchläuft, im allgemeinen mehrmal überstrichen, $m$mal linksum, $n$mal rechtsum, und hat demnach (7) in der Summe Σ einen bestimmten Coefficienten $m - n$.

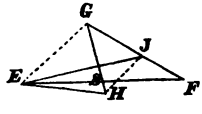
Wenn zwei unendlich kleine Flächenstücke derselben Zelle, zwischen denen der gegebene Perimeter nicht hindurchgeht, durch ω und ω' bezeichnet werden, und wenn der willkürliche Punkt O auf der verlängerten Geraden $\omega\omega'$ angenommen wird, so kann die Strecke OA nicht ω überstreichen, ohne zugleich ω' zu überstreichen. Also haben ω und ω' in Σ denselben Coefficienten, den Coefficienten der Zelle, in der ω und ω' liegen.

Wenn zwei unendlich kleine Flächenstücke benachbarter Zellen, zwischen denen der gegebene Perimeter einmal von F nach G hindurchgeht, durch ω und ω'' bezeichnet werden, wenn ω'' auf der schattierten, ω auf der hellen Seite des Perimeters FG liegt und O auf der verlängerten Geraden $\omega\omega''$ angenommen wird, so kann die Strecke OA nicht ω überstreichen, ohne zugleich ω'' zu überstreichen; dagegen wird ω'' einmal allein ohne ω überstrichen, während A das Stück FG des Perimeters zurücklegt. Daher ist in Σ der Coefficient von ω'' auf der dunkeln Seite FG um 1 größer als der Coefficient von ω auf der hellen Seite, vorausgesetzt, daß die positiven Flächen durch linksum gehende Drehungen beschrieben werden.

Indem man nun ausgehend von der unendlichen Fläche φ_0, deren Coefficient 0 ist, nach und nach in die einzelnen Zellen eintritt, bildet man aus dem Coefficienten der verlassenen Zelle den Coefficienten der betretenen Zelle durch Addition oder Subtraktion von 1, je nachdem man den Perimeter von rechts nach links (von der hellen Seite nach der dunkeln) oder entgegengesetzt überschritten hatte. Bezeichnet man die Coefficienten der Zellen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ durch $c_1, c_2, \ldots$, so hat man endlich vollständig $\Sigma = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots$

Die von der Lage des Punktes O unabhängige Summe Σ der Flächen, welche die Strecke OA überstreicht, während der Punkt A den gegebenen Perimeter durchläuft, ist der von dem Perimeter eingeschlossenen Fläche gleich, wenn der Perimeter sich selbst nicht schneidet und nicht mehr als eine Zelle bildet ($c_1 = 1$, $\Sigma = \varphi_1$). Dieselbe Summe Σ dient daher auch zur Definition der Fläche einer mehrzelligen Figur, deren Perimeter sich selbst schneidet.*)



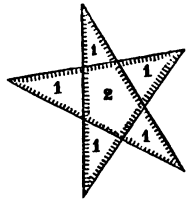


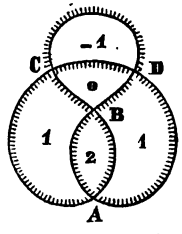
Als Fläche des Vierecks $ABCD$ ergiebt sich die Summe $ABC + ACD$ d. i. $ABC - ADC$, wenn man den willkürlichen Punkt O mit A vereinigt. Als Fläche des Vierecks $EFGH$ ergiebt sich die Differenz der Zellen $SFG - SEH$, wenn man O nach dem Durchschnitt S von EF und GH verlegt. Diese Fläche ist Null, wenn EG und FH parallel sind (2). Zieht man HI parallel mit EG, so ist $EHG = EIG$, also $EFGH = EFI$ (3). Auch ist das Viereck $EFGH$ einem Dreieck gleich, in welchem zwei

*) Über die Flächen von Figuren, deren Perimeter sich selbst schneiden, sind die ersten Aufschlüsse von Meister (Comm. Gott. 1769 p. 148) gegeben worden; gelegentliche Äußerungen finden sich bei Lexell (Acta Petrop. 1781, I p. 125. 1782, I p. 91) und L'Huilier de relatione mutua p. 23. Alle Arten von Polygonen

Seiten mit den Diagonalen EG und FH einerlei Richtung und Länge haben (7).

Eine Zelle, deren Coefficient 2 ist, wird von Zellen umgeben, deren jede den Coefficienten 1 hat, u. s. w. Daher kann die Fläche einer Figur auf eine bestimmte Art durch einfache Zellen (mit dem Coefficienten 1 oder -1) ausgedrückt werden.*) Die Perimeter dieser Zellen umfassen einfach alle Teile des gegebenen Perimeters; die schattierte Seite des Perimeters einer solchen Zelle ist zugleich die schattierte Seite von den Teilen des ganzen Perimeters, welche den Perimeter der Zelle ausmachen. Das Sternfünfeck (Pentagramm, Drudenfuß) besteht aus zwei Zellen, dem innern Fünfeck und dem äußern Zehneck. Die runde Figur hat die Zellen ABA, $ADBCA$, CDC; die dritte Zelle, bei der die schattierte Seite des Perimeters außen liegt, ist negativ.

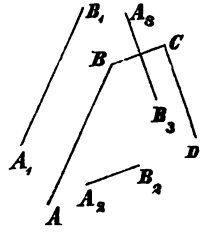




11. Wenn die gegebenen Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, .. der Reihe nach mit den Seiten eines Polygons von gleicher Länge und Richtung sind, so ist für jeden beliebigen Punkt O die Summe der Flächen $A_1B_1O + A_2B_2O + A_3B_3O + ..$ von derselben Größe. Wenn aber jene Bedingung nicht erfüllt wird, so ist dieselbe Summe für alle Punkte O, welche von einer bestimmten Geraden gleiche Abstände haben, von derselben Größe.**)

Beweis. Aus einem willkürlich angenommenen Punkt A ziehe man AB, BC, CD, .., FG der Reihe nach von gleicher Länge und Richtung mit den gegebenen Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, .., so daß A_1B_1BA, A_2B_2CB, .. Parallelogramme sind (§. 6, 3). Dann ist (8)

$$A_1B_1O = \tfrac{1}{2}A_1B_1BA + ABO$$
$$A_2B_2O = \tfrac{1}{2}A_2B_2CB + BCO$$
$$A_3B_3O = \tfrac{1}{2}A_3B_3DC + CDO$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$



umfaßt die von Gauß in Schumachers Übersetzung von Carnot's Géom. de pos. II p. 362 gegebene Formel zur Berechnung ihrer Flächen. Eingehende Behandlung hat dieser Gegenstand durch Möbius erhalten (Baryc. Calc. 165 Anm. Statik 45. Berichte der Leipz. Ges. d. W. 1865 p. 42).

*) Vergl. die aus Jacobis Nachlaß von Hermes mitgeteilten Bemerkungen. Borchardts J. 65 p. 173.

**) Apollonius im 1ten Buch der ebenen Örter. Vergl. Simsons Bearbeitung

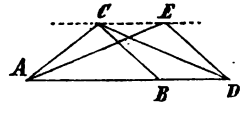
folglich (10)

$$A_1B_1O + A_2A_2O + \ldots = \tfrac{1}{2}A_1B_1BA + \tfrac{1}{2}A_2B_2CB + \ldots + ABC \ldots FG + AGO$$

Dieſer Wert iſt unabhängig von O, wenn G mit A zuſammenfällt; er behält ſeine Größe, ſo lange als das Dreieck AGO ſeine Fläche, mithin O ſeinen Abſtand von der Strecke AG behält.

§. 10. Flächenmeſſung.

1. Wenn zwei Dreiecke (Parallelogramme) gleiche Höhen haben, ſo iſt das Verhältnis ihrer Flächen dem Verhältnis ihrer Baſen gleich. Eucl. VI, 1.



Beweis. Das Verhältnis der Flächen $ABC : ADE$ iſt dem Verhältnis $ABC : ADC$ gleich, weil nach der Vorausſetzung die Dreiecke ADE, ABC, ADC gleiche Höhen, folglich ADE und ADC gleiche Flächen haben (§. 9, 2). Zieht man die Geraden von C nach den Punkten, welche AD in m gleiche Teile teilen, ſo teilt man ADC in m Dreiecke von gleichen Baſen und Höhen, alſo auch von gleichen Flächen. Wenn nun AB den $m$ten Teil von AD $n$mal enthält, ſo enthält auch ABC den $m$ten Teil von ADC $n$mal, d. h.

$$ABC : ADC = n : m = AB : AD$$

Wenn aber AB den $m$ten Teil von AD mehr als $n$mal und weniger als $(n+1)$mal enthält, d. h.

$$n : m < AB : AD < n+1 : m$$

ſo iſt auch

$$n : m < ABC : ADC < n+1 : m$$

Die Differenz der Verhältniſſe $(ABC : ADC) - (AB : AD)$ iſt geringer als der beliebig kleine Bruch $1 : m$, alſo von Null nicht verſchieden (Algebra §. 1, 2).

Parallelogramme verhalten ſich zu einander, wie Dreiecke, welche Hälften der Parallelogramme ſind.

2. Wenn zwei Dreiecke (Parallelogramme) gleiche Baſen haben, ſo iſt das Verhältnis ihrer Flächen dem Verhältnis ihrer Höhen gleich.

Beweis. Zieht man die Normale zur Baſis AB durch B, und die Geraden CE, DF parallel mit AB, ſo erhält man $ABE = ABC$,

---

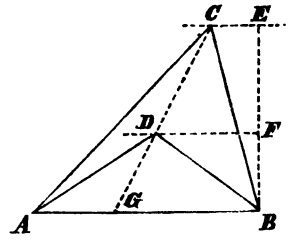
überſ. von Camerer p. 92 ff. Denſelben Satz hat Fermat Isagoge u. L'Huilier polygonométrie 1789 p. 92 genauer behandelt, erſchöpfend aber erſt Möbius Statik 46.

$ABF = ABD$ (§. 9. 2). Nun ist $BEA : BFA = BE : BF$ (1), folglich $ABC : ABD = BE : BF$.

Zusätze. Nach §. 9, 9 hat man

$$\frac{ABD}{ABC} + \frac{BCD}{BCA} + \frac{CAD}{CAB} = 1$$

d. h. wenn man die Abstände eines beliebigen Punktes von den Seiten eines Dreiecks der Reihe nach durch die parallelen Höhen dividiert, so ist die Summe der Quotienten = 1.

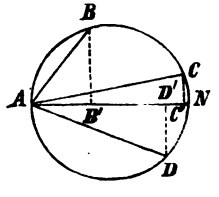


Wenn zwei Dreiecke ABC, ABD die Basis AB gemein haben, so ist das Verhältnis ihrer Flächen dem Verhältnis gleich, nach welchem die Strecke CD durch AB geteilt wird. Wenn die Strecke CD von AB in G geschnitten wird, so ist $ABC : ABD = CG : DG$ zufolge der Gleichungen (1)

$$AGC = (CG : DG)AGD, \quad BGC = (CG : DG)BGD$$

Demnach ist $CG : DG = EB : FB$, wie §. 8, 4 aus andern Gründen gefunden wurde.

Die Quadrate der von einem Punkte eines Kreises ausgehenden Sehnen verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die Strecken, die auf dem Diameter des Punktes von den Normalen aus den Endpunkten der Sehnen abgeschnitten werden. Wenn nämlich AN ein Diameter ist, so sind die Dreiecke ABN, ACN, ADN rechtwinkelig (§. 4, 2). Sind nun BB', CC', DD' normal zu AN, so sind die Quadrate von AB, AC, AD, AN den Rektangeln auf der Basis AN gleich, deren Höhen AB', AC', AD', AN sind (§. 9, 5). Diese Rektangel haben eine gemeinschaftliche Basis und verhalten sich zu einander, wie AB', AC', AD', AN.



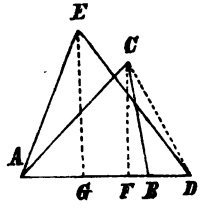
3. Das Verhältnis der Flächen von zwei Dreiecken (Parallelogrammen) ist das Produkt des Verhältnisses ihrer Basen mit dem Verhältnis ihrer Höhen. Eucl. VI, 23.

Beweis. Indem man das Dreieck ADC zu Hilfe nimmt, welches mit ABC gleiche Höhe, mit ADE gleiche Basis hat, findet man

$$ABC : ADC = AB : AD \quad (1)$$
$$ADC : ADE = FC : GE \quad (2)$$

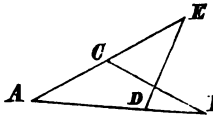
folglich durch Multiplikation (Algebra §. 1, 3)

$$ABC : ADE = (AB : AD)(FC : GE)$$



Zusätze. Wenn bei zwei Dreiecken (Parallelogrammen) die Verhältnisse der Basen und der Höhen reciprok sind, so hat das Verhältnis der Flächen den Wert 1, d. h. die Flächen sind einander gleich.

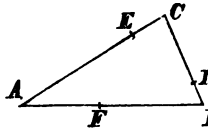
Wenn zwei Dreiecke (Parallelogramme) einen Winkel gleich haben, so ist das Verhältnis ihrer Flächen das Produkt der Verhältnisse, welche die jenen Winkel einschließenden Seiten des einen Dreiecks zu den den gleichen Winkel einschließenden Seiten des andern Dreiecks haben.



Man findet mit Hilfe des Dreiecks ADC

$$ABC : ADE = (AB : AD)(AC : AE)$$

Wenn dem Dreieck ABC das Dreieck DEF so eingeschrieben ist, daß $BD = \alpha . BC$, $CE = \beta . CA$, $AF = \gamma . AB$, so ist



$$DEF : ABC = \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

Denn man hat

$$ADE : ABC = (ADE : ADC)(ADC : ABC) = (1-\beta)(1-\alpha)$$
$$AEF : ABC = -(1-\beta)\gamma$$
$$AFD : ABC = (AFD : ABD)(ABD : ABC) = \gamma\alpha$$

Nun ist $DEF = ADE + AEF + AFD$ (§. 9, 9), folglich

$$DEF : ABC = (1-\beta)(1-\alpha) - (1-\beta)\gamma + \gamma\alpha$$

übereinstimmend mit dem angegebenen Wert. Vergl. Steiner Crelles J. 3 p. 201.

4. Die Fläche einer Figur wird durch ihr Verhältnis zur Flächeneinheit angegeben. Als Flächeneinheit wird gewöhnlich die Quadrateinheit gebraucht, d. h. ein Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist. Denn ein Quadrat ist nicht nur als reguläre Figur durch eine Seite bestimmt, sondern es gehört auch zu den Parallelogrammen, deren Verhältnisse zu einander nach (3) gefunden werden. Die Angabe der Fläche einer Figur heißt die Quadratur (τετραγωνισμός) der Figur.

Man sagt abkürzend Größe statt Verhältnis der Größe zur Einheit, mithin Figur statt Verhältnis ihrer Fläche zur Quadrateinheit, Basis statt Verhältnis der Basis zur Längeneinheit, u. s. f. In dieser Bedeutung hat man (vergl. Herons geodätische Schriften)

Parallelogramm = Basis × Höhe = Länge × Breite
Rektangel = Produkt von 2 folgenden Seiten
Quadrat = (Seite)^2
Dreieck = $\frac{1}{2}$Basis × Höhe
Kreisfläche = $\frac{1}{2}$Peripherie × Radius
Kreissektor = $\frac{1}{2}$Bogen × Radius

Beweis. Das Verhältnis eines Parallelogramms zur Quadrateinheit wird gefunden, indem man das Verhältnis der Basis des Parallelogramms zur Längeneinheit mit dem Verhältnis der Höhe des Parallelogramms zur Längeneinheit multipliciert (3). Bei dem Parallelogramm werden Basis und Höhe auch Länge und Breite desselben genannt. Bei einem Quadrat sind Länge und Breite einander gleich. Ein Dreieck hat halb soviel Fläche, als ein Parallelogramm von gleicher Basis und von gleicher Höhe (§. 9, 2). Die Fläche des Kreises oder eines Kreissektors kann als Fläche eines Dreiecks aufgefaßt werden (§. 9, 4).

Wenn die Basis und die Höhe des Parallelogramms in Fußen gegeben sind, so erhält man die Fläche desselben in Quadratfußen. Um die Fläche des Parallelogramms in Quadratzollen zu finden, nimmt man die Basis und die Höhe desselben in Zollen, u. s. w. Da ein Fuß 12 Zoll hat, so hat ein Quadratfuß 12^2 d. i. 144 Quadratzoll.

5. Das Rektangel aus zwei Strecken (§. 9, 5) wird in der angegebenen Bedeutung (4) durch das Produkt der Strecken ausgedrückt. Umgekehrt kann das Produkt von zwei Strecken, d. i. das Produkt ihrer Verhältnisse zur Längeneinheit, als Fläche eines Rektangels vorgestellt werden.

Das Rektangel, dessen Basis $AB+BC$ und dessen Höhe AD ist, ist die Summe der Rektangel, von denen das eine die Seiten AB und AD, das andere die Seiten BC und AD hat. Folglich ist (4)

$$(AB+BC).AD = AB.AD+BC.AD$$

in Übereinstimmung mit den Regeln der arithmetischen Multiplikation (Allg. Arithm. §. 9). Diese Regeln wurden im Altertum geometrisch durch Flächenvergleichung abgeleitet (Eucl. II).

Die Formel für die Fläche eines Parallelogramms lehrt aus der Fläche und Basis des Parallelogramms seine Höhe berechnen. Wenn die Fläche f Quadrateinheiten, die Basis a Längeneinheiten hat, so hat die Höhe $(f:a)$ Längeneinheiten.

Der Pythagoreische Lehrsatz (§. 9, 5) enthält die Gleichungen

$$AC^2 = AD.AB, \quad BC^2 = DB.AB$$

$$AC^2+BC^2 = (AD+DB).AB = AB^2$$

$$DC^2 = AD.DB$$

auf welche sich Berechnungen gründen lassen. Haben die Katheten a, b, die Hypotenuse c Längeneinheiten, so ist $a^2+b^2 = c^2$, folglich

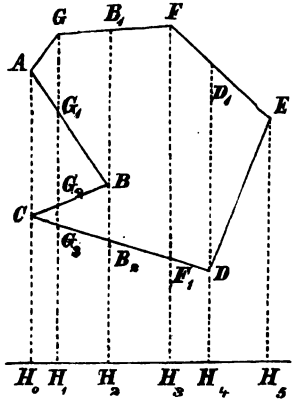
$$c = \sqrt{a^2+b^2}, \quad a = \sqrt{c^2-b^2}$$

Hat die Seite eines Quadrats a Längeneinheiten, so hat die Diagonale $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ Längeneinheiten. Das Verhältnis der

Diagonale zur Seite eines Quadrats ist $\sqrt{2}$, mithin irrational; die genannten Strecken sind inkommensurabel (Algebra §. 1, 1).

Hat die Seite eines gleichseitigen Dreiecks a Längeneinheiten, so hat die Höhe $\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ Längeneinheiten, und die Fläche $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ Quadrateinheiten.

6. Die Fläche eines Polygons wird gefunden, indem man durch seine Eckpunkte Parallelen von beliebiger Richtung zieht, davon jede Strecke, die innerhalb des Polygons liegt, mit dem Abstand der folgenden Parallele von der vorhergehenden multipliciert, und die Summe der Produkte durch 2 dividiert.*) $ABCDEFG = \frac{1}{2}\{(GG_1 + G_2G_3)H_0H_2 + B_1B_2 \cdot H_1H_3 + FF_1 \cdot H_2H_4 + D_1D \cdot H_3H_5\}$



Beweis. Die Dreiecke G_1GA, GG_1B_1 an der Basis GG_1, und die Dreiecke G_3G_2C, G_2G_3B an der Basis G_2G_3 haben die Höhen H_0H_1, H_1H_2; ihre Summe ist (4)

$$\frac{1}{2}(GG_1 + G_2G_3) \cdot H_0H_2$$

Ebenso findet man für die an der Basis B_1B_2 liegenden Dreiecke die Summe $BB_1G_1 + B_2BG_3 + B_1B_2F = \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot H_1H_3$, ferner $F_1FB_2 + FF_1D_1 = \frac{1}{2}FF_1 \cdot H_2H_4$, u. s. w.

7. Für jeden Punkt der Ebene findet man, wenn man seine Abstände von den Seiten eines Polygons der Reihe nach mit den Seiten multipliciert und die Produkte summiert, dieselbe Summe, nämlich die doppelte Fläche des Polygons, vorausgesetzt daß die Zeichen der Produkte mit den Zeichen der Dreiecke übereinstimmen, auf welche die Produkte sich beziehen (§. 9, 10).

Ist das Polygon gleichseitig, so findet man für jeden Punkt der Ebene, wenn man seine Abstände von den Seiten gemäß der obigen Regel summiert, dieselbe Summe.

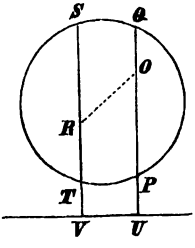
---

*) Die Teilung einer Fläche durch Parallelen (Ordinaten) zum Zwecke ihrer Quadratur kommt bei den Geometern der Platonischen Schule und bei Archimedes vor. Die obige einfache Regel wird in J. T. Mayers prakt. Geom. III, §. 280 und Meier Hirsch geom. Aufg. I, §. 25 bei Behandlung dieses Problems noch nicht angetroffen; sie ist aber aus der Formel ableitbar, welche Gauß für die Fläche eines Polygons in Schumachers Übersetzung von Carnot's géom. de pos. II p. 362 gegeben hat.

Wenn die Normalen aus einem Punkt O zu den Seiten eines gleichſeitigen Polygons von einem Kreiſe geſchnitten werden, die erſte in P_1 und Q_1, die zweite in P_2 und Q_2, .., ſo iſt

$$OP_1 + OP_2 + .. = OQ_1 + OQ_2 + ..$$

vorausgeſetzt, daß die Zeichen ſowohl von OP_1, OP_2, .., als auch von OQ_1, OQ_2, .. mit den Zeichen der Dreiecke (§. 9, 7) übereinſtimmen, welche O mit den Seiten des Polygons bildet.*) Beſtimmt man den Punkt R ſo, daß das Centrum des Kreiſes die Mitte von OR iſt, und zieht man durch R die Sehne ST parallel mit PQ, ſo ſind S und T die Gegenpunkte von P und Q, weil die Sehnen gleiche Abſtände vom Centrum, folglich gleiche Länge und gleiche Bogen haben. Daher ſind die Strecken OP, OQ den Strecken RS, RT gleich und die Winkel QPT, PTS recht. Wenn ferner die parallelen Sehnen normal zu UV ſtehn, ſo iſt $UVTP$ ein Rektangel und UP, VT ſind einander gleich. Liegen nun U_1 und V_1, U_2 und V_2, .. auf den Seiten eines gleichſeitigen Polygons, ſo iſt nach dem Obigen



$$OU_1 + OU_2 + OU_3 + .. = RV_1 + RV_2 + RV_3 + ..$$

mithin, weil $U_1P_1 = V_1T_1$, u. ſ. w.

$$OP_1 + OP_2 + OP_3 + .. = RT_1 + RT_2 + RT_3 + ..$$
$$= OQ_1 + OQ_2 + OQ_3 + ..$$

8. Es ſeien l_1, l_2, l_3, .. gegebene Gerade, c_1, c_2, c_3, .. gegebene Zahlen, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, .. Strecken von l_1, l_2, l_3, .., die ſich der Reihe nach wie die Zahlen c_1, c_2, c_3, verhalten, p_1, p_2, p_3, .. die Abſtände eines beliebigen Punktes O von den gegebenen Geraden, deren Zeichen mit den Zeichen der Dreiecke A_1B_1O, A_2B_2O, A_3B_3O, .. übereinſtimmen. Wenn nun die Summe $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + ..$ von gegebener Größe ſein ſoll, ſo giebt es im allgemeinen unendlich viel Punkte O, die Punkte einer beſtimmten Geraden, welche der Forderung genügen.**)

Beweis. Nach den gemachten Vorausſetzungen iſt (4) $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + .. = 2(A_1B_1O + A_2B_2O + A_3B_3O + ..)$. Die Summe

*) Beſondere Fälle dieſes Satzes haben Jacob Gregory und Auguſt bekannt gemacht. Vergl. Kunze Planim. p. 166.

**) Apollonius (oben §. 9, 11). Vergl. Meier Hirſch geom. Aufg. II, 251. Den beſondern Fall, in welchem 3 Gerade gegeben, und die zugehörigen Zahlen Einheiten ſind, hat Timmermanns (Gerg. Ann. 18 p. 217) betrachtet, und C. J. A. Jacobi (Entfernungsörter des Dreiecks, Progr. der Landesſchule Pforta 1851 und 1854) weit ausgeführt.

$2(A_1B_1O+..)$ kann insbesondere einen von O unabhängigen Wert haben (§. 9, 11); dann ist die Forderung von solchen Punkten O, für welche die Summe $c_1p_1+..$ einen beliebig gegebenen Wert erhielte, sich selbst widersprechend. Im allgemeinen hat aber die Summe $2(A_1B_1O+..)$ einen Wert, der das von O mit einer bestimmten Strecke (AG) gebildete Dreieck um eine bestimmte Größe übertrifft. Bei hinreichender Höhe dieses Dreiecks hat also auch die Summe $c_1p_1+..$ den geforderten Wert, und behält denselben, wenn O seinen Abstand von der Basis (AG) behält.

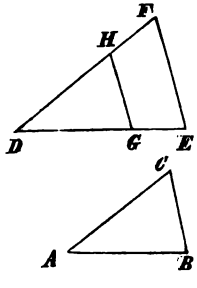
§. 11. Ähnlichkeit der Dreiecke.

1. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie *ähnlich*, d. h. die Seiten des einen Dreiecks haben der Reihe nach zu den Seiten des andern Dreiecks, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, gleiche Verhältnisse, und das Verhältnis der Flächen ist das Quadrat des Verhältnisses von Seiten der Dreiecke, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen. Eucl. VI, 4—7. 19.

Wenn der Winkel $A = D$, $B = E$, so ist $ABC \sim DEF$ (vergl. §. 5, 1) d. h.

$BC : EF$ gegenüber den gleichen Winkeln A und D
$= CA : FD$ " " " " B " E
$= AB : DE$ " " " " C " F

und $ABC : DEF = (BC : EF)^2$.



Beweis. Macht man auf DE die Strecke $DG = AB$ und zieht GH parallel mit EF, so ist $DG : DE = GH : EF = HD : FD$ (§. 8, 2). Aus der Bemerkung, daß die Winkel HGD und FED gleich sind, folgt aber in Verbindung mit den Voraussetzungen, daß die Dreiecke ABC und DGH gleich und ähnlich sind (§. 5, 3). Also ist $AB : DE = BC : EF = CA : FD$. Das Verhältnis der Dreiecksflächen findet man aus §. 10, 3.

Anmerkung. Bei ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Seiten des einen zu einander der Reihe nach wie die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten des andern. Denn die Proportion

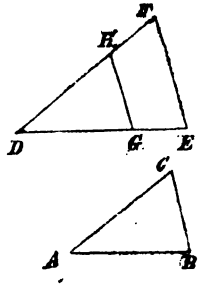
$$AB : BC : CA = DE : EF : FD$$

umfaßt die bewiesenen Proportionen (Algebra §. 1, 5 und 6). Statt der einzelnen Proportionen können die Gleichungen von Produkten

$AB.EF = DE.BC$, $AB.FD = DE.CA$, $BC.FD = EF.CA$

gebraucht werden, durch welche die Gleichheit von bestimmten Flächen angezeigt wird (§. 10, 5).

2. Wenn zwei Dreiecke das Verhältnis von 2 Seiten und den Winkel gleich haben, der von den beiden Seiten eingeschlossen wird, oder der größern von den beiden Seiten gegenüber liegt, oder wenn die Dreiecke die Verhältnisse der 3 Seiten gleich haben, so sind sie ähnlich.



Wenn $AB : BC = DE : EF$ und der Winkel $B = E$, oder wenn $AB : BC = DE : EF$, $AB > BC$, und der Winkel $C = F$, oder wenn $AB : BC : CA = DE : EF : FD$, so ist der Winkel $A = D$ gegenüber den homologen (in der Proportion gleichen Rang einnehmenden) Seiten BC und EF, u. s. w., $ABC \sim DEF$.

Beweis. Macht man auf DE die Strecke $DG = AB$, und zieht GH parallel mit EF, so ist $DGH \sim DEF$, d. h.

$$DG : GH : HD = DE : EF : FD \quad (1)$$

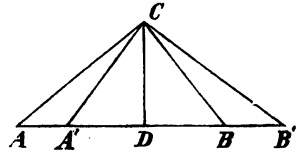
a. Wenn $B = E = G$ und $AB : BC = DE : EF$, so ist auch $AB : BC = DG : GH$, mithin $BC = GH$, und $ABC \cong DGH$ (§. 5, 1), d. h. der Winkel $A = D$, folglich $ABC \sim DEF$ (1).

b. Wenn $C = F = H$ und $AB : BC = DE : EF$, so ergiebt sich wiederum $BC = GH$ und $ABC \cong DGH$ (§. 5, 4), d. h. $A = D$, folglich $ABC \sim DEF$ (1).

c. Wenn $AB : BC : CA = DE : EF : FD$, so ergiebt sich $AB : BC : CA = DG : GH : HD$, mithin $BC = GH$, $CA = HD$, und $ABC \cong DGH$ (§. 5, 2), d. h. $A = D$, $B = G = E$, folglich $ABC \sim DEF$ (1).

3. Ein rechtwinkeliges Dreieck wird durch die Normale aus dem Scheitel des rechten Winkels zur Hypotenuse in zwei Dreiecke geteilt, welche dem ganzen Dreieck und einander ähnlich sind. Eine Kathete ist das geometrische Mittel (Algebra §. 1, 9) zwischen der Hypotenuse und dem an der Kathete liegenden Stück derselben. Die Normale ist das geometrische Mittel zwischen den Stücken der Hypotenuse.

Beweis. Die rechtwinkeligen Dreiecke ADC und ACB haben den Winkel A gemein, folglich ist (1) $ADC \sim ACB$, d. h. $AD : AC = AC : AB$, oder $AC^2 = AB . AD$.



In den rechtwinkeligen Dreiecken ADC und CDB sind die Winkel DAC und DCB gleich, weil sie dasselbe Komplement ACD

haben; folglich ist $ADC \sim CDB$, d. h. $AD : DC = CD : DB$, oder $CD^2 = AD \cdot DB$.

Diese Sätze treffen nach ihrer geometrischen Bedeutung (§. 10, 5) mit dem Pythagoreischen Lehrsatz (§. 9, 5) zusammen.

Zusätze. In der Proportion der ähnlichen Dreiecke (1)

$$ABC : ADC : CDB = AB^2 : AC^2 : CB^2$$

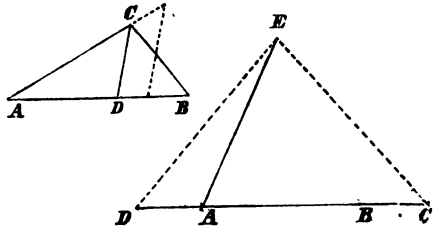
ist $ABC = ADC + CDB$, folglich (Algebra §. 1, 7) $AB^2 = AC^2 + CB^2$, in Übereinstimmung mit dem Pythagoreischen Lehrsatz.

Wenn die rechten Winkel ACB, $A'CB'$, .. von der Normale zu CD begrenzt werden, so hat man wegen der gleichen Produkte $AD \cdot DB$, $A'D \cdot DB'$ ..

$$DB : DB' = \frac{1}{DA} : \frac{1}{DA'}$$

d. h. die Strecken DB, DB', .. verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die reciproken Strecken DA, DA', ... In einem solchen Zusammenhange stehen z. B. die Höhen eines Dreiecks und die Seiten, zu denen sie normal sind.

Von jedem Dreiecke läßt sich ein ähnliches Dreieck abschneiden, das mit dem gegebenen Dreiecke eine Seite und einen Winkel gemein hat.



Die gemeinschaftliche Seite ist das geometrische Mittel zwischen den beiden andern Seiten, welche auf dem andern Schenkel des gemeinschaftlichen Winkels liegen. Macht man den Winkel $ACD = CBA$, so ist $ACD \sim ABC$, $AC^2 = AB \cdot AD$.

Man kann daher das geometrische Mittel zwischen AB und AC auch dadurch finden, daß man DB, DE, CE der Strecke AC gleich macht. Weil dann $BE = AE$, so ist $AEB \sim ACE$, $AE^2 = AC \cdot AB$.

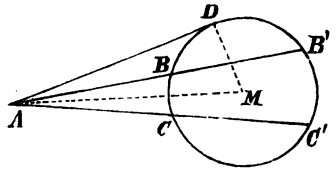
4. Wenn die durch einen Punkt gehenden Geraden von einem Kreise begrenzt werden, so sind die Produkte von solchen Strecken, deren Differenz oder deren Summe eine Sehne ist, einander gleich. Ihr gemeinschaftlicher Wert ist in dem ersten Falle das Quadrat der Tangente aus dem gegebenen Punkte, im zweiten Falle das Quadrat der halben kleinsten Sehne, welche durch den gegebenen Punkt geht, also in jedem Falle die Differenz des Quadrats der Strecke zwischen dem gegebenen

Punkt und dem Centrum und des Quadrats des Radius, und heißt die Potenz des Punkts in Bezug auf den Kreis.*)

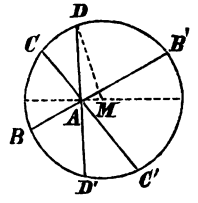
Beweis. Wenn die durch A gehenden Geraden den Kreis in B und B', C und C' schneiden, so sind die Dreiecke ABC und $AC'B'$ ähnlich wegen der gleichen Winkel bei A und wegen der supplementären oder gleichen Peripheriewinkel auf dem Bogen $B'C$ (§. 4, 2). Daher die Proportion

$$AB : AC = AC' : AB' = \frac{1}{AB'} : \frac{1}{AC'}$$

oder die Gleichung $AB.AB' = AC.AC'$



Wenn der Punkt A außerhalb des Kreises liegt, so können die Punkte B und B' in D zusammenfallen, während die Gerade ABB' zur Tangente wird, und man hat $AD^2 = AC.AC'$, wie auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und $AC'D$ sich ergiebt.

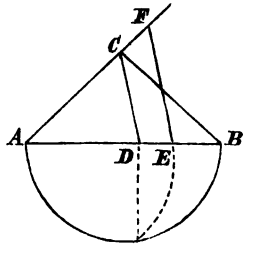


Wenn der Punkt A im Kreise liegt, und die Gerade ADD' normal zu der nach dem Centrum M gehenden Geraden AM gezogen wird, so ist A die Mitte von DD', und DD' die kleinste unter den Sehnen, welche durch A gezogen werden können (§ 6, 11). Dann hat man $AB.AB' = AD^2$.

In dem rechtwinkeligen Dreieck ADM hat man nach dem Pythagoreischen Lehrsatze (§. 10, 5) in dem einen Falle $AD^2 = AM^2 - MD^2$, in dem andern Falle $AD^2 = -AM^2 + MD^2$.

Umgekehrt schließt man: Wenn auf den Geraden AB und AC die Punkte B' und C' so liegen, daß $AB.AB' = AC.AC'$, so liegt C' auf dem Kreise BCB'. Gesetzt, dieser Kreis schnitte die Gerade AC in E, so wäre $AB.AB' = AC.AE$ und verschieden von $AC.AC''$ gegen die Voraussetzung.

5. Mit Hilfe des geometrischen Mittels zwischen zwei Strecken kann man das Dreieck konstruieren, welches dem einen von zwei gegebenen Dreiecken an Fläche gleich, dem andern ähnlich ist (Eucl. VI, 25). Um das Dreieck zu finden, welches gleich ABC, ähnlich ADC ist, konstruiert man das geometrische Mittel AE



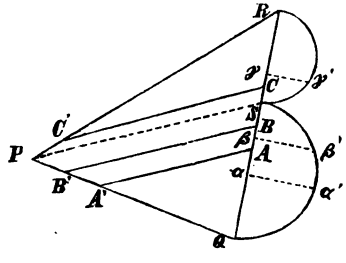
*) Eucl. III, 35 ff. Der Name des Produkts ist von Steiner (Crelle J. 1 p. 164) eingeführt worden.

zwischen AB und AD, und zieht EF parallel mit DC. Dann ist (§. 10, 3)

$$AEF : ABC = (AE : AB)(AF : AC)$$
$$= (AE : AB)(AF : AD) = 1$$

weil $AE^2 = AB \cdot AD$.

Um das Dreieck PQR durch Parallelen von gegebener Richtung nach gegebenen Verhältnissen zu teilen, z. B. so, daß die Teile sich verhalten wie $Q\alpha : \alpha\beta : \beta\gamma : \gamma R$, ziehe man PS in der gegebenen Richtung, die Halbkreise um QS und SR, die Normalen zu QR durch die Teilpunkte α, β, γ, welche die Halbkreise in α', β', γ' schneiden, und mache $QA = Q\alpha'$, $QB = Q\beta'$, $CR = \gamma' R$ endlich AA', BB', CC' parallel mit PS. Dann ist



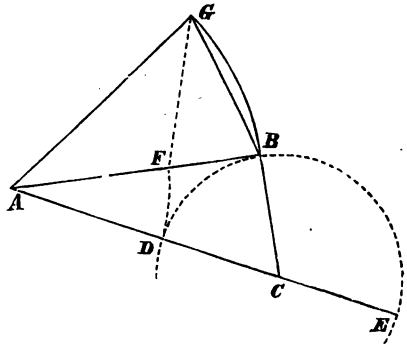
$$QAA' : QSP = (Q\alpha' : QS)^2 = Q\alpha : QS$$
$$QSP : QRP = QS : QR$$

folglich $QAA' : QRP = Q\alpha : QR$. Ebenso

$$QBB' : QRP = Q\beta : QR, \quad C'CR : PQR = \gamma R : QR$$
$$QCC'P : PQR = Q\gamma : QR, \text{ u. s. w.}$$

Mithin verhalten sich $QAA' : A'ABB' : B'BCC' : C'CR$ zu einander der Reihe nach wie $Q\alpha : \alpha\beta : \beta\gamma : \gamma R$.*)

6. Eine Strecke heißt nach stetiger Proportion, oder in eine mittlere und eine äußere Proportionale, oder golden geteilt, wenn ein Teil (der goldne Abschnitt) das geometrische Mittel ist zwischen dem andern Teil und der ganzen Strecke.**)



Um die Strecke AB golden zu teilen, zieht man BC normal zu AB und halb so groß, und beschreibt den Kreis um C mit dem Radius CB, welcher die Gerade AC in D (und E) schneidet. Dann

*) Aufgaben dieser Art haben Mahommed von Bagdad 950 (de superficierum divisionibus 1570), Leonardo von Pisa 1220 (Practica geometriae fol. 86) zusammengestellt. Vergl. Meier Hirsch geom. Aufg. I, 14 ff. J. H. T. Müller Planim. p. 266 ff.

**) Eucl. VI, def. 3. Vergl. II, 11. IV. 10, VI. 30. XIII, 1 ff. Die Benennung sectio aurea s. divina ist neueren Ursprungs.

ist $AF = AD$ der goldne Abschnitt von AB. Denn die Gerade AB berührt den Kreis (C), also hat man (4)

$$AE : AB = AB : AD$$

und nach Subtraktion von 1, weil $DE = AB$,

$$AD : AB = FB : AD, \quad AF^2 = FB.B.$$

Nach dem Pythagoreischen Satze ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 = \frac{5}{4}AB^2$, folglich $AC : AB = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, und

$$AF : AB = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$$
$$FB : AB = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})$$
$$AF : FB = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

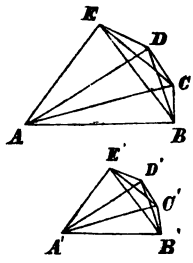
Bei einem Kreise ist der goldne Abschnitt des Radius die Seite eines regulären eingeschriebenen Zehnecks. Ist $AG = AB$, $BG = AF$, so ist $FBG \sim GBA$ (2), weil diese Dreiecke den Winkel B gemein haben, und $FB : BG = GB : BA$. Daher ist der Winkel $FGB = BAG$ und die Seite $FG = BG = AF$, folglich auch der Winkel $AGF = BAG$, $AGB = GBA = 2BAG$, $5BAG = 180^0$, $10BAG = 360^0$. Vergl. unten §. 14, 3.

§. 12. Von den ähnlichen Figuren.

1. Wenn jedem Punkt einer Figur ein Punkt einer andern Figur so entspricht, daß die Dreiecke ABC, ABD, ABE, .., welche von zwei Punkten der einen Figur mit den übrigen Punkten derselben Figur gebildet werden, den entsprechenden Dreiecken der andern Figur $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'B'E'$, .. der Reihe nach ähnlich sind, und dabei ABD, ABE, .. mit ABC eines oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem $A'B'D'$, $A'B'E'$, .. mit $A'B'C'$ eines oder entgegengesetzten Sinnes sind: so sind die Figuren $ABCDE$ .. und $A'B'C'D'E'$ .. ähnlich, d. h. alle übrigen Dreiecke der einen Figur sind den entsprechenden Dreiecken der andern Figur ähnlich, die Strecken der einen Figur verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die entsprechenden Strecken der andern Figur, das Verhältnis der Perimeter ist das Verhältnis entsprechender Strecken, das Verhältnis der Flächen ist das Quadrat des Verhältnisses entsprechender Strecken.*)

*) Eucl. VI, 20. Die Euklidische Definition (die erste zum 6ten Buch) ist unstatthaft, weil sie Behauptungen einschließt, welche eines Beweises bedürfen. Vergl. §. 7 und die daselbst erwähnte Abhandlung des Verf. Archimedes hat die Schwerpunkte ähnlicher Figuren als homologe Punkte derselben angegeben.

Beweis. Nach den Voraussetzungen ist der Winkel $BAD = B'D'A'$, $BAC = B'A'C'$, folglich $CAD = C'A'D'$. Zugleich ist $AC : AB = A'C' : A'B'$, $AB : AD = A'B' : A'D'$, folglich $AC : AD = A'C' : A'D'$; mithin $ACD \sim A'C'D$ (§. 11, 2). Ebenso erkennt man $ACE \sim A'C'E'$, $ADE \sim A'D'E'$, .., $BCD \sim B'C'D'$, $BCE \sim B'C'E'$, $BDE \sim B'D'E'$, ... Aus der Ähnlichkeit von BCD und $B'C'D'$, BCE und $B'C'E'$ folgt ebenso die Ähnlichkeit von CDE und $C'D'E'$, u. s. w.



Die Gleichungen $AB : A'B' = AC : A'C' = .. = BC : B'C' = BD : B'D' = .. = CD : C'D' = CE : C'E' = ..$ sind in der Proportion

$$AB : AC : .. : BC : BD : .. : CD : .. = A'B' : A'C' : .. : B'C' : B'D' : .. : C'D' : ..$$

enthalten, aus der auch

$$AB + BC + CD + .. : AB = A'B' + B'C' + C'D' + .. : A'B'$$

oder

$$AB + BC + CD + .. : A'B' + B'C' + C'D' + .. = AB : A'B'$$

folgt (Algebra §. 1, 7). Ebenso schließt man aus den Gleichungen (§. 11, 1)

$$ABC : A'B'C' = ACD : A'C'D' = ADE : A'D'E' = .. = (AB : A'B')^2$$

das Verhältnis der Flächen

$$ABCDE .. : A'B'C'D'E' .. = (AB : A'B')^2$$

2. Wenn 3 Punkte der einen Figur auf einer Geraden liegen, so liegen die entsprechenden Punkte der ähnlichen Figur auch auf einer Geraden; entsprechende Strecken der ähnlichen Figuren werden in entsprechenden Punkten nach demselben Verhältnis geteilt. Wenn insbesondere eine Figur ein Centrum hat (§. 7, 6), so hat auch die ähnliche Figur ein Centrum, und die Centren sind entsprechende Punkte der beiden Figuren.

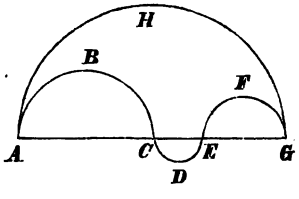
Liegen die Punkte der einen Figur auf einer Kurve, so liegen die entsprechenden Punkte der ähnlichen Figur auf einer ähnlichen Kurve. Einer Sehne der einen Kurve entspricht eine Sehne der andern Kurve, und wenn eine Sehne der einen Kurve verschwindet, so verschwindet auch die entsprechende Sehne der andern Kurve, d. h. der Tangente der einen Kurve durch einen Punkt entspricht die Tangente der andern Kurve durch den entsprechenden Punkt (§. 3, 5). Einem der einen Kurve eingeschriebenen oder umgeschriebenen Polygon entspricht ein der andern Kurve eingeschriebenes oder umgeschriebenes Polygon, und wenn das eine dieser Polygone mit der Kurve bei unendlicher Anzahl

der gemeinschaftlichen Punkte zusammenfällt, so fällt auch das entsprechende Polygon mit der entsprechenden Kurve zusammen. Daher ist das Verhältnis entsprechender Bogen von ähnlichen Kurven dem Verhältnis entsprechender Strecken, und das Verhältnis entsprechender Flächen dem Quadrat des Verhältnisses entsprechender Strecken gleich.

3. Reguläre Polygone von derselben Anzahl der Seiten und von derselben Art (§. 7, 5) sind ähnliche Figuren; zwei folgende Eckpunkte des einen Polygons können als irgend zwei folgenden Eckpunkten des andern Polygons entsprechend angenommen werden.

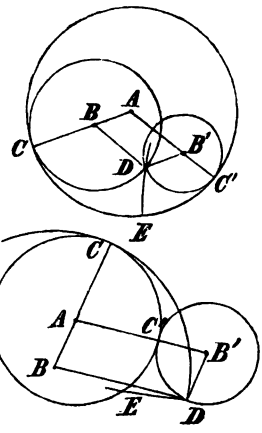
Gleichwinkelige Segmente von Kreisen (§. 3, 6), Kreisbogen von gleichen Centriwinkeln sind ähnliche Figuren; einem Endpunkt des einen Bogens entspricht ein Endpunkt den andern Bogens. Je zwei Kreise sind ähnliche Figuren; ein Bogen des einen Kreises kann als irgend einem ähnlichen Bogen des andern Kreises entsprechend angenommen werden. Das Verhältnis der Kreisperipherien oder ähnlicher Bogen von Kreisen ist dem Verhältnis entsprechender Strecken z. B. der Diameter gleich; das Verhältnis der Kreisflächen oder ähnlicher Segmente von Kreisen ist dem Quadrat des Verhältnisses entsprechender Strecken gleich.*)

Die aus Halbkreisen bestehende Linie $ABCDEFG$ ist von gleicher Länge, wie der Halbkreis AHG. Denn die Halbkreise verhalten sich wie ihre Diameter; nun ist $AC + CE + EG = AG$, folglich u. s. w.

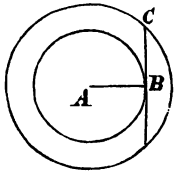


Wenn der Kreis (A) von dem Kreis (B) in C einerseits der gemeinschaftlichen Tangente berührt wird, und von dem Kreis (B'), dessen Radius die Differenz der Radien $AC - BC$ ist, in C' einerseits oder beiderseits, je nachdem AC größer oder kleiner als BC, und wenn $B'ABD$ ein Parallelogramm ist: so ist D ein gemeinschaftlicher Punkt der Kreise (B) und (B') auf der Berührungssehne CC', und der Bogen CC' ist die Summe oder die Differenz der Bogen CD und DC'. Denn zufolge der Gleichungen $BD = AB' = BC$, $B'D = AB = B'C'$ liegt D sowohl auf dem Kreis (B), als auch auf (B'). Die Bogen CC', CD, DC' haben gleiche Centriwinkel und sind ähnlich, die Bogen und ihre Sehnen verhalten sich zu einander wie ihre Radien. Daher ist Bogen und Sehne

*) Eucl. XII, 2. Die Ähnlichkeit der Bogen und Segmente von Kreisen wird bei Euclides durch besondere Definition festgestellt (III, def. 11).

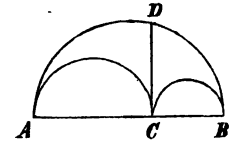


CC' in dem ersten Fall $CD + DC'$, in dem andern Fall $CD - DC'$. Ist der Bogen CE des Kreises (A) so lang als der Bogen CD, so ist der Bogen EC' in dem ersten Fall so lang als DC', in dem andern Fall so lang als $C'D$. Wenn der Kreis (B) auf dem Kreis (A) rollend ohne Gleitung den Bogen EC zurückgelegt hat, so hat der Punkt D des Kreises (B) einen Epicykloidenbogen ED beschrieben. Denselben Epicykloidenbogen hat der Punkt D des Kreises (B') beschrieben, wenn der Kreis (B') in gleicher Weise den Bogen $C'E$ zurückgelegt hat.*)

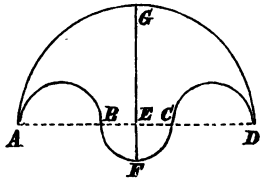


Die Ringfläche zwischen zwei concentrischen Kreisen ist der Fläche des Kreises gleich, dessen Diameter eine durch den äußern Kreis begrenzte Tangente des innern Kreises ist. Denn die Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien; nun ist der Winkel CBA recht und $AC^2 - AB^2 = BC^2$ nach dem Pythagoreischen Satze, folglich u. s. w.

Die von den Halbkreisen AC, CB, BA eingeschlossene Fläche (Arbelos, Archim. lemma 4) ist der Fläche des Kreises gleich, dessen Diameter das geometrische Mittel CD zwischen den Diametern AC und CB ist. Denn $(AC + CB)^2 - AC^2 - CB^2 = 2AC \cdot CB = 2CD^2$.



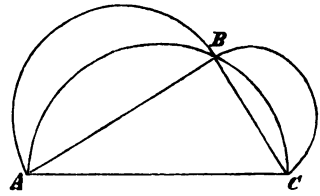
Von den Halbkreisen AB, BC, CD, DA, unter denen der erste und dritte gleich, der zweite und vierte concentrisch sind, wird eine Fläche eingeschlossen (Salinon, Archim. lemma 14), die der Fläche des Kreises gleich ist, dessen Diameter die Summe FG der Radien von den beiden concentrischen Halbkreisen ist. Denn $AD^2 - 2AB^2 + BC^2 = (2AB + BC)^2 - 2AB^2 + BC^2 = 2(AB + BC)^2 = 2FG^2$.



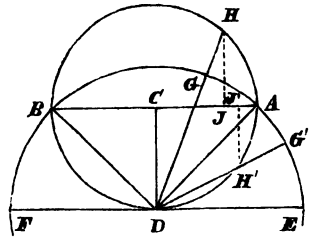
Von den Halbkreisen über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks werden zwei sichelförmige Flächen (μηνίσκοι, lunulae) eingeschlossen,

*) Euler Acta Petrop. 1781, I p. 48 De duplici genesi epicycloidum etc.

deren Summe der Fläche des Dreiecks gleich ist. Denn die Summe der Halbkreisflächen über den Katheten ist der Halbkreisfläche über der Hypotenuse gleich, woraus durch Subtraktion der Segmente über den Katheten die Behauptung sich ergiebt.



Wenn man einem Kreise das rechtwinkelige und gleichschenkelige Dreieck ABD einschreibt, und um das Centrum D den Halbkreis $EABF$ beschreibt, so daß EF mit AB parallel ist, so ist die sichelförmige Fläche zwischen dem Halbkreis AB und dem Quadranten AB sowohl der von dem Diameter EF, dem Oktanten FB, dem Halbkreis BA und dem Oktanten AE eingeschlossenen Fläche, als auch der Fläche des Dreiecks ABD gleich.*) Denn $DB^2 = 2CA^2$, folglich ist die Fläche des Halbkreises EF 2mal so groß als die Fläche des Halbkreises AB, und der Sektor ABD gleich der Fläche des Halbkreises AB. Indem man nun die von dem Quadranten AB und dem Halbkreis BA eingeschlossene Fläche von der Kreisfläche AB und von der Halbkreisfläche EF subtrahiert, und indem man das Segment AB von der Halbkreisfläche AB und von dem Sektor DAB subtrahiert, erhält man die angegebenen Gleichungen.



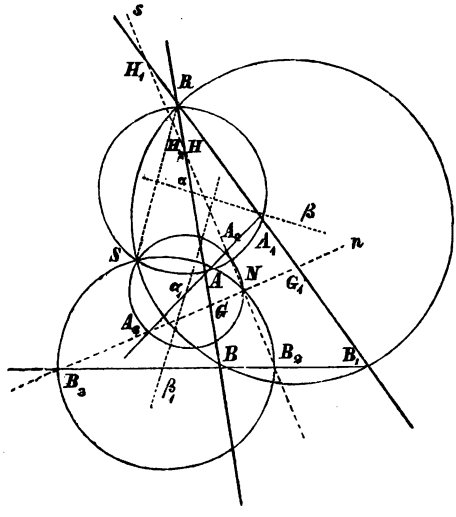
Dabei ist noch bemerkenswert: wenn eine durch D gezogene Gerade den Halbkreis in G, den Kreis in H schneidet, und wenn die Normale aus H zu AB diese Gerade in J schneidet, so ist die von den Bogen AG, AH und der Strecke GH eingeschlossene Fläche der Fläche des Dreiecks DAJ gleich. Denn der Sektor CAH ist dem doppelten Sektor DAG ähnlich, und dem einfachen Sektor DAG gleich, weil der Winkel $ACH = 2ADH$ und $DA^2 = 2CA^2$. Nun ist $AHG + DAG + CDH = CDA + CAH$, folglich die gesuchte Fläche AHG gleich der Differenz der Dreiecke $CDA - CDH = DAJ$, weil $CDH = CDJ$ (§. 9, 2). Ebenso findet man die Fläche $AH'G'$ gleich der Fläche des Dreiecks DAJ'.

---

*) Lunula des Pythagoreers Hippocrates von Chios, eines Zeitgenossen von Pericles, wie Proclus zu Euclid berichtet. Den Zusatz hat Tschirnhausen gemacht Acta Erud. 1687 p. 526. Vergl. Klügel math. W. III p. 591. Untersuchungen über die Flächen anderer sichelförmigen Figuren findet man angeführt Reuß Repert. commentt. p. 45. Dahin gehört auch der Aufsatz Clausens in Crelle J. 21 p. 375.

4. Zu zwei gegebenen Strecken AB, A_1B_1 giebt es sowohl einen Punkt S, mit dem die Strecken ähnliche Dreiecke eines Sinnes bilden, als auch einen Punkt N, mit dem sie ähnliche Dreiecke konträren Sinnes bilden.*)

Wenn die Strecken AB, A_1B_1 parallel sind, so ist S der Durchschnittspunkt der Geraden AA_1, BB_1 (§. 8, 2). Wenn ferner die Geraden AB und A_1B_1 in R sich schneiden, und die Geraden AA_1, BB_1 parallel sind, so fällt S mit R zusammen, und die Kreise AA_1R, BB_1R berühren einander, weil ihre Centren auf einer durch R gehenden Geraden sich befinden (§. 8, 3). In jedem andern Falle ist S der andere Durchschnittspunkt der Kreise AA_1R, BB_1R. Denn es sind nicht nur die Bogen SA und SB, SA_1 und SB_1, und die Dreiecke SAA_1 und SBB_1, sondern auch die Dreiecke SAB und SA_1B_1 ähnlich und eines Sinnes (§. 4, 7). Dem Centrum α des Kreises SAA_1 entspricht das Centrum β des Kreises SBB_1 so, daß die Figuren $SAA_1\alpha$ und $SBB_1\beta$ ähnlich sind und eines Sinnes (2). Aus der Ähnlichkeit von $SA\alpha$ und $SB\beta$ folgt aber die Ähnlichkeit von $S\alpha\beta$ und SAB, weil der Winkel $\alpha S\beta = \alpha SB + BS\beta = AS\alpha + \alpha SB = ASB$ und $S\alpha : S\beta = SA : SB$ (§. 11, 2). Die gleichen Winkel ASB, A_1SB_1, $\alpha S\beta$ sind dem Winkel der ähnlichen Bogen SA und SB gleich; die gleichen Winkel ASA_1, BSB_1 sind dem Winkel der Strecken AB und A_1B_1 gleich.



Wenn AB in C, A_1B_1 in C_1 nach demselben Verhältnis geteilt werden, so geht der Kreis CC_1R, dessen Centrum γ sei, ebenfalls durch S. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SAC und SA_1C_1 folgt die Gleichheit der Winkel CSC_1, ASA_1, $AC^{\wedge}A_1C_1$. Hieraus ergiebt sich die Ähnlichkeit der Dreiecke SAA_1 und SCC_1, der Bogen SA und SC, der Figuren $SAA_1\alpha$ und $SCC_1\gamma$, endlich der Dreiecke SAC, SA_1C_1, $S\alpha\gamma$.

*) Vergl. die §. 7 citierte Abhandlung p. 43.

Wenn AA_1 in A_k, BB_1 in B_k, CC_1 in C_k nach demselben gegebenen Verhältnis geteilt werden, so liegen A_k, B_k, C_k auf einer Geraden.*) Denn zufolge der Voraussetzung sind die Figuren SAA_1A_k, SBB_1B_k, SCC_1C_k ähnlich und eines Sinnes. Hieraus schließt man aber wie vorhin, daß auch die Figuren $SABC$, $SA_1B_1C_1$, $SA_kB_kC_k$ ähnlich und eines Sinnes sind.

Insbesondere liegen auf einer Geraden s die Punkte A_2, B_2, C_2, und auf einer Geraden n die Punkte A_3, B_3, C_3, in denen die Strecken AA_1, BB_1, CC_1 innen und außen nach dem Verhältnis $AB : A_1B_1$ von den Geraden geteilt werden, welche die Winkel ASA_1, BSB_1, CSC_1 und deren Nebenwinkel halbieren (§. 8, 6). Die Geraden s und n sind mit den Geraden parallel, welche den von AB und A_1B_1 gebildeten Winkel und dessen Nebenwinkel halbieren. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke eines Sinnes SAB, SA_1B_1, SA_2B_2, SA_3B_3 folgt wie oben, daß $AB \wedge A_2B_2 = ASA_2$, $A_2B_2 \wedge A_1B_1 = A_2SA_1$, $AB \wedge A_3B_3 = ASA_3$, $A_1B_1 \wedge A_3B_3 = A_1SA_3$. Nun wird der Winkel ASA_1 und sein Nebenwinkel von SA_2 und SA_3 halbiert, also bildet s mit AB und A_1B_1 entgegengesetzt gleiche Winkel, n mit denselben Geraden supplementäre Winkel.

Der gemeinschaftliche Punkt N der Geraden s und n liegt auf den Kreisen A_2SA_3, B_2SB_3, C_2SC_3, so daß die Figuren $NABC$ und $NA_1B_1C_1$ ähnlich und konträren Sinnes sind. Denn die Winkel A_2NA_3, B_2NB_3, C_2NC_3 sind recht, wie A_2SA_3, B_2SB_3, C_2SC_3, folglich gehn durch S und N die Kreise, welche die Strecken AA_1, BB_1, CC_1 innen und außen nach dem Verhältnis $AB : A_1B_1$ normal schneiden. Aus dieser Lage aber schließt man (§. 8, 6), daß $AN : A_1N = BN : B_1N = CN : C_1N = AB : A_1B_1$, und daß der Winkel $ANA_2 = A_2NA_1$, $BNB_2 = B_2NB_1$, $CNC_2 = C_2NC_1$. Demnach sind die Winkel ANB und A_1NB_1, ANC und A_1NC_1 gleich und entgegengesetzt, also die Dreiecke NAB und NA_1B_1, NAC und NA_1C_1 ähnlich und konträren Sinnes (§. 11, 2).

Die Strecken AB und A_1B_1 werden von der Geraden n in G und G_1, von der Geraden s in H und H_1 so geteilt, daß $AG : BG = A_1G_1 : B_1G_1$, $AH : BH = A_1H_1 : B_1H_1$, mithin SAG und SA_1G_1, SAA_1 und SGG_1, SAH und SA_1H_1, SAA_1 und SHH_1 ähnlich und eines Sinnes sind. Denn wegen der gleichen Winkel sind die Dreiecke NAG und NA_1G_1, NBG und NB_1G_1, NAH und NA_1H_1, NBH und NB_1H_1 ähnlich, folglich u. s. w.

*) Diese Gerade schneidet die Strecken AB und A_1B_1 nach demselben Verhältnis, wie man mit Hilfe des Menelaischen Satzes (Trigonom. §. 7, 6) erkennt.

Die Geraden RS und SN sind normal zu einander. Denn die Strecke HH_1 wird durch die Gerade RS in H_2 nach dem Verhältnis geschnitten, welches die Abstände des Punktes H_2 von den Geraden AB und A_1B_1 haben, mit denen die Gerade s entgegengesetzt gleiche Winkel bildet. Dasselbe Verhältnis haben die Abstände des Punktes S von den Geraden AB und A_1B_1, nämlich $SH : SH_1 = AB : A_1B_1$. Zugleich hat man $HN : H_1N = AB : A_1B_1$; also wird der Winkel HSH_1 und sein Nebenwinkel von den Geraden RS und SN halbiert (§. 8, 6), und der Winkel RSN ist recht.

Wenn man die Centren der Kreise A_2SA_3, B_2SB_3, C_2SC_3 durch α_1, β_1, γ_1 bezeichnet, so sind die Figuren $S\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $S\alpha\beta\gamma$, $SABC, \ldots$ ähnlich und eines Sinnes, wie aus der Ähnlichkeit von $SAA_2A_3\alpha_1$, $SBB_2B_3\beta_1$, $SCC_2C_3\gamma_1$ sich ergiebt. Zugleich sind die Geraden $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ normal zu einander, weil sie die normalen Strecken RS und SN normal halbieren (§. 6, 7). Also sind auch die Winkel $\alpha S\alpha_1$, $\beta S\beta_1$, $\gamma S\gamma_1$ recht, d. h. die Kreise AA_1R, BB_1R, CC_1R werden von den Kreisen A_2SA_3, B_2SB_3, C_2SC_3 der Reihe nach normal geschnitten. Die Geraden $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ schneiden sich aber auf der Mitte der Strecke NR.

5. Zu zwei ähnlichen Figuren eines Sinnes, $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$, giebt es einen sich selbst so entsprechenden Punkt S, daß $SABC\ldots$ und $SA_1B_1C_1\ldots$ ähnliche Figuren eines Sinnes sind. Ist nämlich S der Punkt, mit welchem AB und A_1B_1 ähnliche Dreiecke von einerlei Sinn bilden (4), so folgt aus den Bedingungen $ABS \sim A_1B_1S$, $ABC \sim A_1B_1C_1, \ldots$ die Ähnlichkeit von $SABC\ldots$ und $SA_1B_1C_1\ldots$ (1).

Die Winkel ASA_1, BSB_1, $CSC_1, \ldots$, $AB\wedge A_1B_1$, $AC\wedge A_1C_1$, $BC\wedge B_1C_1, \ldots$ sind von derselben Größe. Die entsprechenden Geraden AB und A_1B_1, AC und $A_1C_1, \ldots$ schneiden sich auf dem Kreise AA_1S; die entsprechenden Geraden BA und B_1A_1, BC und $B_1C_1, \ldots$ schneiden sich auf dem Kreise BB_1S, u. s. w. Vergl. §. 7, 3.

Die Kreise, welche die Verbindungslinien AA_1, BB_1, $CC_1, \ldots$ innen in A_2, B_2, $C_2, \ldots$, außen in A_3, B_3, $C_3, \ldots$ nach dem Verhältnis der entsprechenden Strecken $AB : A_1B_1$ rechtwinkelig teilen (§. 8, 6), gehn durch S (4). Zugleich liegen die Centren α, β, $\gamma, \ldots$ der Kreise AA_1S, BB_1S, $CC_1S, \ldots$, die inneren Teilpunkte A_2, B_2, $C_2, \ldots$, die äußeren Teilpunkte A_3, B_3, $C_3, \ldots$, und die Centren α_1, β_1, $\gamma_1, \ldots$ der Kreise A_2A_3S, B_2B_3S, $C_2C_3S, \ldots$ so daß die Figuren $SABC, \ldots$, $SA_1B_1C_1, \ldots$, $SA_2B_2C_2, \ldots$, $SA_3B_3C_3, \ldots$, $S\alpha\beta\gamma, \ldots$, $S\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots$, ähnlich und eines Sinnes sind (4).

Wird die Figur $SABC\ldots$ in ihrer Ebene um S gedreht, bis die

Richtung SA mit der Richtung SA_1 oder mit der entgegengesetzten Richtung zusammenfällt, so erhalten die Figuren perspektivische Lage, d. h. die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte AA_1, BB_1, CC_1, .. gehn durch den sich selbst entsprechenden Punkt S. Dann sind je zwei entsprechende Gerade parallel; im ersten Falle haben je zwei entsprechende Strecken einerlei Richtung, und die Verbindungslinien AA_1, BB_1, CC_1 schließen den sich selbst entsprechenden Punkt aus, welcher äußerer Ähnlichkeitspunkt heißt; im andern Falle haben je zwei entsprechende Strecken entgegengesetzte Richtung, und die Verbindungslinien AA_1, BB_1, CC_1, .. schließen den sich selbst entsprechenden Punkt S ein, welcher innerer Ähnlichkeitspunkt genannt wird.*)

6. Zu zwei ähnlichen Figuren konträren Sinnes, ABC .. und $A_1B_1C_1$ .., giebt es einen sich selbst so entsprechenden Punkt N, daß $NABC$.. und $NA_1B_1C_1$ .. ähnliche Figuren konträren Sinnes sind. Ist nämlich N der Punkt, mit welchem AB und A_1B_1 ähnliche Dreiecke konträren Sinnes bilden (4), so folgt aus den Bedingungen $ABN \sim A_1B_1N$, $ABC \sim A_1B_1C_1$, .. die Ähnlichkeit von $NABC$.. und $NA_1B_1C_1$ .. (1).

Die Geraden s und n, welche durch den Punkt N gehn und mit AB und A_1B_1 entgegengesetzt gleiche und supplementäre Winkel bilden, bilden auch mit AC und A_1C_1, mit BC und B_1C_1, .. solche Winkel und entsprechen sich selbst dergestalt, daß s von entsprechenden Geraden in entsprechenden Punkten geschnitten wird, die den Punkt N ausschließen, während n von entsprechenden Geraden in entsprechenden Punkten geschnitten wird, die den Punkt N einschließen. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte AA_1, BB_1, CC_1, .. werden von den sich selbst entsprechenden Geraden s und n innen und außen nach dem Verhältnis entsprechender Strecken ($AB:A_1B_1$) geschnitten (4). In perspektivische Lage können ähnliche Figuren konträren Sinnes nicht gelangen, ohne daß die eine im Raume umgewendet wird.

7. Zwei Kreise von beliebiger Lage können als ähnliche Figuren in perspektivischer Lage auf zwei Arten betrachtet werden. Nach der

---

*) Der bei ähnlichen Figuren sich selbst entsprechende Punkt ist von Euler 1777 (Nov. Act. Petrop. 9 p. 154) betrachtet und Ähnlichkeitspunkt (centrum similitudinis) genannt worden. Derselbe heißt bei Magnus (Aufg. d. anal. Geom. I. p. 59) Situationspunkt. Apollonius im ersten Buch der ebenen Örter (vergl. Camerers Übers. der Simsonschen Bearbeitung p. 36) hatte denselben Punkt zur Konstruktion ähnlicher Figuren gebraucht. Der Ausdruck „perspektivische Lage" rührt von Steiner her (Syst. Entw. p. 29), und ist bezeichnender als der alte Ausdruck „ähnliche Lage" (Eucl. VI, 18. XI, 27).

einen Auffassung haben sie einen äußeren, nach der andern einen inneren Ähnlichkeitspunkt (5); die Ähnlichkeitspunkte teilen den Abstand der Centren innen und außen nach dem Verhältnis der Radien. Durch die Ähnlichkeitspunkte gehn die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise.*)

Setzt man den Radius MA, der in der durch die Centren M und M_1 gehenden Geraden liegt, dem gleichgerichteten Radius M_1A_1 entsprechend, so entspricht einem andern Radius MB der gleichgerichtete Radius M_1B_1 so, daß die Bogen AB und A_1B_1 ähnlich sind (3). Wird die Gerade MM_1 von der Geraden BB_1 in S geschnitten, so sind die Dreiecke SMB und SM_1B_1 ähnlich und eines Sinnes, daher $MS : M_1S = MB : M_1B_1$. Wenn ferner C und C_1 entsprechende Punkte der Kreise, mithin MC und M_1C_1 Radien von einerlei Richtung sind, so geht die Gerade CC_1 durch den Punkt S, weil sie die Strecke MM_1 außen nach dem Verhältnis der Radien teilt. Wenn insbesondere die Gerade SC den Kreis (M) berührt, so berührt sie auch den andern Kreis (M_1).

Setzt man dagegen den Radius MA dem konträren Radius M_1A_2 entsprechend, so entspricht einem andern Radius MB der parallele konträre Radius M_1B_2, so daß die Bogen AB und A_2B_2 ähnlich sind. Wird die Gerade MM_1 von der Geraden BB_2 in T geschnitten, so sind die Dreiecke TMB und TM_1B_2 ähnlich und eines Sinnes, daher $MT : TM_1 = MB : M_1B_2$, u. s. w.

Zur Bestimmung der Ähnlichkeitspunkte S und T der Kreise, deren Radien durch r und ϱ bezeichnet werden, hat man

$$MS : M_1S : MM_1 = r : \varrho : r - \varrho$$
$$MT : TM_1 : MM_1 = r : \varrho : r + \varrho$$

Die Vergleichung von MS und MT mit r, von M_1S und TM_1 mit ϱ folgt aus der Vergleichung von MM_1 mit $r - \varrho$ und $r + \varrho$, von welcher die gegenseitige Lage der beiden Kreise abhängt (§. 3, 3). Wenn die Kreise außer einander liegen, so sind T und S von den Kreisen ausgeschlossen, und es giebt zwei Paare gemeinschaftlicher Tangenten der Kreise. Wenn die Kreise sich außen berühren, so ist T ihr gemeinschaftlicher Punkt, während S von beiden Kreisen ausgeschlossen bleibt, und es giebt 3 gemeinschaftliche Tangenten der Kreise. Wenn die Kreise sich schneiden, so schließen beide den Punkt T ein und den Punkt S aus, und es giebt nur ein Paar gemeinschaftliche Tangenten. Wenn ein Kreis den andern innen berührt, so schließen beide den Punkt T ein und haben den Punkt S gemein, während eine gemeinschaftliche Tangente übrig bleibt. Wenn ein Kreis von dem andern

*) Vergl. Pappus VII, 110. 118. Euler a. a. O. Poncelet propr. proj. 236, Steiner geom. Konstr. p. 42.

eingeschlossen wird, so schließen beide die Punkte T und S ein und haben keine gemeinschaftlichen Tangenten. Bei concentrischen Kreisen fallen die Ähnlichkeitspunkte mit dem gemeinschaftlichen Centrum zusammen. Bei gleichen Kreisen liegt der äußere Ähnlichkeitspunkt auf MM_1 unendlich fern, während der innere Ähnlichkeitspunkt mit der Mitte von MM_1 zusammenfällt.

Wenn überhaupt die ähnlichen Figuren eines Sinnes aus je zwei gleichen und ähnlichen Teilen eines Sinnes bestehn und je ein Centrum haben (§. 7, 6), wenn ferner ein Paar entsprechender Seiten parallel sind, so können die Figuren auf zwei Arten als perspektivisch betrachtet werden. Nach der einen Auffassung haben sie einen äußeren, nach der andern einen inneren Ähnlichkeitspunkt; die Ähnlichkeitspunkte teilen den Abstand der Centren innen und außen nach dem Verhältnis entsprechender Strecken. Sind $AB \,..\, A_1B_1 \,..$ und $\alpha\beta \,..\, \alpha_1\beta_1 \,..$ die ähnlichen Figuren, M und μ ihre Centren, AB und $\alpha\beta$ parallel, so kann der Strecke MA sowohl die Strecke $\mu\alpha$ als auch die entgegengesetzte Strecke $\mu\alpha_1$ entsprechend gesetzt werden, und $M\mu$ wird von $A\alpha$ und $A\alpha_1$ in den Ähnlichkeitspunkten geschnitten.

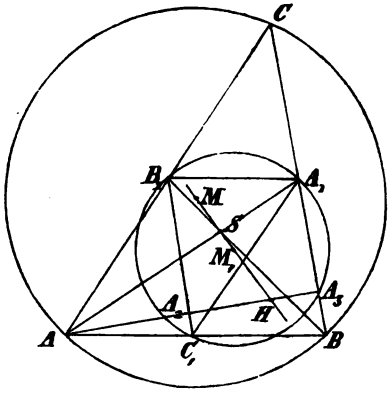
8. I. Bei einem Dreieck ABC liegen der Höhenpunkt H (§. 6, 9), der Schwerpunkt S (§. 8, 4) und das Centrum M des umgeschriebenen Kreises auf einer Geraden*), so daß $HS : SM = 2$. Wenn A_1, B_1, C_1 die Mitten der Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC sind, so sind die Seiten des Dreiecks B_1C_1M mit den Seiten des Dreiecks BCH der Reihe nach parallel. Daher sind die Dreiecke B_1C_1M und BCH ähnlich und eines Sinnes, und zwar in perspektivischer Lage mit einem innern Ähnlichkeitspunkt, weil B_1C_1 und BC entgegengesetzte Richtung haben (5). Die Strecke HM geht durch den Durchschnittspunkt S der Geraden BB_1, CC_1 und wird von ihm innen nach dem Verhältnis $BC : B_1C_1 = 2$ (§. 8, 3) geteilt.

II. Auf der Eulerschen Geraden HSM liegt auch das Centrum M_1 des Feuerbachschen Kreises $A_1B_1C_1$, so daß MM_1 innen in S, außen in H nach dem Verhältnis 2 geteilt wird.**) Wenn man $B_1C_1M_1 \sim BCM$ macht, so ist M_1 das Centrum des Kreises $A_1B_1C_1$, die Radien MA

*) Euler 1765 bei Gelegenheit einer Berechnung Nov. Comm. Petrop. XI p. 114. Carnot Géom. de pos. 131. Gauß 1810 in Schumachers Übersetzung von Carnot's Werk II p. 359.

**) Feuerbach das geradlin. Dreieck 1822, 55 ff. Daß der Kreis $A_3B_3C_3$ die Seiten des Dreiecks ABC und die Strecken HA, HB, HC halbiert, haben auch Brianchon und Poncelet 1820 bekannt gemacht (Gerg. Ann. XI p. 215). Diese Beziehungen sind von Steiner 1833 Geom. Konstr. p. 50 durch Betrachtung der Ähnlichkeitspunkte aufgeklärt worden.

und M_1A_1 sind entgegengesetzt parallel im Verhältnis 2, MM_1 und AA_1 teilen einander innen im Verhältnis 2, also in S, dem Ähnlichkeitspunkt und gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, dem innern Ähnlichkeitspunkt der Kreise ABC und $A_1B_1C_1$ (7). Dabei ist (I) $HM = 3MS = 2MS + 2SM_1 = 2MM_1 = 2M_1H$, $MH : M_1H = 2$, also H der äußere Ähnlichkeitspunkt der Kreise ABC und $A_1B_1C_1$.



Wenn A_2 und A_1 Gegenpunkte des Feuerbachschen Kreises sind, so haben die Radien MA und M_1A_2 dieselbe Richtung, der Punkt H liegt auf der Geraden AA_2, $HA : HA_2 = MA : M_1A_2 = 2$, d. h. der Feuerbachsche Kreis geht durch die Mitten A_2, B_2, C_2 von HA, HB, HC.

Wenn BC von HA in A_3 geschnitten wird, so ist der Winkel $A_1A_3A_2$ recht, also liegt der Fußpunkt A_3 auf dem Kreis, dessen Gegenpunkte A_1 und A_2 sind, d. h. der Feuerbachsche Kreis geht durch die Fußpunkte A_3, B_3, C_3 der Höhen des Dreiecks ABC.

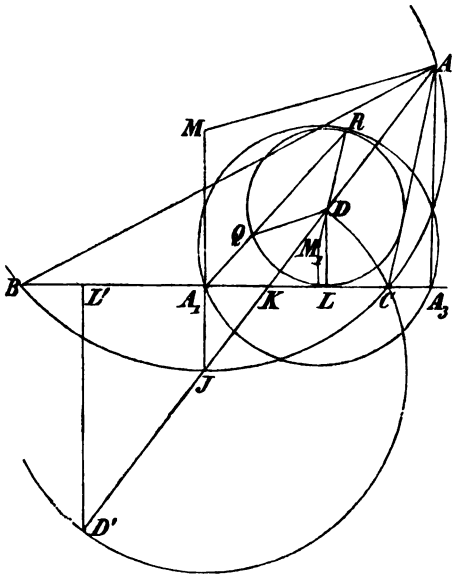
III. Der Feuerbachsche Kreis wird von den die Seiten des Dreiecks ABC berührenden Kreisen berührt, von dem eingeschriebenen innen, von den drei andern Kreisen außen.*)

Beweis. Wenn J die Mitte des Bogens BC ist, so halbiert AJ nicht nur den Winkel BAC, sondern auch den Winkel MAA_3, weil $MAJ = AJM = JAA_3$. Wenn AJ von dem um J mit dem Radius JC beschriebenen Kreis in D und D', von BC in K geschnitten wird, so ist $2DCB = DJB = AJB = ACB$, d. h. D das Centrum des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises, D' das Centrum eines die Seiten des Dreiecks berührenden Kreises. Diese Kreise berühren BC in L und L', deren Mitte A_1 ist. Dabei ist $BCJ = BAJ = JAC$, $JCK \sim JAC$, d. h. $JD^2 = JC^2 = JK.JA$, folglich auch $A_1L^2 = A_1K.A_1A_3$.

Wenn der Radius DQ des eingeschriebenen Kreises die Richtung

*) Feuerbach a. a. O. 57 ff. Vergl. unten Trigonometrie §. 4, 15. Casey Quart. Journ. 1860 t. 4 p. 152. Kücker Grunert Archiv 47 p. 12. Schröter Borchardt J. 68 p. 208. Lappe Borchardt J. 71 p. 387. Der hier gegebene Beweis ist von Binder (Brief Schönthal 1872) dem Verf. mitgeteilt worden. Vergl. Schröter math. Ann. 7 p. 517. Taylor Quart. J. 13 p. 197.

M_1A_1 hat, so sind die Winkel QDL und MAA_3 gleich, die Dreiecke QDK und LDK gleich und ähnlich. Wird der eingeschriebene Kreis von der Geraden A_1Q in R geschnitten, so ist $A_1Q \cdot A_1R = A_1L^2 = A_1K \cdot A_1A_3$, d. h. Q, R, K, A_3 liegen auf einem Kreis, folglich ist $2A_1RA_3 = 2QRA_3 = 2QKA_3 = 2QKL = 2QDL = A_1M_1A_3$, d. h. R liegt auf dem Feuerbachschen Kreis. Wegen der Ähnlichkeit der gleichschenkeligen Dreiecke A_1M_1R und QDR liegen M_1, D, R auf einer Geraden, also wird in R der Feuerbachsche Kreis von dem eingeschriebenen Kreis innen berührt. Ebenso wird der Feuerbachsche Kreis von dem Kreis, dessen Centrum D' ist, außen berührt, weil $A_1L'^2 = A_1L^2$ u. s. w.



§. 13. Cyklometrie.

1. Bei allen Kreisen ist sowohl das Verhältnis der Fläche zum Quadratradius, als auch das Verhältnis der Peripherie zum Diameter von unveränderlicher Größe. Diese beiden Verhältnisse sind einander gleich und haben einen irrationalen Wert zwischen 3 und 4, der durch π bezeichnet wird, so daß

$$\text{Kreisfläche} = \pi \square\text{Radien}$$
$$\text{Peripherie} = \pi\,\text{Diameter}^*)$$

Beweis. Sind r und r_1 die Radien, k und k_1 die Flächen, p und p_1 die Peripherien von zwei Kreisen, so hat man zufolge der Ähnlichkeit von Kreisen (§. 12, 3)

$$k : k_1 = r^2 : r_1{}^2$$
$$p : p_1 = 2r : 2r_1$$

*) Der in diesem Satze enthaltene Zusammenhang der Rektifikation (Messung der Länge) des Kreises mit der Quadratur desselben ist von Archimedes gegeben worden; die Quadratur des Kreises und der Ellipse war bereits früher gefunden, aber nicht genügend bewiesen worden. Vergl. Archimedes Quadr. d. Parabel, in der Einleitung.

daher

$$k : r^2 = k_1 : r_1{}^2$$
$$p : 2r = p_1 : 2r_1$$

d. h. bei einem Kreise haben die Verhältnisse der Fläche zum Quadratradius und der Peripherie zum Diameter dieselben Werte, wie bei irgend einem andern Kreise. Wird nun das Verhältnis der Peripherie zum Diameter durch π bezeichnet, mithin $p = 2\pi r$ gesetzt, so hat man $k = \frac{1}{2}pr = \pi r^2$ (§. 10, 4). Daher ist auch $k : r^2 = \pi$.

Die Peripherie des Kreises ist länger als der Perimeter des regulären eingeschriebenen Sechsecks, weil ein Bogen länger ist als seine Sehne (§. 3, 2). Der Perimeter des regulären eingeschriebenen Sechsecks beträgt 3 Diameter, folglich ist $\pi > 3$. Die Fläche des Kreises ist kleiner als die Fläche des regulären umgeschriebenen Vierecks, welche 4 Quadratradien beträgt; also ist $\pi < 4$.

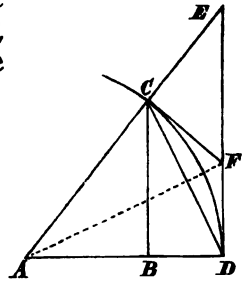
Daß π irrational ist, hat man aus der analytischen Bedeutung dieser Zahl erkannt. Vergl. Allg. Arithm. §. 31, 5 und 10. Obgleich man die Zahl π mit jeder verlangten Genauigkeit begrenzen kann, so ist es doch bisher auf keinem Wege gelungen, durch elementargeometrische Konstruktion (d. h. durch eine endliche Anzahl von Geraden und Kreisen) ein Quadrat zu erhalten, das einem gegebenen Kreise an Fläche, oder eine Strecke, die demselben an Länge genau gleichkäme. Es ist aber auch ein Beweis für die Unmöglichkeit einer solchen Konstruktion nicht bekannt. Vergl. Euler, Introd. II, 540. Ausführlichen Bericht über die Versuche zur Quadratur des Kreises findet man bei Klügel math. W. IV p. 59 ff.

2. Um die Zahl π annäherungsweise zu finden, berechnet man das Verhältnis der Fläche eines dem Kreise ein- oder umgeschriebenen Polygons von hinreichend großer Seitenzahl zum Quadratradius oder das Verhältnis des Perimeters eines solchen Polygons zum Diameter. Der Fehler, den man begeht, indem man das Polygon anstatt des Kreises betrachtet, vermindert sich bei wachsender Seitenzahl des Polygons. Die Fläche oder der Umfang eines dem Kreise ein- oder umgeschriebenen Polygons kann in Quadratradien oder Diametern einfach ausgedrückt werden, wenn das Polygon regulär ist und 4 oder 6 oder 10 Seiten hat. Aus der Fläche (oder dem Umfang) des dem Kreise eingeschriebenen und des demselben umgeschriebenen regulären $n$ecks lassen sich aber die Flächen (oder die Umfänge) der dem Kreise eingeschriebenen und der umgeschriebenen regulären $2n$ecke, $4n$ecke, $8n$ecke, .. berechnen, wie folgt.

Die Flächen der regulären $n$ecke, des einem Kreise eingeschriebenen

und des umgeschriebenen, werden durch e und u, die Flächen der regulären $2n$ecke durch e_1 und u_1, die Flächen der regulären $4n$ecke durch e_2 und u_2, u. s. w. bezeichnet. Dann ist e_1 das geometrische Mittel zwischen e und u, und u_1 das harmonische Mittel zwischen e_1 und u (Algebra §. 1, 9); e_2 das geometrische Mittel zwischen e_1 und u_1, und u_2 das harmonische Mittel zwischen e_2 und u_1, u. s. w.*)

Beweis. Ist der Winkel BAC der $2n$te Teil von 360^0, CBA recht, die Seite $AD = AC$, der Winkel EDA und ACF recht, so ist die Fläche



$$ABC = \frac{e}{2n} \qquad ADE = \frac{u}{2n}$$

$$ADC = \frac{e_1}{2n} \qquad ADFC = \frac{u_1}{2n}$$

$$FEC = \frac{u-u_1}{2n} \qquad DFC = \frac{u_1-e_1}{2n}$$

Zuerst hat man nun $ABC : ADC = AB : AD$ (§. 10, 1) $= AC : AE$ (§. 8, 2) $= ADC : ADE$, folglich $e : e_1 = e_1 : u$, $e_1{}^2 = eu$.

Ferner hat man $FEC : DFC = FE : DF$ (§. 10, 1) $= FEA : DFA = FEA : FCA = AE : AC = ADE : ADC$, folglich $u - u_1 : u_1 - e_1 = u : e_1$, $2ue_1 = u_1 e_1 + u_1 u$,

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{u}\right)$$

Zu einer ähnlichen Annäherung an die Fläche oder den Umfang des Kreises dient die von Cusanus (Zeitgenosse von Regiomontan) und Descartes unternommene Vergleichung eines regulären necks mit einem regulären $2n$eck, $4n$eck, .. von gleicher Fläche oder von gleichem Umfang. Vergl. Klügel math. W. IV p. 77 und 67. Legendre élém. de géom. IV am Ende.

3. Die Differenz zwischen der Fläche des Kreises und e_m oder u_m ist geringer als $u_m - e_m$. Insoweit nun e und u, e_1 und u_1, e_2 und u_2, .. übereinstimmen, geben sie die Fläche des Kreises annäherungsweise an, also auch die Zahl π, wenn man unter e, e_1, e_2, .., u, u_1, u_2, .. die Verhältnisse der einzelnen Polygone zum Quadratradius versteht.

Etwas leichter als die Größen e, e_1, e_2, .., u, u_1, u_2, .. findet man die Reciproken derselben, die der Reihe nach durch f, f_1, f_2, .., v, v_1, v_2, .., bezeichnet werden mögen. Nach (2) hat man nämlich

*) Der erste von diesen Sätzen ist in dieser Form von Snellius (Cyclom. prop. 9), der andere von Jac. Gregory (vera circuli et hyperbolae quadratura 1667, prop. 1 und 12) aufgestellt worden. Gregory's Schrift ist auch in Hugenii opp. varia p. 412 enthalten. Die analogen Sätze für die Umfänge (5) hatte Archimedes in der Cyklometrie gebraucht.

$$f_1 = \sqrt{fv}, \quad v_1 = \frac{f_1 + v}{2}, \ldots$$

Wenn nun f_m und v_m so wenig verschieden sind, daß $\frac{(f_m - v_m)^2}{8v_m}$ innerhalb der Rechnungsgrenzen verschwindet, so kann man für f_{m+1} den Wert $\frac{f_m + v_m}{2}$ setzen (Algebra §. 1, 10), und findet als Grenze, mit der die Glieder der Reihe f_{m+1}, v_{m+1}, f_{m+2}, v_{m+2}, .. mehr und mehr zusammenfallen,

$$\frac{1}{\pi} = v_m + \frac{f_m - v_m}{3}$$

Denn man hat

$$f_{m+1} - v_m = \frac{f_m - v_m}{2}$$

$$v_{m+1} - f_{m+1} = \frac{v_m - f_{m+1}}{2} = -\frac{f_m - v_m}{4}$$

$$f_{m+2} - v_{m+1} = \frac{f_{m+1} - v_{m+1}}{2} = \frac{f_m - v_m}{8}$$

. . . . . .

folglich durch Addition der Kolonnen

$$f_\infty - v_m = \frac{f_m - v_m}{2}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \ldots)$$

$$= \frac{f_m - v_m}{3} \text{ (Allg. Ar. §. 12, 5)}$$

Beispiel. Von den regulären Vierecken hat das dem Kreise eingeschriebene 2, das umgeschriebene 4 Quadratrabien. Aus den Werten $e = 2$, $u = 4$ findet man

f	0,5	v	0,25
f_1	0,353 553	v_1	0,301 776
f_2	0,326 640	v_2	0,314 208
f_3	0,320 364	v_3	0,317 286
f_4	0,318 821	v_4	0,318 054
	. . . .		. . . .

Es ist aber

$$f_4 - v_4 = 0{,}000\,767$$

$$\frac{(f_4 - v_4)^2}{8v_4} = 0{,}000\,0002$$

folglich innerhalb der obigen Rechnungsgrenzen

$$\frac{1}{\pi} = v_4 + \frac{f_4 - v_4}{3} = 0{,}318\,310$$

$$\pi = 3{,}141\,59$$

Anmerkung. Archimedes hat durch Betrachtung der Umfänge der regulären 96ecke die Grenzen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$ für π gefunden. Auf demselben Wege sind im Altertum Apollonius, unter den Neuern Vieta (1579) und Ludolph van Ceulen (1596) weiter gegangen. Nach dem Letztern wird π häufig die Ludolphsche Zahl genannt. Den Näherungswert $\frac{355}{113}$ für π hat Metius, ein Zeitgenosse Ceulens, gegeben. Vergl. Klügel math. W. I p. 644.

4. Wenn e, e_1, e_2, .., u, u_1, u_2, .. die oben (2) angegebene Bedeutung haben, und wenn man die Kreisfläche durch k bezeichnet, so ist

$$e_2 - e_1 > \frac{e_1 - e}{4}$$

$$u - u_2 > \frac{e_1 - e}{2}$$

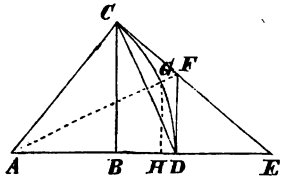
$$e_1 + \frac{e_1 - e}{3} < k < u - \frac{u - e}{3} \text{ *)}$$

Beweis. Ist der Sektor DAC der $2n$te Teil des Kreises, sind die Winkel CBA, ACE, FDA recht, und G die Mitte des Bogens DC, so ist die Dreiecksfläche

$$BDC = \frac{e_1 - e}{2n}, \quad DGC = \frac{e_2 - e_1}{2n}, \quad DEF = \frac{u - u_1}{2n}$$

Zieht man GH mit FD parallel, so ist HDG gleich und ähnlich der Hälfte von DGC, und nach §. 10, 3

$$HDG : BDC = (HD : BD)(HG : BC).$$



Nun ist $HD : BD = DG^2 : DC^2$ (§. 10, 2) $> \frac{1}{4}$, weil $DG : DC > \frac{1}{2}$; ferner $HG : BC > \frac{1}{2}$, weil $HG : DC = \frac{1}{2}$ und $DC : BC > 1$. Folglich ist $HDG : BDC > \frac{1}{8}$,

$$DGC : BDC > \frac{1}{4}, \text{ d. h. } e_2 - e_1 > \frac{e_1 - e}{4}$$

Ferner ist $CF = FD < FE$, folglich

$$DEF : BEC = (FE : CE)^2 > \frac{1}{4} \text{ (§. 11, 1)}$$
$$BEC : BDC = BE : BD = CE : CF > 2$$

*) Huygens de circuli magnitudine inventa 1654, prop. 1—4. (Opera varia 1724 p. 357.) Dieselben Begrenzungen sind arithmetisch aus den in (2) gegebenen Gleichungen von Jac. Gregory abgeleitet worden. Vergl. Kunze Planimetrie 8ter Anhang.

woraus durch Multiplikation folgt

$$DEF : BDC > \tfrac{1}{2}, \text{ d. h. } u - u_1 > \frac{e_1 - e}{2}$$

Weil e_∞ und u_∞ von k nicht verschieden sind, so erhält man aus dem System

$$\begin{array}{lll} e_1 - e & = & e_1 - e \\ e_2 - e_1 & > & \tfrac{1}{4}(e_1 - e) \\ e_3 - e_2 > \tfrac{1}{4}(e_2 - e_1) & > & \tfrac{1}{16}(e_1 - e) \\ e_4 - e_3 > \tfrac{1}{4}(e_3 - e_2) & > & \tfrac{1}{64}(e_1 - e) \\ \cdots \quad\quad \cdots & & \cdots \end{array}$$

durch Addition der Kolonnen

$$k - e > (e_1 - e)(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \ldots)$$
$$k - e > \tfrac{4}{3}(e_1 - e) \quad \text{Allg. Arithm. §. 12, 5.}$$

Dagegen giebt das System

$$\begin{array}{ll} u - u_1 > \tfrac{1}{2}(e_1 - e) \\ u_1 - u_2 > \tfrac{1}{2}(e_2 - e_1) \\ u_2 - u_3 > \tfrac{1}{2}(e_3 - e_2) \\ \cdots \quad\quad \cdots \end{array}$$

durch Addition der Kolonnen

$$u - k > \tfrac{1}{2}(k - e)$$

woraus durch Addition von $k - e$

$$u - e > \tfrac{3}{2}(k - e), \quad k - e < \tfrac{2}{3}(u - e)$$

folgt. Aus der Begrenzung

$$\tfrac{4}{3}(e_1 - e) < k - e < \tfrac{2}{3}(u - e)$$

wird die obige Behauptung durch Addition von e abgeleitet.

Anmerkung. Die Begrenzung

$$\tfrac{4}{3}\frac{e_2 - e_1}{2n} < \frac{k - e_1}{2n} < \tfrac{2}{3}\frac{u_1 - e_1}{2n}$$

giebt zu erkennen, daß das Segment CDG mehr als $\frac{4}{3}$ des eingeschriebenen Dreiecks CDG und weniger als $\frac{2}{3}$ des umgeschriebenen Dreiecks CDF beträgt.

5. Bezeichnet man durch r den Radius des Kreises, und durch $E, E_1, E_2, \ldots, U, U_1, U_2, \ldots, K$ die Perimeter, welche die Flächen $e, e_1, e_2, \ldots, u, u_1, u_2, \ldots, k$ (4) einschließen, so hat man

$$e_1 = \tfrac{1}{2}Er, \quad u = \tfrac{1}{2}Ur, \quad k = \tfrac{1}{2}Kr$$

Denn das Viereck $ADGC = GAD + AGC = \frac{1}{2}AG \cdot DC$ (§. 10, 4), folglich $e_2 = \frac{1}{2}E_1 r$, u. s. w. Mittelst dieser Gleichungen findet man aus (2), daß U_1 das harmonische Mittel zwischen E und U, und E_1 das geometrische Mittel zwischen U_1 und E ist, — Sätze von trigono-

metrischer Bedeutung, auf welche die von Archimedes unternommene Begrenzung der Zahl π sich gründet. Ebenso erhält man aus (4)

$$E_1 + \frac{E_1 - E}{3} < K < U_1 - \frac{U_1 - E}{3}$$

Als obere Grenze hat Huygens (a. a. O. prop. 9) $E + \frac{U-E}{3}$ gefunden. Andere Grenzen der Peripherie des Kreises oder eines Bogens hatte Snellius in der Schrift Cyclometricus 1621 mitgeteilt, von denen eine bereits bei Nicolaus Cusanus (1450) vorkommt (Klügel math. W. IV p. 80). Den Beweis für Snellius' Begrenzung hat Huygens (a. a. O. prop. 15 und 16) geliefert.

6. Engere Begrenzungen der Zahl π sind von Huygens a. a. O. und von Jac. Gregory teils in der angeführten Schrift, teils in dem Anhange der Exercitationes geometricae 1668 angezeigt worden. Unter den hierzu dienlichen Methoden ist folgende von Legendre (élém. de géom. Note 3) gebrauchte durch ihre Tragweite bemerkenswert.

Wenn die Reihen $f, f_1, f_2, \ldots$ und $v, v_1, v_2, \ldots$ dadurch gebildet werden, daß (3)

$$f_1 = \sqrt{fv}, \qquad v_1 = \frac{f_1 + v}{2}$$

$$f_2 = \sqrt{f_1 v_1}, \qquad v_2 = \frac{f_2 + v_1}{2}, \text{ u. s. w.}$$

so nähern sich ihre Glieder einer bestimmten Grenze, weil $2f_1 - 2v_1 = f_1 - v < f - v$, also $f_1 - v_1 < \frac{1}{2}(f - v)$, u. s. w.

Zur Berechnung dieser Grenze setzt man $f = v(1+\delta)$ und die Grenze $= v(1 + A\delta + B\delta^2)$, worin A, B näher zu bestimmende Coefficienten bedeuten. Setzt man ferner $f_1 = v_1(1+\delta_1)$, so wird die Grenze $= v_1(1 + A\delta_1 + B{\delta_1}^2)$, weil dieselbe durch den vorgeschriebenen unendlichen Proceß ebenso wohl aus f_1 und v_1, als aus f und v gefunden wird. Es ist aber (Allg. Arithm. §. 32, 2)

$$f_1 = v\sqrt{1+\delta} = v(1 + \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{8}\delta^2)$$
$$v_1 = \tfrac{1}{2}(f_1 + v) = v(1 + \tfrac{1}{4}\delta - \tfrac{1}{16}\delta^2)$$

wenn man die höhern Potenzen von δ als unbeträchtlich klein wegläßt. Durch Division findet man

$$\frac{f_1}{v_1} = \frac{1 + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{8}\delta^2}{1 + \frac{1}{4}\delta - \frac{1}{16}\delta^2} = 1 + \tfrac{1}{4}\delta - \tfrac{1}{8}\delta^2 = 1 + \delta_1$$

$$\delta_1 = \tfrac{1}{4}\delta - \tfrac{1}{8}\delta^2, \quad {\delta_1}^2 = \tfrac{1}{16}\delta^2$$

Die Identität der Grenzen

$$1+A\delta+B\delta^2 = (1+\tfrac{1}{4}\delta-\tfrac{1}{16}\delta^2)(1+\tfrac{1}{4}A\delta-\tfrac{1}{8}A\delta^2+\tfrac{1}{16}B\delta^2)$$
$$= 1 \quad + \tfrac{1}{4} \mid \delta \quad - \tfrac{1}{16} \mid \delta^2$$
$$+\tfrac{1}{4}A \mid \quad +\tfrac{1}{16}A \mid$$
$$-\tfrac{1}{8}A \mid$$
$$+\tfrac{1}{16}B \mid$$

lehrt (Algebra §. 4, 1), daß

$$\tfrac{3}{4}A = \tfrac{1}{4}, \qquad A = \tfrac{1}{3}$$
$$\tfrac{15}{16}B = -\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}A-\tfrac{1}{8}A, \quad B = -\tfrac{1}{12}$$

ist, und mithin die gesuchte Grenze $v(1+\frac{1}{3}\delta-\frac{1}{12}\delta^2)$.

Beispiel. Aus den Werten (3)

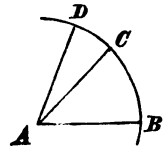
$$f_3 = 0{,}320\,364 \qquad v_3 = 0{,}317\,286$$

findet man für die Grenze

$$\begin{array}{r} 0{,}317\,286 \\ +0{,}001\,026 \\ -0{,}000\,0025 \\ \hline 0{,}318\,3095 \end{array}$$

Anmerkung. Die analytische Berechnung der Zahl π (Allg. Arithm. §. 31 und 32) wurde vorbereitet durch Vieta (Klügel math. W. II p. 606), Wallis und Brouncker, vollendet durch Jac. Gregory, Newton und Leibniz (Klügel math. W. I p. 654).

7. Das Verhältnis von Bogen eines Kreises ist dem Verhältnis ihrer Centriwinkel gleich. Eucl. VI, 33.



Beweis. Der Winkel BAC enthält den $m$ten Teil von BAD entweder $n$mal, oder mehr als $n$mal und weniger als $(n+1)$mal, d. h. $BAC : BAD = n : m$, oder

$$n : m < BAC : BAD < n+1 : m$$

Die Geraden, welche den Winkel BAD in m gleiche Teile teilen, teilen auch den Bogen BD in m gleiche Teile, weil zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bogen des Kreises gehören (§. 1, 6). Wenn nun der Winkel BAC den $m$ten Teil von BAD $n$mal enthält, so enthält auch der Bogen BC den $m$ten Teil des Bogens BD $n$mal, d. h.

$$BC : BD = n : m = BAC : BAD$$

Wenn aber

$$n : m < BAC : BAD < n+1 : m$$

so ist auch

$$n : m < BC : BD < n+1 : m$$

Die Differenz der Verhältnisse $(BC : BD) - (BAC : BAD)$ kann von Null nicht verschieden sein, weil sie kleiner ist als der beliebig kleine Bruch $\frac{1}{m}$. Vergl. §. 10, 1.

8. Die einem Winkel concentrisch eingeschriebenen Kreisbogen sind ähnlich (1), also hat jeder von ihnen zu seinem Radius dasselbe Verhältnis, welches der Arcus des Winkels heißt. Der Arcus von 180^0 ist π, der Arcus von 1^0 ist $\pi : 180$ (7), der Arcus von α^0 ist $\alpha\pi : 180 = \alpha : \frac{180}{\pi}$, der Arcus eines Winkels ist das Verhältnis des Winkels zum πten Teil von 180^0.

Der Centriwinkel, dessen Bogen so lang ist als der Radius, hat den Arcus 1 und $180 : \pi$ Grad, d. i.

$$57^0{,}2958 = 3437'{,}75 = 206265''$$

Der Arcus a gehört zu dem Winkel von $(180 : \pi)a$ Grad. Demnach ist

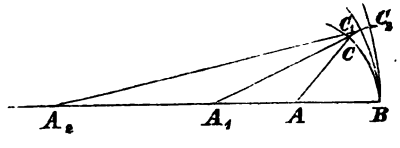
$$\text{Kreisbogen} = \text{Arcus des Centriw.} \times \text{Radius}$$

$$\text{Kreissektor} = \tfrac{1}{2}\text{Arcus des Centriw.} \times \text{Quadrat-Radius}$$

(§. 10, 4)

Wie man Größe abkürzend setzt für ihr Verhältnis zur Einheit, so setzt man Winkel für seinen Arcus, indem man den πten Teil von 180^0 als Winkeleinheit nimmt.

Anwendungen. Wenn $BA_1 = 2BA$, $BA_2 = 2BA_1$, u. s. w., wenn von den Kreisen, deren Centren A_1, A_2, .. und deren Radien A_1B, A_2B, .. sind, der erste von der Geraden A_1C in C_1, der zweite von der Geraden A_2C_1 in C_2, .. geschnitten wird, so sind die Bogen BC, BC_1, BC_2, .. von gleicher Länge. Denn der Winkel $BA_1C_1 = BA_1C$ ist die Hälfte von BAC (§. 4, 2), u. s. w., folglich

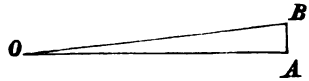


$$AB \,.\, BAC = A_1B \,.\, BA_1C_1 = A_2B \,.\, BA_2C_2 = \ldots$$

Wenn R das Centrum des Kreises $ABCS$ ist, und wenn der um S mit dem Radius SA beschriebene Kreis von den Geraden SB, SC in B', C' geschnitten wird, so ist $AB' = SA \,.\, ASB'$, $AB = RA \,.\, ARB$, $2ASB' = 2ASB = ARB$, folglich $AB' : AB = SA : 2RA$, $AB' : AC' = AB : AC$.

Die scheinbare Höhe eines Objekts ist dem Verhältnis seiner vertikalen Höhe zum horizontalen Abstand vom Auge um so mehr gleich, je kleiner dieses Verhältnis, d. h. je weniger die Höhe des Objekts von einem Kreisbogen verschieden ist, dessen Centriwinkel die scheinbare Höhe

des Objekts angiebt. Ist z. B. $AB = 27{,}3$ Fuß, $OA = 1859$ Fuß, der Winkel BAO recht, so hat man $AB : OA = 0{,}0147$ und die scheinbare Höhe $AOB = 0{,}0147 . 3438' = 50',5$.



Die logarithmische Berechnung wird Algebra §. 8, 3 gezeigt.

9. Auf einer Kurve teile man von einem ihrer Punkte aus Bogen von gleicher Länge ab, ziehe die Tangenten der Kurve in den Teilpunkten (§. 3, 5), und bestimme den Winkel jeder Tangente mit der vorhergehenden. Wenn nun diese Winkel einander gleich sind, wie klein auch die gleichen Bogen genommen werden mögen, so ändert sich die Richtung der Kurve von dem gewählten Anfange an gleichförmig, die Kurve ist daselbst gleichförmig gekrümmt und hat eine unveränderliche Krümmung (curvatura, courbure). Wenn aber diese Winkel ungleich sind, so ändert sich die Richtung der Kurve ungleichförmig, die Kurve ist ungleichförmig gekrümmt und hat veränderliche Krümmung. Jeder Kreis ist gleichförmig gekrümmt, weil der Winkel der Tangenten an den Enden eines Bogens dem Centriwinkel gleich ist (§. 4, 8.), und zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel gehören.

Unter der Krümmung eines Kreises d. i. einer gleichförmig gekrümmten Linie ist der Winkel zu verstehn, welchen die Tangenten an den Enden eines Bogens bilden, dessen Länge einer Längeneinheit gleichkommt. Folglich hat man

$$\text{Krümmung des Kreises} = \frac{1}{\text{Radius}}$$

weil jener Winkel dem Centriwinkel des Bogens gleich ist, der aus (8) gefunden wird. Diese Gleichung lehrt, daß bei einem Kreise, dessen Radius r Einheiten hat, die Richtung um den $r$ten Teil von $180^0 : \pi$ sich ändert, wenn der Bogen um eine Einheit sich ändert. Man schließt ferner, daß der Kreis den $r$ten Teil so stark gekrümmt ist, als ein Kreis, dessen Radius eine Einheit ist; daß die Krümmung des Kreises unendlich wird, wenn der Radius verschwindet und der Kreis mit seinem Centrum zusammenfällt; daß die Krümmung des Kreises verschwindet, wenn der Radius unendlich wird und der Kreis mit einer seiner Tangenten zusammenfällt.

Anwendung. Die Summe der Krümmungen der Kreise, welche von den Seiten eines Dreiecks je eine außen, die beiden andern innen berühren, ist der Krümmung des eingeschriebenen Kreises gleich. Wenn die Seiten des Dreiecks BC, CA, AB der Reihe nach a, b, c Einheiten haben, wenn D, F, G, H die Centren der dem Dreieck einge-

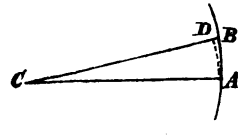
schriebenen Kreise bedeuten, unter denen der erste von dem Dreieck eingeschlossen ist, der zweite die Seite BC außen berührt, u. s. w., wenn ferner die Radien dieser Kreise der Reihe nach d, f, g, h Einheiten betragen und die Fläche des Dreiecks $\triangle$ Quadrateinheiten hat, so schließt man aus den Gleichungen $ABC = +BCD+CAD+ABD = -CBF+CAF+ABF = ..$, $2\triangle = (a+b+c)d = ..$, daß

$$\frac{1}{d} = \frac{a+b+c}{2\triangle}, \quad \frac{1}{f} = \frac{-a+b+c}{2\triangle}$$
$$\frac{1}{g} = \frac{a-b+c}{2\triangle}, \quad \frac{1}{h} = \frac{a+b-c}{2\triangle}$$

folglich $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}+\frac{1}{h} = \frac{1}{d}$*), worin die obige Behauptung enthalten ist.

10. Eine ungleichförmig gekrümmte Linie hat in jedem Punkte eine bestimmte Krümmung, in verschiedenen Punkten im allgemeinen verschiedene Krümmungen. Um die Krümmung der Kurve in einem ihrer Punkte zu berechnen, bilde man den Winkel der Tangenten des gegebenen Punkts und eines in seiner Nähe beliebig gewählten Punkts, oder den gleich großen Winkel der Normalen dieser Punkte (§. 3, 6). Der Quotient des so entstandenen Winkels („Kontingenzwinkel" bei den Neuern) durch den zwischen den Berührungspunkten liegenden Bogen drückt die gesuchte Krümmung insoweit genau aus, als der Bogen für gleichförmig gekrümmt gelten darf (9). Diese Voraussetzung wird um so mehr erfüllt, je kleiner der Bogen. Also ist die gesuchte Krümmung die in jedem gegebenen Falle zu berechnende Grenze, welche jener Quotient erreicht, indem der Bogen verschwindet.

Wenn A der gegebene Punkt der Kurve, B ein beliebiger Punkt der Kurve in der Nähe von A ist; wenn die Normalen der Kurve in A und B gezogen werden und die erstere von der letztern in C geschnitten wird; wenn ferner der Kreis, dessen Centrum C und dessen Radius CA ist, die Normale CB in D schneidet, so ist der Winkel ACB dem Quotienten des Bogens AD durch den Radius CA gleich (8). Folglich ist der Quotient von ACB durch den Bogen AB soviel als das Produkt des Verhältnisses der Bogen $AD : AB$ mit der Krümmung des Kreises (C). Weil aber die Bogen AD und AB normal zu AC sind, so berühren sie einander und fallen um so mehr zusammen, je kleiner der Bogen AB und dadurch



*) L'Huilier Élém. d'analyse géom. et algébr. p. 224. Vergl. Stereom. §. 8, 14.

der Winkel ACB wird. Dabei behält C eine endliche Entfernung von A, wenn nicht die Kurve in A die Krümmung 0 hat. Mithin ist die Krümmung der Kurve in A der Krümmung eines bestimmten Kreises gleich, welcher unter den die Kurve in A berührenden Kreisen am meisten mit der Kurve zusammenfällt, so daß zwischen ihm und der Kurve ein Kreis nicht gezogen werden kann. Dieser Kreis heißt der Krümmungskreis (Osculationskreis) für den gegebenen Punkt der Kurve, sein Centrum das Krümmungscentrum, sein Radius der Krümmungsradius. Weil ein die Kurve in A berührender Kreis, der durch B geht, in den Krümmungskreis übergeht, wenn B mit A zusammenfällt, so sagt man, daß der Krümmungskreis mit der Kurve 3 unendlich nahe Punkte gemein hat, deren Verein der Berührungspunkt ist, und nennt seine Berührung (die zugleich Durchschneidung ist) 3punktig. Andere Kreise, welche die Kurve in demselben Punkt berühren, haben mit ihr wie die gerade Tangente 2punktige Berührungen (§. 3, 5).

Die Lehre von der Krümmung der Kurven wurde angeregt durch Huygens' Lehre von der Abwickelung der Kurven (Horol. oscill. 1673. 3ter Abschn.), und findet sich ausgebildet bei Newton in mehrern Stellen der Principia (1687), besonders aber Methodus fluxionum, probl. 5 und 6 (zuerst 1736 gedruckt). Gleichzeitig hat denselben Gegenstand Leibniz beleuchtet (Acta Erud. 1686), von dem der Ausdruck Osculation herrührt, nicht ohne Irrungen, welche Jac. Bernoulli Acta Erud. 1692 berichtigte. Vergl. Klügel math. W. III p. 398.

§. 14. Produkte und Quadrate von Strecken.*)

1. Die Strecke AB einer gegebenen Geraden habe x Längeneinheiten. Wenn die Zahl x um y steigt oder fällt, so bewegt sich der Endpunkt B der Strecke AB auf der gegebenen Geraden vorwärts in der Richtung von A nach B oder rückwärts in der entgegengesetzten Richtung. Wenn in dem zweiten Falle die Differenz $x - y$ null oder negativ wird, so fällt der Endpunkt B mit dem Anfang A zusammen oder über denselben hinaus auf die andere Seite der gegebenen Geraden. Zwei Strecken AB und AC einer Geraden haben also Werte von gleichen oder von entgegengesetzten Zeichen, je nachdem die Richtung von A nach C mit der Richtung von A nach B übereinstimmt oder nicht.**)

*) Dieser Abschnitt ist eigentlich trigonometrisch; die in Betracht gezogenen metrischen Relationen sind solche, die Winkel und Winkelfunktionen nicht enthalten.

**) Negative Strecken sind seit dem Anfang des 17ten Jahrhunderts, namentlich durch Girard, Descartes u. A. in Gebrauch gekommen. Die folgerichtige Unterscheidung der Strecken AB und BA ist aber erst von Möbius 1827 (Baryc. Calc. §. 1) in den geometrischen Calcul eingeführt worden.

Die Strecken AB und BA sind entgegengesetzt gleich, d. h.

$$BA = -AB, \quad AB + BA = 0$$

Wie auch die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen mögen, immer ist $AB + BC + CA = 0$, $AB + BC = AC$, $BC = AC - AB$, u. s. w. Denn bei jeder Aufeinanderfolge der drei Punkte ist eine der Strecken AB, BC, CA der Summe der beiden andern entgegengesetzt gleich.

Das Zeichen irgend einer Strecke MN ist erst dann bestimmt, wenn eine Strecke derselben Geraden als positiv gegeben ist, deren Richtung die positive Richtung der Geraden heißt. Bei parallelen Geraden wird vorausgesetzt, daß ihre positiven Richtungen übereinstimmen; zwei parallele Strecken AB und CD haben dann gleiche oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem die Richtung von A nach B mit der Richtung von C nach D übereinstimmt oder nicht. In dem Parallelogramm $ABCD$ ist demnach $AB + CD = BC + DA = 0$.

Ist C die Mitte der Strecke AB, und O ein beliebiger Punkt der Geraden AB, so ist das Produkt der Strecken

$$AO \,.\, BO = (AC + CO)(CO - CB) = CO^2 - CB^2 = CO^2 - \tfrac{1}{4}AB^2$$

positiv oder negativ, je nachdem O die Strecke AB außen oder innen teilt. Ebenso findet man

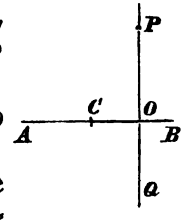
$$AO^2 + BO^2 = 2AC^2 + 2CO^2 = \tfrac{1}{2}AB^2 + 2CO^2$$
$$AO^2 - BO^2 = 4AC \,.\, CO \qquad = 2AB \,.\, CO$$

Die Differenz ist positiv oder negativ, je nachdem O näher an B oder an A liegt, je nachdem CO und AB gleiche Zeichen haben oder nicht.

2. Für alle Punkte einer Normale zu AB ist die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von A und B von derselben Größe. Wird AB von der Normale in O geschnitten, so ist für jeden Punkt P der Normale nach §. 10, 5

$$OP^2 = AP^2 - AO^2 = BP^2 - BO^2$$

folglich $AP^2 - BP^2 = AO^2 - BO^2 = 2AB \,.\, CO$ wenn C die Mitte von AB (1).

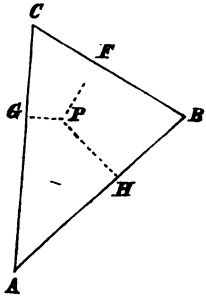


Umgekehrt schließt man, daß die Punkte, für welche die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von 2 gegebenen Punkten von gegebener Größe ist, auf einer bestimmten Geraden liegen, welche die Strecke der gegebenen Punkte rechtwinkelig schneidet.*) Wenn $AP^2 - BP^2 = AQ^2 - BQ^2$ ist, so ist PQ normal

*) Apollonius im 2ten Buch der ebenen Örter. Vergl. Simsons Bearbeitung übers. von Camerer p. 209.

zu AB. Gesetzt, die Normalen zu AB durch P und Q schnitten AB in O und O', so wäre $AP^2 - BP^2 = 2AB.CO$, $AQ^2 - BQ^2 = 2AB.CO'$, folglich die eine Differenz von der andern verschieden.

Wenn P ein beliebiger Punkt der Ebene des Dreiecks ABC ist, und wenn die Seiten AB, BC, CA von den Normalen aus P in H, F, G geschnitten werden, so hat man



$$AH^2 - BH^2 = AP^2 - BP^2$$
$$BF^2 - CF^2 = BP^2 - CP^2$$
$$CG^2 - AG^2 = CP^2 - AP^2$$

folglich durch Addition

$$AH^2 - BH^2 + BF^2 - CF^2 + CG^2 - AG^2 = 0$$

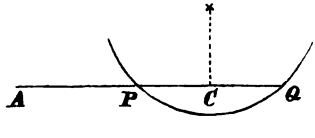
Sind C_1, A_1, B_1 die Mitten von AB, BC, CA, so ist (1) $AH^2 - BH^2 = 2AB.C_1H$, u. s. w., mithin

$$AB.C_1H + BC.A_1F + CA.B_1G = 0$$

wobei die Produkte positiv oder negativ sind, je nachdem AB und C_1H, BC und A_1F, CA und B_1G einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben.

Umgekehrt schließt man aus der Gleichung $AH^2 - BH^2 + BF^2 - CF^2 + CG^2 - AG^2 = 0$ oder $AB.C_1H + BC.A_1F + CA.B_1G = 0$, daß die Geraden, welche BC in F, CA in G, AB in H normal schneiden, durch einen Punkt gehn.

3. Wenn eine durch den gegebenen Punkt A gezogene Gerade mit einem gegebenen Kreis die Punkte P und Q gemein hat, so ist (1)



$$AP.AQ = AC^2 - PC^2$$

wenn C die Mitte von PQ ist, und (2)

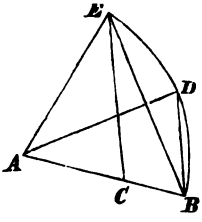
$$AC^2 - PC^2 = AB^2 - PB^2$$

wenn B das Centrum des Kreises ist. Daher hat das Produkt $AP.AQ = AB^2 - PB^2$ für jede durch A gehende und den Kreis in P und Q schneidende Gerade denselben Wert und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Strecken AP und AQ einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben, d. h. je nachdem der gegebene Punkt A vom Kreise ausgeschlossen oder eingeschlossen ist. Dieses durch den Punkt und den Kreis bestimmte Produkt heißt die **Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis** (§. 11, 4), welche entweder positiv und dem Quadrat der aus dem Punkte an den Kreis sich erstreckenden Tangente gleich ist, oder negativ und gleich dem Quadrat der halben Sehne, welche unter den durch den Punkt gehenden Sehnen am kleinsten ist.

Anwendung. Wenn man in dem gleichschenkeligen Dreieck PQB einen Punkt der Basis PQ durch A bezeichnet, so hat man

$$AB^2 = PB^2 + AP.AQ$$

worin das Produkt einen negativen Wert hat, wenn A von PQ eingeschlossen ist.

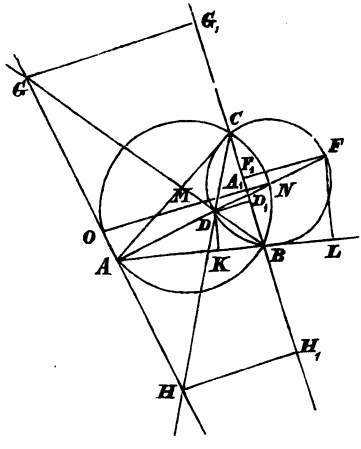


Hieraus erkennt man, daß das Quadrat der Seite des regulären Fünfecks der Summe der Quadrate der Seiten des regulären Zehnecks und Sechsecks gleich ist, wenn diese Figuren demselben Kreise eingeschrieben sind (Eucl. XIII, 10). Es sei $AE = CE = AD = AB$, $AC = BD$ gleich dem goldnen Abschnitt von AB, so daß $AC^2 = AB.CB$ (§. 11, 6). Dann sind BD, AE, BE die Seiten des dem Kreise, der um A mit dem Radius AB gezogen ist, eingeschriebenen regulären Zehnecks, Sechsecks, Fünfecks, und man hat

$$BE^2 = AB.CB + AE^2 = BD^2 + AE^2$$

4. Die Potenz des Centrums eines dem Dreieck eingeschriebenen Kreises in Bezug auf den dem Dreieck umgeschriebenen Kreis ist das doppelte Produkt der Radien dieser Kreise.*)

Beweis. Ist M das Centrum des Kreises ABC, N die Mitte des Bogens BC, und wird die Gerade AN von dem Kreis, den man um das Centrum N mit dem Radius NB beschreibt, in D und F geschnitten, so lehrt die Gleichheit der Winkel $2DCB$, DNB, ANB, ACB, daß D das Centrum des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises ist (§. 6, 8). Weil der Winkel FBD recht ist, so ist F das Centrum des Kreises, der dem Winkel BAC eingeschrieben ist und die Seite BC außen berührt. Zieht man den Diameter NO des Kreises ABC, so ist der Winkel NAO recht, und AO wird von



*) Euler Nov. Comm. Petrop. 11 p. 114. Über die Relation zwischen dem Abstand der Centren und den Radien von Kreisen, deren einer einem Polygon umgeschrieben ist, während der andere demselben Polygon eingeschrieben ist, vergl. N. Fuß 1798 Nov. Act. Petrop. 10 p. 103, 13 p. 166, Steiner Crelle J. 2 p. 289, Jacobi Crelle J. 3 p. 376.

BD und CD in den Punkten G und H geschnitten, den Centren der Kreise, die den Winkeln CBA und ACB eingeschrieben sind und die Seiten CA und AB außen berühren.

Die von den gleichen Winkeln BON, BAN abgeschnittenen rechtwinkeligen Dreiecke OBN, AKD, ALF sind ähnlich, d. h.

$$ON : BN = AD : KD = AF : LF$$
$$AD.DN = KD.ON, \quad AF.NF = LF.ON$$

Weil nun $AD.DN = AM^2 - MD^2$ (3) u. s. w., so hat man, indem die Radien der um M, D, F, G, H beschriebenen Kreise durch r, d, f, g, h bezeichnet werden,

$$MD^2 - r^2 = -2dr$$
$$MF^2 - r^2 = 2fr$$
$$MG^2 - r^2 = 2gr$$
$$MH^2 - r^2 = 2hr$$

Weil MD^2 positiv ist, so kann $2d$ nicht größer als r sein.

Zusatz. Die Winkel GCH, GBH sind recht, also liegen B, C, G, H auf einem Kreise, für welchen G und H Gegenpunkte sind. Die Sehne BC wird von MN in A_1 normal halbiert, folglich ist O das Centrum des Kreises $BCGH$, und die Mitte von GH. Dabei ist N die Mitte von DF, und M die Mitte von NO, folglich ist das Centrum M der Schwerpunkt der Centren D, F, G, H.*) Zieht man nun normal zu BC die Strecken DD_1, FF_1, GG_1, HH_1, so ist A_1 die gemeinschaftliche Mitte von G_1H_1 und D_1F_1, folglich (§. 8, 4)

$$g + h = 2OA_1$$
$$f - d = 2A_1N$$

Durch Addition findet man

$$f + g + h - d = 4r$$**)
$$MD^2 + MF^2 + MG^2 + MH^2 = 12r^2$$

unveränderlich für alle demselben Kreise eingeschriebenen Dreiecke. Durch Subtraktion findet man

$$-f + g + h + d = 4MA_1$$
$$f - g + h + d = 4MB_1$$
$$f + g - h + d = 4MC_1$$

wenn B_1, C_1 die Mitten von CA, AB bedeuten. Ist der Winkel BAC stumpf, so tritt $-A_1M$ an die Stelle von MA_1. Hieraus ergiebt sich z. B.

*) Beltrami 1863 (Grunert Archiv 42 p. 356). Binder Württemb. Korresp.-Blatt 1872 p. 96.

**) Feuerbach das geradl. Dreieck 5 und 50.

$$\begin{aligned} MA_1 + MB_1 + MC_1 &= d + r^*) \\ -MA_1 + MB_1 + MC_1 &= f - r \\ MA_1 - MB_1 + MC_1 &= g - r \\ MA_1 + MB_1 - MC_1 &= h - r \end{aligned}$$

Durch Multiplikation findet man $(g+h)(f-d) = BC^2$, u. s. w.

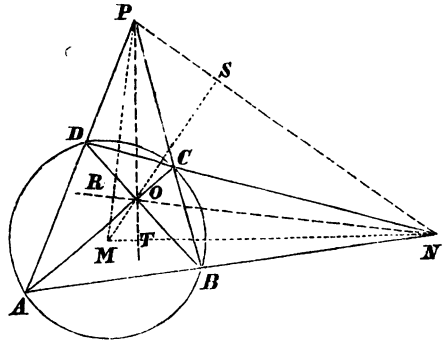
5. Wenn die Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen, und die Geraden AB, CD außen in N, die Geraden BC, DA außen in P, die Geraden AC, BD innen in O sich schneiden, so schneiden sich die Kreise

ABP, BCN, CDP, DAN in einem Punkt S der Geraden PN
ABO, BDN, DCO, CAN " " " R " " NO
ACP, CBO, BDP, DAO " " " T " " OP

Die Summe der Potenzen von je zwei der Punkte P, N, O in Bezug auf den Kreis ist dem Quadrat ihres Abstandes gleich**), d. h. wenn man das Centrum durch M, den Radius durch r bezeichnet, so hat man

$$\begin{aligned} MP^2 + MN^2 - 2r^2 &= PN^2 \\ MN^2 + MO^2 - 2r^2 &= NO^2 \\ MO^2 + MP^2 - 2r^2 &= OP^2 \end{aligned}$$

Dabei sind R, S, T die Fußpunkte, M der Durchschnitt der Höhen des Dreiecks NOP.



Beweis. Wird der andere Durchschnitt der Kreise BCN und CDP durch S bezeichnet, so erhält man die Gleichungen der Winkel

$2PSC = 2PDC = 2ADC$,
$2CSN = 2CBN = 2CBA$,

daher durch Addition

$2PSN = 2ADC + 2CBA = 0$,

woraus man erkennt, daß S auf der Geraden PN liegt.

Durch S gehn die Kreise DAN, ABP. Vergl. §. 4, 7 Anm. Nun ist (3)

$$\begin{aligned} MP^2 - r^2 &= PB.PC = PN.PS \\ MN^2 - r^2 &= CN.DN = PN.SN \end{aligned}$$

daher durch Addition und Subtraktion

*) Carnot géom. de pos. 137.
**) Stewart 1763 propos. geom. I, 39 nach der Angabe von Chasles Ap. hist. p. 178 d. Übers.

$$MP^2 + MN^2 - 2r^2 = PN^2$$
$$MP^2 - MN^2 = (PS + SN)(PS - SN) = PS^2 - SN^2$$

Auf demſelben Wege findet man

$$MN^2 + MO^2 - 2r^2 = NO^2$$
$$MO^2 + MP^2 - 2r^2 = OP^2$$

mithin durch Subtraktion

$$MN^2 - MP^2 = NO^2 - OP^2$$

Nach (2) erkennt man aus dieſen Gleichungen, daß ſowohl SM, als auch OM normal zu PN ſind, u. ſ. w.

Anmerkung. Wenn man dem Kreiſe beliebig viele Vierecke einſchreibt, von denen je ein Paar gegenüberliegende Seiten durch einen gegebenen Punkt N gehn, ſo ſchneiden ſich die andern gegenüberliegenden Seiten auf einer beſtimmten Geraden OP.*) Denn $PN^2 - MP^2$ hat den unveränderlichen Wert $MN^2 - 2r^2$, alſo liegen die Durchſchnitte P auf einer Geraden, die MN normal in T ſchneidet. Die Punkte N und T teilen den durch N gehenden Diameter harmoniſch, weil $TN^2 - MT^2 = PN^2 - MP^2$, $(MN - MT)^2 - MT^2 = MN^2 - 2r^2$, $MN.MT = r^2$, $MN + r : MN - r = r + MT : r - MT$ (§. 8, 6). Fällt AB mit CD zuſammen, ſo werden BC und AD Tangenten des Kreiſes in C und D, deren Durchſchnitt alſo auch auf der Geraden OP liegt. Fällt C mit D zuſammen, ſo wird CD eine durch N gehende Tangente des Kreiſes, deren Berührungspunkt auf derſelben Geraden OP liegt.

Die Gerade OP heißt die Polare des Punktes N in Bezug auf den Kreis, der Punkt N der Pol der Geraden. Ebenſo iſt PN die Polare von O, O der Pol von PN, NO die Polare von P, P der Pol von NO.

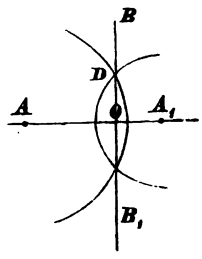
6. Jeder Punkt, der in Bezug auf zwei gegebene Kreiſe gleiche Potenzen hat, liegt auf einer beſtimmten Geraden, welche den Abſtand der Centren AA_1 normal in O ſo teilt, daß $AO^2 - A_1O^2$ der Differenz der Quadrate der Radien gleich iſt, und durch die gemeinſchaftlichen Punkte der Kreiſe geht.**) Geſetzt, die Punkte B und B_1 haben in Bezug auf die Kreiſe (A) und (A_1), deren Radien r und r_1 ſind, gleiche Potenzen, ſo hat man (3)

*) Dieſe Gerade kommt nach ihren metriſchen Eigenſchaften im zweiten Buch der ebenen Örter von Apollonius vor (Simſons Bearbeitung überſ. von Camerer p. 325). Die graphiſchen Beziehungen des Dreiecks NOP zu dem Kreis (M) hat Brianchon (lignes du 2. ordre 20) angegeben. Über Pol und Polare vergl. Stereom. §. 1, 9. Trigon. §. 7, 21.

**) Gaultier 1812 (J. de l'éc. polyt. Cah. 16 p. 139) hat dieſe Gerade be-

$$BA^2 - r^2 = BA_1{}^2 - r_1{}^2, \qquad B_1A^2 - r^2 = B_1A_1{}^2 - r_1{}^2$$
$$BA^2 - BA_1{}^2 = B_1A^2 - B_1A_1{}^2 = OA^2 - OA_1{}^2 = r^2 - r_1{}^2$$

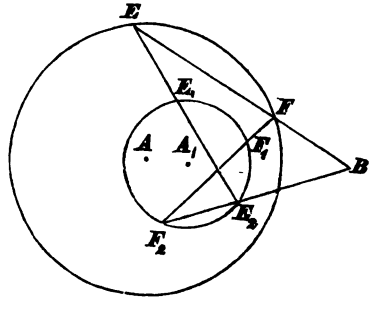
woraus man schließt (2), daß AA_1 von BB_1 normal in O geschnitten wird. Ist D ein gemeinschaftlicher Punkt der Kreise, so ist $DA^2 - DA_1{}^2 = r^2 - r_1{}^2$, folglich D ein Punkt der Geraden BB_1.



Die Punkte der Geraden BB_1, welche von den Kreisen eingeschlossen werden, haben die Eigenschaft, daß durch dieselben kleinste Sehnen der Kreise gehn, welche einander gleich sind. Die von den Kreisen ausgeschlossenen Punkte der Geraden BB_1 haben die Eigenschaft, daß durch dieselben Tangenten der Kreise gehn, welche einander gleich sind; diese Punkte sind mithin die Centren und die gleichen Tangenten sind die Radien von Kreisen, welche die gegebenen Kreise rechtwinkelig schneiden, und deren Orthogonalkreise heißen. Die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise werden von der Geraden BB_1 halbiert.

Wenn die gegebenen Kreise einander schneiden, so geht die Gerade BB_1 durch die Durchschnittspunkte der Kreise. Wenn die Kreise einander berühren, so ist die Gerade BB_1 die Tangente der Kreise, welche durch den gemeinschaftlichen Berührungspunkt geht. Wenn die Kreise einander weder schneiden noch berühren, so findet man einen Punkt der Geraden BB_1 mit Hilfe eines beliebigen dritten Kreises, der den Kreis (A) in E und F, den Kreis (A_1) in E_2 und F_2 schneidet. Der gemeinschaftliche Punkt der Geraden EF und E_2F_2 ist der gesuchte Punkt B, weil $BE.BF = BE_2.BF_2$ (3).

Zusatz. Wenn die Bogen EF und E_1F_1 der Kreise (A) und (A_1) ähnlich und perspektivisch, also die Radien AE und A_1E_1, AF und A_1F_1 paarweise parallel sind (§. 12,7), und wenn der Kreis (A_1) von den Geraden EE_1 und FF_1 in E_2 und F_2 geschnitten wird, so liegen die Punkte E, F, E_2, F_2 auf einem Kreise, und die Geraden EF und

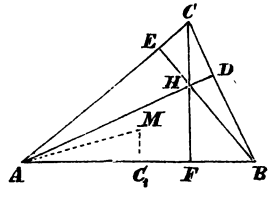


trachtet und axe radical genannt. Dieselbe ist von Poncelet (propr. proj. 77) als gemeinschaftliche Sehne (reale oder ideale), von Magnus (Aufgaben I §. 45) als Kollineationsaxe der Kreise bezeichnet worden, und heißt bei Steiner (Crelle J. 1 p. 165) die Linie der gleichen Potenzen, bei Plücker (anal. geom. Entw. §. 93) die Chordale der Kreise.

E_2F_2 schneiden sich in einem Punkt B, der in Bezug auf die gegebenen Kreise gleiche Potenzen hat. Denn es ist der Winkel $2EFF_2 = 2E_1F_1F_2$, weil EF und E_1F_1 parallel sind, $2E_1F_1F_2 = 2EE_2F_2$, weil E_2 auf dem Kreise $E_1F_1F_2$ liegt, also $2EFF_2 = 2EE_2F_2$. Daher liegt E_2 auf dem Kreise EFF_2, und man hat $BE.BF = BE_2.BF_2$.

Wenn man also durch einen Ähnlichkeitspunkt der Kreise (A) und (A_1) Gerade zieht, die die Kreise in E und E_2, F und F_2, G und G_2, .. schneiden, und die Figuren EFG .. und $E_2F_2G_2$ .. perspektivisch aber nicht ähnlich sind, so schneiden sich die entsprechenden Sehnen EF und E_2F_2, .. auf der Geraden, deren Punkte in Bezug auf die Kreise gleiche Potenzen haben.*)

7. Es giebt im allgemeinen nur einen Punkt, der in Bezug auf 3 gegebene Kreise gleiche Potenzen hat. Durch diesen Punkt gehn die Geraden (6), deren Punkte in Bezug auf jedes Paar von den gegebenen Kreisen gleiche Potenzen haben; durch denselben Punkt gehn also die vorhandenen gemeinschaftlichen Sehnen oder Tangenten der Kreise.**) Wenn dieser Punkt von den Kreisen ausgeschlossen ist, so ist er das Centrum des Kreises, der die gegebenen Kreise rechtwinkelig schneidet. Dieser Punkt ist im allgemeinen (vergl. 8) unendlich fern, wenn die Centren der Kreise auf einer Geraden liegen.



In Bezug auf die Kreise, deren Diameter die Seiten eines Dreiecks sind, hat der Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks gleiche Potenzen. Sind AD, BE, CF die Höhen des Dreiecks ABC, welche sich in H schneiden, so liegt E auf dem Kreise ABD, F auf dem Kreise BCE, D auf dem Kreise CAF, und es ist (3)

$$AH.HD = BH.HE = CH.HF$$

Der gemeinschaftliche Wert der Potenz des Punktes H in Bezug auf die erwähnten Kreise ist das Produkt der Diameter der Kreise, von denen der eine dem Dreieck DEF umgeschrieben ist, der andere die Seiten desselben Dreiecks berührt und das Centrum H hat (§. 6, 9). Die Winkel $2DFC$ und $2DAC$ sind gleich, weil C, A, F, D auf einem Kreise liegen. Wenn aber M das Centrum des Kreises ABC und C_1 die Mitte von AB ist, so ist $2ACB$ oder $2ACD$ dem Centriwinkel $2AMC_1$ gleich, und das rechtwinkelige Dreieck, welches der Abstand des

*) Poncelet propr. proj. 249.
**) Monge nach der Angabe von Poncelet propr. proj. 71. Carnot géom. de pos. 305.

Punktes H von FD mit FC und FD bildet, ist den Dreiecken ACD und AMC_1 ähnlich. Bezeichnet man den Radius des Kreises, welcher um das Centrum H dem Dreieck DEF eingeschrieben ist, durch u, so hat man $HF : u = MA : MC_1$. Nun ist MA dem Diameter des Kreises DEF gleich, der durch $2v$ bezeichnet wird, und MC_1 ist halb so groß als CH (§. 12, 8). Daher hat man $CH . HF = 4uv$.*)

8. Wenn die Centren von mehreren Kreisen auf einer Geraden liegen, und es einen Punkt in endlicher Entfernung giebt, der in Bezug auf die Kreise gleiche Potenzen hat, so giebt es unendlich viel Punkte von derselben Eigenschaft. Alle diese Punkte liegen auf einer bestimmten Geraden, welche normal ist zu der Geraden, auf der die Centren liegen, und welche die gemeinschaftlichen Punkte der Kreise enthält. Sind A, A_1, A_2, .. die Centren, r, r_1, r_2, .. die Radien der Kreise von solcher Lage und Größe, daß für einen bestimmten Punkt O der Geraden AA_1A_2 .. die Differenzen $OA^2 - r^2$, $OA_1{}^2 - r_1{}^2$, $OA_2{}^2 - r_2{}^2$, .. einander gleich sind, so hat O in Bezug auf die Kreise gleiche Potenzen (3). Ist nun OB normal zu OA, so hat man (2)

$$AB^2 - A_1B^2 = AO^2 - A_1O^2 = r^2 - r_1{}^2$$
$$AB^2 - r^2 = A_1B^2 - r_1{}^2, \text{ u. s. w.}$$

d. h. B hat in Bezug auf dieselben Kreise gleiche Potenzen.

Von 3 und mehr Kreisen, in Bezug auf welche es Punkte von gleichen Potenzen giebt, sagt man, daß sie einen Büschel (faisceau) bilden mit 2 gemeinschaftlichen Punkten, die getrennt (real oder nicht real, imaginär) oder vereint sind, je nachdem die Kreise sich schneiden oder verfehlen oder berühren.**)

9. Wenn zwei Punkte O und P in Bezug auf die Kreise (A), (A_1), (A_2) gleiche Potenzen haben, so liegen die Centren A, A_1, A_2 auf einer Geraden, und die Kreise (A), (A_1), (A_2) bilden einen Büschel. Aus den Gleichungen

$$OA^2 - r^2 = OA_1{}^2 - r_1{}^2 = OA_2{}^2 - r_2{}^2$$
$$PA^2 - r^2 = PA_1{}^2 - r_1{}^2 = PA_2{}^2 - r_2{}^2$$

folgen die Gleichungen

$$OA^2 - PA^2 = OA_1{}^2 - PA_1{}^2 = OA_2{}^2 - PA_2{}^2$$

---

*) Feuerbach das geradl. Dreieck 35. Vergl. p. 60 derselben Schrift.

**) Die Serie von Geraden, die einen (endlich oder unendlich fernen) Punkt gemein haben, ist von Desargues 1639 Brouillon projet (éd. Poudra p. 104) ordonnance de lignes genannt worden. Die Betrachtung der Büschel von Geraden und Kurven ist von Steiner in die Geometrie eingeführt worden (System. Entw. p. 1. Crelle J. 47 p. 1). Von imaginären Punkten spricht man infolge der komplexen Werte ihrer Koordinaten bei analytischer Behandlung der Geometrie.

welche zu erkennen geben, daß AA_1 und AA_2 normal zu OP sind, mithin A, A_1, A_2 auf einer Geraden liegen. Dabei hat man, indem man den Durchschnitt der Geraden AA_1 und OP durch Q bezeichnet, die Gleichungen

$$r^2 - r_1^2 = (AQ - A_1Q)(AQ + A_1Q)$$
$$r^2 - r_2^2 = (AQ - QA_2)(AQ + QA_2)$$

und findet daraus nach Multiplikation der erstern mit AA_2, der andern mit $-AA_1$ die Gleichung

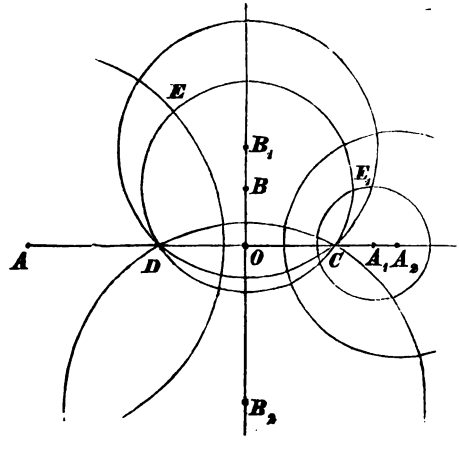
$$(AA_2 - AA_1)r^2 - AA_2 \cdot r_1^2 + AA_1 \cdot r_2^2$$
$$= AA_1 \cdot AA_2(AQ + A_1Q - AQ + QA_2) = AA_1 \cdot AA_2 \cdot A_1A_2$$

oder indem man $-AA_2$ durch A_2A ersetzt (1),

$$A_1A_2 \cdot r^2 + A_2A \cdot r_1^2 + AA_1 \cdot r_2^2 + AA_1 \cdot A_1A_2 \cdot A_2A = 0^*)$$

Umgekehrt schließt man: Wenn die Punkte A, A_1, A_2 auf einer Geraden liegen und die Radien r, r_1, r_2 der Kreise (A), (A_1), (A_2) der eben aufgestellten Gleichung genügen, so bilden die Kreise (A), (A_1), (A_2) einen Büschel. Insbesondere bilden concentrische Kreise einen Büschel, jeder unendlich ferne Punkt hat in Bezug auf dieselben gleiche Potenzen, ihre Orthogonalkreise sind gerade.

10. Wenn 3 Kreise, deren Centren auf einer Geraden liegen, von einem vierten Kreise rechtwinkelig geschnitten werden, so bilden sie einen Büschel. Denn das Centrum des vierten Kreises hat in Bezug auf die 3 Kreise gleiche Potenzen.



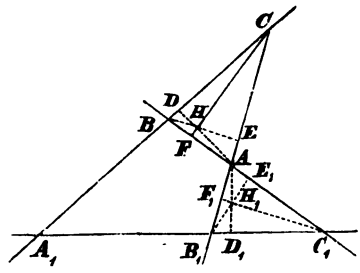
Die Kreise (B), (B_1), (B_2), .., welche die zu einem Büschel gehörigen Kreise (A), (A_1), (A_2), .. sämtlich rechtwinkelig schneiden, gehören ebenfalls zu einem Büschel. Wenn die gemeinschaftlichen Punkte des einen Büschels real sind, so sind die gemeinschaftlichen Punkte des andern Büschels imaginär. Gesetzt, (A) wird von (B) in E, und die Gerade AA_1 von der Geraden BB_1 in O geschnitten, so hat man

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 = AO^2 + OB^2, \quad EB^2 - OB^2 = AO^2 - AE^2$$

*) Vergl. unten 22.

Ist nun $AO^2 - AE^2$ positiv, mithin O außerhalb des Kreises (A), so ist $EB^2 - OB^2$ positiv, d. h. O von dem Kreise (B) eingeschlossen. Ebenso ist O von den übrigen Kreisen des einen Büschels ausgeschlossen, von den des andern Büschels eingeschlossen, weil nach der Voraussetzung $AO^2 - AE^2 = A_1O^2 - A_1E_1^2$ u. s. w. Daher ist die Gerade OBB_1 .. von den Kreisen (A), (A_1), .. ausgeschlossen, während die Gerade OAA_1 .. von den Kreisen (B), (B_1), .. geschnitten wird. Die Durchschnittspunkte C und D der Geraden OA und des Kreises (B) liegen auf sämtlichen Kreisen (B_1), (B_2), .., weil jeder Punkt der Geraden OA in Bezug auf (B), (B_1), .. gleiche Potenzen hat, deren Wert für C und D verschwindet.

11. Es giebt 4 Dreiecke, die von jedesmal 3 unter 4 gegebenen Geraden gebildet werden, ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Die Durchschnitte ihrer Höhen H, H_1, H_2, H_3 liegen auf einer Geraden; die Kreise, von denen A und A_1, B und B_1, C und C_1 Gegenpunkte sind, bilden einen Büschel; die Centren ihrer Orthogonalkreise liegen auf der Geraden HH_1.*)

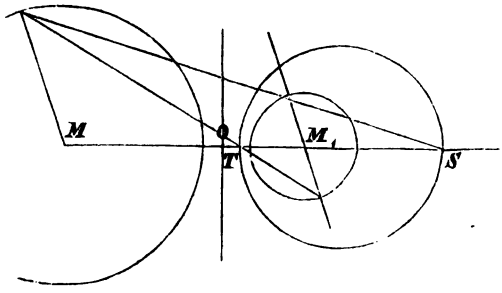


Beweis. Werden die Höhen der Dreiecke ABC, AB_1C_1 durch AD, BE, CF, AD_1, B_1E_1, C_1F_1 bezeichnet, so ist $HA.HD$ die Potenz des Punktes H in Bezug auf jeden durch A und D gehenden Kreis, d. h. H hat gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise ABD und AA_1D, ferner in Bezug auf die Kreise BCE und BB_1E, endlich in Bezug auf die Kreise CAF und CC_1F. Nun hat H gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise ABD, BCE, CAF (7), also auch in Bezug auf die Kreise AA_1D, BB_1E, CC_1F. Ebenso erkennt man, daß H_1 gleiche Potenzen hat in Bezug auf die Kreise AA_1D_1, BB_1E_1, CC_1F_1, welche von den Kreisen AA_1D, BB_1E, CC_1F nicht verschieden sind, u. s. w. Weil jeder unter den Punkten H, H_1, H_2, H_3 gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise (AA_1), (BB_1), (CC_1) hat, so liegen die Punkte auf einer Geraden (6) und die Kreise bilden einen Büschel (8).

---

*) Der erste Teil des Satzes, nach welchem H, H_1, .. auf einer Geraden liegen, ist von Steiner (Crelle J. 2 p. 97) gegeben worden; der andere Teil, nach welchem die Kreise (AA_1), .. einen Büschel bilden, rührt von Bodenmiller her nach einer Mitteilung Gudermanns (analyt. Sphärik p. 138). Vergl. §. 8, 5 und Trigon. §. 7, 11. Grunert Archiv 46 p. 328. 47 p. 1.

12. Zwei Kreise und der Kreis, von dem die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise Gegenpunkte sind, bilden einen Büschel.*) Sind M und M_1 die Centren der Kreise, S und T ihre Ähnlichkeitspunkte (§. 12, 7), und hat O auf MM_1 gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise, deren Radien durch r und r_1 bezeichnet werden, so hat man



$$MS = \frac{r}{r-r_1} MM_1, \quad MT = \frac{r}{r+r_1} MM_1$$

$$MO^2 - r^2 = OM_1^2 - r_1^2, \quad (MO - OM_1)MM_1 = r^2 - r_1^2$$

$$MO = \frac{r^2 - r_1^2 + MM_1^2}{2MM_1}$$

Nun ist $OS.OT = (MS - MO)(MT - MO)$

$$= MO^2 - MO(MS + MT) + MS.MT$$

$$= MO^2 - \frac{r^2}{r^2 - r_1^2}(r^2 - r_1^2 + MM_1^2) + \frac{r^2}{r^2 - r_1^2} MM_1^2$$

$$= MO^2 - r^2 = OM_1^2 - r_1^2$$

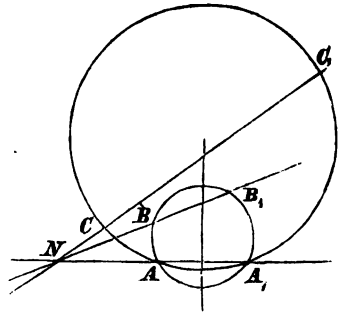
d. h. O hat in Bezug auf den Kreis, dessen Gegenpunkte S und T sind, und dessen Centrum auf der Geraden MM_1 liegt, dieselbe Potenz, wie in Bezug auf diese Kreise (M) und (M_1). Also bilden diese 3 Kreise einen Büschel (8).

Von jedem Punkte des dritten Kreises erscheint der erste Kreis so groß als der zweite. Der Kreis, dessen Gegenpunkte S und T sind, schneidet die Strecke MM_1 normal außen und innen nach dem Verhältnis der Radien. Also hat man für jeden Punkt U desselben $MU : M_1U = r : r_1$ (§. 8, 6). Daher sind die Dreiecke ähnlich, die von MU und M_1U, von den aus U an die Kreise gehenden Tangenten, und von den Radien der Berührungspunkte gebildet werden (§. 11, 2).

13. Die Geraden, welche durch einen Punkt N gehn, bilden einen Büschel, dessen Centrum der gemeinschaftliche Punkt N ist (vergl. 8). Wenn nun jedem Punkt einer Geraden des Büschels ein Punkt derselben Geraden so entspricht, daß für alle Paare entsprechender

*) Gerg. Ann. XI p. 364, XX p. 305. Chasles géom. sup. 747.

Punkte A und A_1, B und B_1, C und C_1, .. die Produkte $NA.NA_1$, $NB.NB_1$, $NC.NC_1$, .. einander gleich sind und den Wert p haben, so liegen je zwei Paare entsprechender Punkte von verschiedenen Geraden auf einem Kreise (§. 11, 4). Der Punkt N hat in Bezug auf alle diese Kreise AA_1B_1B, AA_1C_1C, BB_1C_1C, .. gleiche Potenzen, deren Wert p ist. Wenn N von den Strecken AA_1, BB_1, .. ausgeschlossen, mithin p positiv ist, so werden die erwähnten Kreise von dem Kreise, dessen Centrum N und dessen Radius $\sqrt{p}$ ist, rechtwinkelig geschnitten (6).



Zu jedem Punkt X wird der entsprechende Punkt X_1 mit Hilfe der Geraden NX und des Kreises AA_1X gefunden. Die Punkte des Kreises, dessen Centrum N und dessen Radius $\sqrt{p}$ ist, entsprechen sich selbst; den von diesem Kreise eingeschlossenen Punkten entsprechen ausgeschlossene Punkte und umgekehrt. Jedem unendlich fernen Punkt entspricht der Punkt N.

Die Dreiecke NAB und NB_1A_1, NAC und NC_1A_1, NBC und NC_1B_1, NAB_1 und NBA_1, .. sind ähnlich und entgegengesetzten Sinnes (§. 11, 2), mithin hat man

$$\frac{A_1B_1}{NB_1} = \frac{AB}{NA}, \qquad \frac{A_1B_1}{NB.NB_1} = \frac{AB}{NA.NB}$$

$$A_1B_1 = p\frac{AB}{NA.NB}, \quad A_1C_1 = p\frac{AC}{NA.NC}, \quad B_1C_1 = p\frac{BC}{NB.NC}$$

$$A_1B_1 : A_1C_1 : B_1C_1 = \frac{AB}{NA.NB} : \frac{AC}{NA.NC} : \frac{BC}{NB.NC}$$

Daraus ergiebt sich z. B.

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{AC_1}{BC_1}\,\frac{BA_1}{CA_1}\,\frac{CB_1}{AB_1} = 1^*) \text{ u. s. w.}$$

Aus derselben Quelle fließen die Gleichungen der Winkel

$$ABN = -B_1A_1N, \quad CDN = -D_1C_1N$$
$$NBC = -NC_1B_1, \quad NDA = -NA_1D_1$$

*) Bobenmiller nach Gudermanns Mitteilung, nieb. Sphärik p. 236.

mithin durch Addition

$$ABC + CDA = -(B_1A_1D_1 + D_1C_1B_1)$$

Nun ist $ABC + BCD + CDA + DAB = 0$ (§. 2, 9), also $ABC + CDA = -(BCD + DAB)$, und man erhält nach Vertauschung von DAB mit $-BAD$ u. s. w.

$$BCD - BAD = -(B_1C_1D_1 - B_1A_1D_1)$$

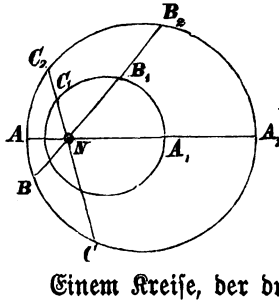
Wenn insbesondere C mit N zusammenfällt, so wird C_1 unendlich fern, $B_1C_1D_1$ verschwindet, und man hat

$$BND - BAD = B_1A_1D_1$$

14. Über die Verwandtschaft der nach dem angegebenen Gesetz sich entsprechenden Figuren $ABCD\,..$ und $A_1B_1C_1D_1\,..$ ergiebt sich folgendes:

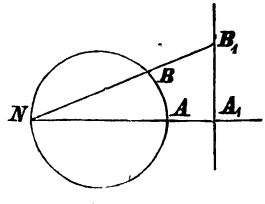
Einem Kreise entspricht im allgemeinen ein Kreis. Die entsprechenden Kreise liegen perspektivisch, so daß N ein Ähnlichkeitspunkt derselben ist. Wenn A, B, C, D auf einem Kreise liegen, und die Geraden NA, NB, .. denselben in A_2, B_2, .. schneiden, so hat man $NA.NA_2 = NB.NB_2 = .. = q$. Nun ist $NA.NA_1 = NB.NB_1 = .. = p$, folglich

$$\frac{NA_1}{NA_2} = \frac{NB_1}{NB_2} = .. = \frac{p}{q}\,.$$



Hieraus folgt, daß die Figuren $NA_1B_1C_1\,..$ und $NA_2B_2C_2\,..$ ähnlich und eines Sinnes sind. Nun ist $A_2B_2C_2\,..$ ein Kreis, folglich ist auch $A_1B_1C_1\,..$ ein Kreis, und N ein Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise.

Einem Kreise, der durch N geht, entspricht eine Gerade (ein unendlich großer Kreis), die mit der durch N gehenden Tangente des Kreises parallel ist, und umgekehrt. Ist A der Gegenpunkt von N, so ist der Winkel NBA recht, und zufolge der Ähnlichkeit von NAB und NB_1A_1 auch der Winkel B_1A_1N recht, u. s. w.*)

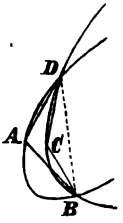


Daß einem Kreise ein Kreis (oder eine Gerade) entspricht, erkennt man auch durch

*) Diese Sätze kommen zuerst im ersten Buch der ebenen Örter von Apollonius vor. Vergl. Simsons Bearbeitung übers. von Camerer p. 47. Die obige Verwandtschaft von Figuren, in der auch eine sphärische Figur zu ihrem stereographischen Abbild steht, ist aus allgemeinen Gesichtspunkten von Magnus (Aufgaben I p. 236 und 290, Crelle J. 8 p. 52) betrachtet, von Thomson angewandt und

Betrachtung von Winkeldifferenzen. Wenn A auf dem Kreise BCD liegt, so hat man $2(BCD - BAD) = 0$ (§. 4, 3); dann aber ist $2(B_1C_1D_1 = B_1A_1D_1) = 0$ (13), d. h. A_1 liegt auf dem Kreise $B_1C_1D_1$. Wenn N auf dem Kreise BAD liegt, so hat man $2(BND - BAD) = 0$; folglich ist $2B_1A_1D_1 = 0$, d. h. A_1 liegt auf der Geraden B_1D_1.

Zwei Linien der einen Figur und die entsprechenden Linien der andern Figur bilden entgegengesetzt gleiche Winkel.*) Wenn auf der Kurve BCD der Punkt C mit D zusammenfällt, so geht der Winkel BCD in den Winkel über, welchen die Richtung der Kurve in D mit der Sehne DB bildet (§. 3, 5). Wenn zugleich auf der Kurve BAD der Punkt A mit D zusammenfällt, so geht die Winkeldifferenz $BCD - BAD$ in den Winkel ADC der in D sich schneidenden Kurven über. Ebenso geht die entsprechende Winkeldifferenz $B_1C_1D_1 - B_1A_1D_1$ in den Winkel $A_1D_1C_1$ der entsprechenden in D_1 sich schneidenden Kurven über, ohne daß sie aufhörte, jener Winkeldifferenz gleich und entgegengesetzt zu sein. In dem Falle, daß die in D sich schneidenden Kurven nicht zum zweitenmale in B sich schneiden, vergleicht man ihren Winkel mit dem Winkel der entsprechenden in D_1 sich schneidenden Kurven, nachdem man für die Kurven Kreise substituiert hat, welche die Kurven in D und D_1 berühren.



In der That wird das geradlinige Dreieck ADC dem entsprechenden Dreieck $A_1D_1C_1$ ähnlich, wenn AD und CD verschwinden (Tangenten der Kurven AD und CD werden). Dabei verschwinden nämlich AC, A_1D_1, C_1D_1, A_1C_1, während NA, NC, ND einander gleich werden, folglich hat man (13)

$$A_1D_1 : D_1C_1 : C_1A_1 = AD : DC : CA^{**})$$

15. Wenn 4 Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen, so ist

$$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0$$

vorausgesetzt, daß die Produkte die Zeichen der Dreiecke ACD, ADB, ABC (§. 9, 7) haben.***)

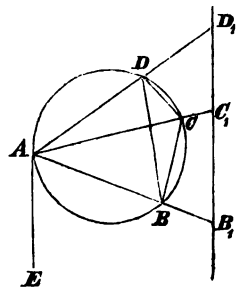
---

von Liouville erläutert (Liouville J. 12 p. 265), endlich von Möbius Kreisverwandtschaft genannt und umfassend behandelt worden (Theorie der Kreisverwandtschaft 1855). Von Möbius rühren die Relationen der Strecken und Winkeldifferenzen her, in denen der Punkt N nicht vorkommt. Kreisverwandte (homocyklische) Figuren sind konform. S. Stereom. §. 5, 6.

*) Diese Eigenschaft ist an den sphärischen Figuren und ihren stereographischen Abbildern von Hooke und Moivre bemerkt worden (Halley Philos. Trans. 1696 t. 19 No. 219).

**) Fuß Acta Petrop. 1782, II p. 172.

***) Dieser Satz heißt der Ptolemäische Lehrsatz, weil sein Gebrauch zur



Beweis. Zieht man parallel mit der Tangente des Kreises AE eine Gerade, welche AB, AC, AD der Reihe nach in B_1, C_1, D_1 schneidet, so ist der Winkel EAB sowohl den Winkeln C_1B_1A, D_1B_1A, als auch den Winkeln ACB, ADB gleich, folglich sind die Dreiecke ABC, ABD den Dreiecken AC_1B_1, AD_1B_1 ähnlich, und man hat

$$AB.AB_1 = AC.AC_1 = AD.AD_1$$

mithin (13)

$$\frac{CD}{AC.AD} : \frac{DB}{AD.AB} : \frac{BC}{AB.AC} = C_1D_1 : D_1B_1 : B_1C_1$$

Nun ist $C_1D_1 + D_1B_1 + B_1C_1 = 0$, weil die Punkte B_1, C_1, D_1 auf einer Geraden liegen (1); folglich (Algebra §. 1, 7) die Summe

$$\frac{CD}{AC.AD} + \frac{DB}{AD.AB} + \frac{BC}{AB.AC} = 0$$

wenn die Glieder der Reihe nach die Zeichen der Strecken C_1D_1, D_1B_1, B_1C_1, also auch der Dreiecke ACD, ADB, ABC haben. Durch Multiplikation mit $AB.AC.AD$ findet man

$$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0$$

Weil jeder der gegebenen Punkte vom Dreieck der übrigen Punkte ausgeschlossen ist, so müssen von den 3 Paaren gegenüberliegender Strecken AB und CD, AC und DB, AD und BC, ein Paar unverlängert sich schneiden, während die andern Paare unverlängert sich nicht schneiden. Das Produkt der sich schneidenden Strecken ist negativ zu nehmen, wenn man die Produkte der sich nicht schneidenden Strecken positiv genommen hat.

Bei einem dem Kreise eingeschriebenen Viereck, dessen Perimeter sich selbst nicht schneidet, ist das Produkt der Diagonalen der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten gleich.

Anmerkung. Für 5 Punkte eines Kreises A, B, C, D, E hat man in gleicher Weise*)

$$\frac{BC}{AB.AC} + \frac{CD}{AC.AD} + \frac{DE}{AD.AE} + \frac{EB}{AE.AB} = 0$$

Berechnung der zu den Centriwinkeln von 0 bis 180° gehörigen Sehnen eines Kreises von Ptolemäus (Almagest I, 9) berichtet worden ist. Die unbeschränkte Aufstellung des Satzes für irgend 4 Punkte des Kreises rührt von Möbius her (Kreisverw. 26 und 44).

*) Carnot géom. de pos. 215.

Die obigen Gleichungen behalten ihre Richtigkeit, wenn der Radius des Kreises unendlich wird und der Kreis in eine Gerade übergeht. Dann ist $CD = AD - AC$, u. s. w., folglich

$$AB.CD + AC.DB + AD.BC$$
$$= AB(AD-AC) + AC(AB-AD) + AD(AC-AB) = 0^*)$$

16. Bei 4 beliebigen Punkten A, B, C, D verhalten sich die Produkte $AB.CD$, $AC.DB$, $AD.BC$ zu einander der Reihe nach wie die Seiten eines bestimmten Dreiecks.**)

Beweis 1. Der Kreis BCD wird von AB, AC, AD in B_1, C_1, D_1 geschnitten, so daß (13)

$$AB.AB_1 = AC.AC_1 = AD.AD_1$$

$$\frac{CD}{AC.AD} : \frac{DB}{AD.AB} : \frac{BC}{AB.AC} = C_1D_1 : D_1B_1 : B_1C_1$$

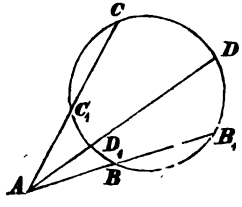
oder

$$AB.CD : AC.DB : AD.BC = C_1D_1 : D_1B_1 : B_1C_1$$

Die Winkel des Dreiecks $B_1C_1D_1$ sind aus denselben Gründen

$$C_1B_1D_1 = CAD - CBD$$
$$D_1C_1B_1 = DAB - DCB$$
$$B_1D_1C_1 = BAC - BDC$$

In der That beträgt die Summe der Winkeldifferenzen 180^0.

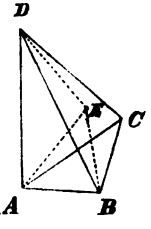


Beweis 2. Macht man das Dreieck ABE einerlei Sinnes und ähnlich mit ACD, so ist

$$AE : AD = AB : AC = BE : CD$$

Dabei ist der Winkel $EAD = BAC$, weil $BAE = CAD$ gemacht ist. Also sind auch die Dreiecke AED und ABC ähnlich und einerlei Sinnes (§. 11, 2), d. h.

$$ED : BC = AD : AC$$



Aus den Gleichungen $AB.CD = AC.BE$, $AD.BC = AC.ED$ folgt nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors AC

$$AB.CD : AC.DB : AD.BC = BE : DB : ED$$

*) Diese Identität ist von Euler benutzt worden (Nov. Comm. Petrop. I p. 49).
**) Möbius Kreisverwandtschaft 16 und 45. Durch Rechnung hatte Bretschneider die entsprechenden Resultate gefunden (Grunert Archiv 2 p. 240, Geometrie §. 616). Vergl. den Aufsatz des Verf. in Borchardt J. 54 p. 167.

Für die Winkel des Dreiecks BED findet man die Gleichungen

$$BDE = ACB - ADB = CAD - CBD$$
$$DEB = CBA - CDA = DAB - DCB$$
$$EBD = BAC - BDC = BAC - BDC$$

Denn $BDE = BDA + ADE = BDA + ACB$. Hiervon subtrahiert man die Gleichung $BDA + DAC + ACB + CBD = 0$, und setzt $-ADB$ an die Stelle von BDA, CAD an die Stelle von $-DAC$. U. s. w.

Anmerkung. Wenn A auf den Kreis BCD fällt, so fallen B_1, C_1, D_1 mit A zusammen. Die unendlich nahen Punkte B_1, C_1, D_1 liegen auf einer Geraden, so daß $C_1D_1 + D_1B_1 + B_1C_1 = 0$ in der oben (1) angegebenen Bedeutung.

Der zweite Beweis ruht auf denselben Gründen, wie der alte Beweis des Ptolemäischen Satzes. Wenn A auf dem Kreise BCD liegt, so ist $2(CAD - CBD) = 0$, folglich $2BDE = 0$, d. h. E liegt auf der Geraden BD, u. s. w.

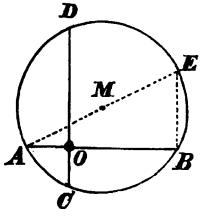
Umgekehrt schließt man aus der Gleichung

$$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0$$

daß die Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen. Wenn A nicht auf dem Kreise BCD läge, so würden die Produkte $AB.CD$, $AC.DB$, $AD.BC$ sich zu einander verhalten wie die Seiten eines Dreiecks; also könnte weder die Summe noch die Differenz von zweien unter diesen Produkten dem dritten gleich sein.

Wenn insbesondere A, B, C auf einer Geraden liegen, so schließt man aus der obigen Gleichung, daß D auf derselben Geraden liegt. Läge D nicht auf der Geraden AB, so würde E auf der Geraden AD, also nicht auf BD liegen, u. s. w.

17. Wenn zwei Sehnen AB, CD eines Kreises (M) in O sich rechtwinkelig schneiden, so ist*)



$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 4AM^2$$
$$AB^2 + CD^2 = 8AM^2 - 4OM^2$$

Beweis. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz ist

$$AO^2 + CO^2 = AC^2, \quad BO^2 + DO^2 = BD^2$$

Die Summe der Bogen AC, BD ist ein Halbkreis (§. 4, 5). Macht man nun den Bogen $CE = BD$, so ist der Bogen AE ein Halbkreis, mithin

*) Der erste von diesen Sätzen ist das 11te Lemma bei Archimedes; der andere ist von Carnot (géom. de pos. 134) nebst mehrern Folgerungen gegeben worden.

$AC^2 + CE^2 = AE^2$, d. h. $AC^2 + BD^2 = 4AM^2$. Ferner ist $AO.OB = CO.OD = AM^2 - OM^2$ (3), $AB^2 = (AO+OB)^2 = AO^2 + 2AO.OB + BO^2$, u. s. w., folglich

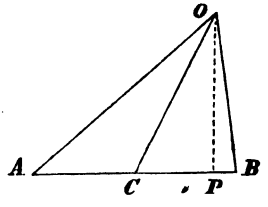
$$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + 4AM^2 - 4OM^2$$

woraus die Behauptung sich ergiebt.

Anmerkung. Der Satz und sein Beweis behalten ihre Richtigkeit, wenn die Sehnen außerhalb des Kreises sich schneiden. Die Summe $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$ ist unabhängig von der Länge der normalen Sehnen AB und CD. Die Summe $AB^2 + CD^2$ bleibt unverändert, wenn für die normalen Sehnen AB, CD der Abstand ihres Durchschnittspunktes O vom Centrum sich gleich bleibt.

18. Wenn C die Mitte von A und B, und O ein beliebiger Punkt ist, so hat man

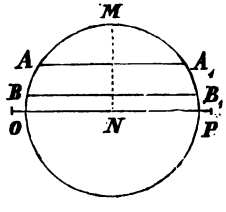
$$AO^2 + BO^2 = 2AC^2 + 2CO^2$$



Beweis. Zieht man OP normal zu AB, so ist $AP^2 + BP^2 = 2AC^2 + 2CP^2$ (1), folglich $AP^2 + PO^2 + BP^2 + PO^2 = 2AC^2 + 2CP^2 + 2PO^2$, d. i. $AO^2 + BO^2 = 2AC^2 + 2CO^2$ nach dem Pythagoreischen Lehrsatz.

Zusätze. Jeder Punkt, dessen Quadratabstände von zwei gegebenen Punkten eine gegebene Summe haben, liegt auf einem Kreise, dessen Centrum die Mitte der gegebenen Punkte ist.*) Wenn $AO^2 + BO^2$ von gegebener Größe ist, so ist $2AC^2 + 2CO^2$, folglich auch CO von gegebener Größe.

Wenn AA_1, BB_1, CC_1, .. parallele Sehnen des Kreises (N) sind, O ein Punkt auf dem parallelen Diameter, so sind die Summen $OA^2 + OA_1{}^2$, $OB^2 + OB_1{}^2$, .. von gleicher Größe.**) Ist das Centrum N die Mitte von OP, und der Radius NM normal zu OP, so hat man



$$OA^2 + PA^2 = OB^2 + PB^2 = .. = 2OM^2$$

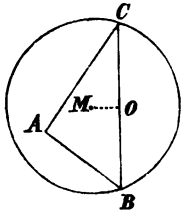
Nun sind die Dreiecke PNA und ONA_1 gleich und ähnlich, d. h. $PA = OA_1$, u. s. w.

---

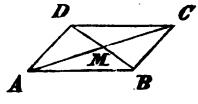
*) Apollonius im 2ten Buch der ebenen Örter: Simsons Bearbeitung übers. von Camerer p. 263 ff. Vergl. unten 22.

**) Lahire 1730 Mém. de Paris t. 9 p. 341 Lemma 1.

Der Kreis (M) werde von den Schenkeln eines rechten Winkels, deſſen Scheitel A iſt, in B und C geſchnitten. Wenn der rechte Winkel um ſeinen Scheitel A ſich dreht, ſo bewegt ſich die Mitte O der eingeſchloſſenen Sehne BC auf einem beſtimmten Kreiſe, deſſen Centrum die Mitte von AM iſt.*) Denn man hat $AO = BO$ (§. 6, 7), und $MOB = 90^0$, folglich $AO^2 + MO^2 = BO^2 + MO^2 = MB^2$, woraus die Behauptung ſich ergiebt. Der Kreis, welchen O durchläuft, fällt mit ſeinem Centrum zuſammen, oder hört auf real zu ſein, wenn AM ſo groß oder größer wird, als die halbe Diagonale des dem Kreis (M) umgeſchriebenen Quadrats.



19. Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm und M das Centrum deſſelben iſt, ſo hat man (18) $AB^2 + BC^2 = 2AM^2 + 2MB^2$. Nun iſt $4AM^2 = AC^2, ..,$ folglich



$$2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BD^2$$

Wenn man ferner einen beliebigen Punkt durch O bezeichnet, ſo iſt

$$AO^2 + CO^2 = 2AM^2 + 2MO^2$$
$$BO^2 + DO^2 = 2BM^2 + 2MO^2$$

folglich

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = \tfrac{1}{2}AC^2 + \tfrac{1}{2}BD^2 + 4MO^2$$

Für alle Punkte O eines Kreiſes, der mit dem Parallelogramm das Centrum gemein hat, iſt die Summe $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$ von derſelben Größe.

Wenn insbeſondere $ABCD$ ein Rektangel iſt, ſo iſt wegen der Gleichheit der Diagonalen

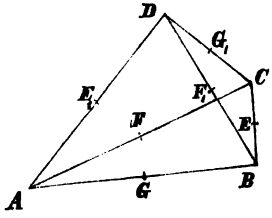
$$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$$

20. Wenn man in einem gemeinen Viereck $ABCD$ die Mitten von AB, BC, CA durch G, E, F, und die Mitten von CD, AD, BD durch G_1, E_1, F_1 bezeichnet, ſo iſt EFE_1F_1 ein Parallelogramm

*) Anonym in Crelle J. 9 p. 102. Vergl. Crelle J. 19 p. 205 und Heinen Crelle J. 18 p. 181.

(§. 8, 3), u. s. w. Folglich $2EF^2 + 2FE_1^2 = EE_1^2 + FF_1^2$ (19), oder

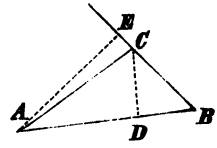
$$AB^2 + CD^2 = 2EE_1^2 + 2FF_1^2$$
$$BC^2 + DA^2 = 2FF_1^2 + 2GG_1^2$$
$$AC^2 + BD^2 = 2GG_1^2 + 2EE_1^2$$



Aus diesen Gleichungen findet man ohne Weiteres:

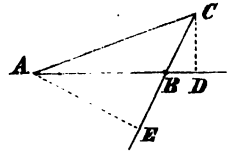
$$AB^2 + CD^2 + 2GG_1^2 = BC^2 + DA^2 + 2EE_1^2 = AC^2 + BD^2 + 2FF_1^2$$
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4FF_1^2 \text{ *)}$$
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 + BD^2 = 4EE_1^2 + 4FF_1^2 + 4GG_1^2$$

21. Bei einem Dreieck ist das Quadrat der einen Seite, je nachdem dieselbe einem spitzen oder stumpfen Winkel gegenüberliegt, kleiner oder größer als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. Die Differenz ist das doppelte Produkt von einer dieser Seiten mit dem Stück, welches von ihr durch die Normale aus dem Ende der andern Seite abgeschnitten wird.**)



Beweis. Wenn CD und AE normal zu AB und BC sind, so ist (2)

$$AB^2 + BC^2 - CA^2 = AB^2 + DB^2 - AD^2$$
$$= BE^2 + BC^2 - CE^2$$



Nun ist $AB = AD + DB$, $BC = BE + EC$ (1), folglich

$$AB^2 + DB^2 - DA^2 = 2AB.DB$$
$$BE^2 + BC^2 - CE^2 = 2BC.BE$$

Wenn der Winkel B spitz ist, so hat DB mit AB, BE mit BC einerlei Richtung, und die Produkte $2AB.DB$, $2BC.BE$ sind positiv. Wenn aber der Winkel B stumpf ist, so sind die Strecken AB und DB, BC und BE entgegengesetzt, und die Produkte $2AB.DB$, $2BC.BE$ negativ (1). Die Gleichheit der Produkte $AB.DB$ und $BC.BE$ wird durch die Ähnlichkeit der Dreiecke BDC und BEA bestätigt.

22. Wenn C auf der Geraden AB so liegt, daß $AC : AB = m$, und wenn D einen beliebigen Punkt bedeutet, so hat man***)

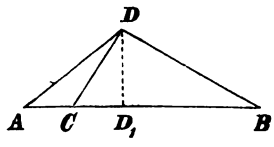
---

*) Euler 1750 (Nov. Comm. Petrop. 1 p. 66). Die beigeordneten Gleichungen findet man in Gerg. Ann. 2 p. 310.

**) Eucl. II, 12 und 13.

***) Stewart de quibusdam theorem. generalibus . . . Edinburg. 1746. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 172 d. Übers.

$$CD^2 = (1-m)AD^2 + mBD^2 - (1-m)mAB^2$$
$$BC.AD^2 + CA.BD^2 + AB.CD^2 + AB.BC.CA = 0$$



Beweis. Die Formeln $AC^2 + AD^2 - CD^2$ und $AB^2 + AD^2 - BD^2$ haben die Werte $2AC.AD_1$ und $2AB.AD_1$, wenn DD_1 normal zu AB (21), und das Verhältnis m. Aus der Gleichung

$$AC^2 + AD^2 - CD^2 = m(AB^2 + AD^2 - BD^2)$$

findet man für CD^2 die erste der obigen Formeln, nachdem man m^2AB^2 für AC^2 gesetzt hat. Die andere entspringt aus der ersten, wenn man m durch $AC:AB$, $1-m$ durch $CB:BA$ ersetzt und beachtet, daß $CB = -BC$ (1) u. s. w.

Zusatz. Die Punkte D, welche in Bezug auf zwei gegebene Punkte A und B so liegen, daß $AD^2 + kBD^2$ einen gegebenen Wert hat, befinden sich auf einem bestimmten Kreise.*) Setzt man $m = k(1-m)$, folglich

$$m = \frac{k}{1+k}, \qquad 1-m = \frac{1}{1+k}$$

und macht man $AC = \frac{k}{1+k}AB$, so erhält man

$$CD^2 = \frac{AD^2 + kBD^2}{1+k} - \frac{k}{(1+k)^2}AB^2$$

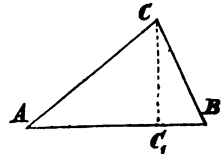
Zufolge der Voraussetzung ist dieser Wert von CD^2 unveränderlich. Der Fall $k = 1$ ist oben (18) betrachtet worden. In dem Falle $k = -1$ ist das Centrum des Kreises unendlich fern, und der Kreis von einer Geraden, welche AB normal schneidet, nicht verschieden (2).

23. Die Fläche eines Dreiecks kann durch die Seiten desselben ausgedrückt werden. Zieht man im Dreieck ABC die Höhe C_1C normal zu AB, und hat die Fläche des Dreiecks $\triangle$ Quadrateinheiten, so ist (§. 10, 4)

---

*) Apollonius im 2ten Buch der ebenen Örter (Simsons Bearbeitung übers. von Camerer p. 263 ff.) hat bemerkt, daß O auf einem bestimmten Kreise liegt, wenn $A, B, C, \ldots$ gegebene Punkte, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gegebene Zahlen sind, und die Formel $\alpha AO^2 + \beta BO^2 + \gamma CO^2 + \ldots$ einen gegebenen Wert hat. Daß das Centrum des Kreises der Schwerpunkt der Punkte $\alpha A, \beta B, \gamma C, \ldots$ ist, hat Fermat (opp. p. 151) hinzugefügt. Vergl. Stereom. §. 11, 8.

$$\triangle = \tfrac{1}{2}AB.C_1C, \quad 16\triangle^2 = 4AB^2.C_1C^2$$



Zugleich ist (21)

$$(AB^2+BC^2-CA^2)^2 = 4AB^2.C_1B^2$$
$$C_1C^2+C_1B^2 = BC^2$$

folglich

$$16\triangle^2+(AB^2+BC^2-CA^2)^2 = 4AB^2.BC^2$$

Haben die Seiten BC, CA, AB der Reihe nach a, b, c Längeneinheiten, so findet man

$$\begin{aligned}16\triangle^2 &= 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\\ &= 4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2\\ &= 4c^2a^2-(c^2+a^2-b^2)^2\\ &= 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\\ &= a^2(-a^2+b^2+c^2)+b^2(a^2-b^2+c^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)\end{aligned}$$

Nach den Regeln über die Multiplikation ist $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$ das Produkt der Faktoren $2ab+a^2+b^2-c^2$, $2ab-a^2-b^2+c^2$, oder $(a+b)^2-c^2$, $c^2-(a-b)^2$, welche wiederum Produkte von je 2 Faktoren sind. Also ist auch

$$16\triangle^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

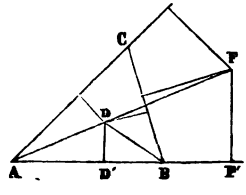
Setzt man $a+b+c = 2s$, d. h. den halben Perimeter des Dreiecks $= s$, so wird

$$\begin{aligned}-a+b+c &= 2s-2a\\ a-b+c &= 2s-2b\\ a+b-c &= 2s-2c\end{aligned}$$

und nach Division durch 16 erhält man*)

$$\triangle^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Um diese Formel geometrisch zu beweisen, bezeichne man durch D und F die auf der Halbierenden des Winkels A liegenden Centren der Kreise, welche die Seiten des Dreiecks ABC berühren, und die Normalen DD', FF' zu AB durch d, f, so daß $\triangle = sd$ (§. 13, 9). Die Dreiecke ADD' und AFF', $D'BD$ und $F'FB$ sind ähnlich, d. h.



$$d:f = AD':AF', \quad df = D'B.BF'$$

*) Dieser Satz nebst einem geometrischen Beweis kommt in Herons geodätischer Schrift περὶ διόπτρας vor. Der folgende geometrische Beweis ist ebenfalls alten Ursprungs und in Leonardo Practica geometriae (1220) ed. Boncompagni p. 40 enthalten. Vergl. den Aufsatz des Verf. in den Leipziger Berichten 1865 p. 3.

Durch Multiplikation findet man

$$d^2 = \frac{AD'.D'B.BF'}{AF'}$$

Nun ist (§. 4, 8)

$$\begin{aligned} 2AD'+BC &= CA+AB, & AD' &= s-a \\ 2D'B+CA &= AB+BC, & D'B &= s-b \\ 2AF'-BC &= CA+AB, & AF' &= s \end{aligned}$$

und $BF' = s-c$, folglich

$$d^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \text{ u. s. w.}$$

Zusatz. Das Produkt der Radien von den Kreisen, welche die Seiten des Dreiecks berühren, hat den Wert $\triangle^2$.*) Bezeichnet man diese Radien durch d, f, g, h, so hat man (§. 13, 9)

$$\begin{aligned} (a+b+c)d &= 2\triangle, & (-a+b+c)f &= 2\triangle \\ (a-b+c)g &= 2\triangle, & (a+b-c)h &= 2\triangle \end{aligned}$$

folglich

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)dfgh = 16\triangle^4$$
$$dfgh = \triangle^2$$

Wenn das Viereck $ABCD$, dessen Seiten AB, CD in E sich schneiden, einem Kreis mit dem Radius r umgeschrieben ist, so hat man bei der §. 4, 10 gegebenen Bezeichnung

$$EBC^2 = r^2(e+b+c)^2 = ebc(e+b+c)$$
$$EAD^2 = r^2(e-d-a)^2 = eda(e-d-a)$$
$$(e-d-a)bc = (e+b+c)da$$

$$e = \frac{bcd+cda+dab+abc}{bc-da}, \quad e+b+c = \frac{(a+b+c+d)bc}{bc-da}$$

$$r^2 = \frac{bcd+cda+dab+abc}{a+b+c+d}$$

$$ABCD^2 = r^2(a+b+c+d)^2 = (bcd+..)(a+b+c+d)^{**})$$

24. Das Produkt von zwei Seiten eines Dreiecks ist dem Produkt von dem Diameter des umgeschriebenen Kreises mit der Höhe zur dritten Seite gleich.***) Ist AD normal zu BC, und AE ein Diameter des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises, so sind die recht-

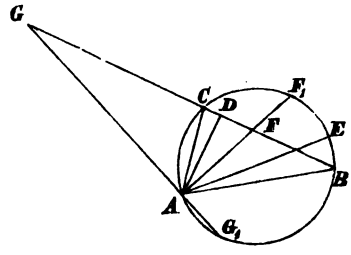
*) Mahieu 1807 und L'Huilier 1809. Vergl. Gerg. Ann. 1 p. 150.
**) Amthor Brief Dresden 1871.
***) Diese Bemerkung ist in der indischen Astronomie von Brahmagupta (Anfang des 7ten Jahrh. n. Chr.) enthalten. Vergl. Chasles ap. hist. p. 475 d. Übers. Die Schriften der indischen Mathematiker werden auf griechische Originale zurückgeführt.

winkeligen Dreiecke ABD und AEC ähnlich, weil die Winkel $2DBA$, $2CBA$, $2CEA$ gleich sind. Daher folgt

$$AB:AD = AE:AC, \quad AB.AC = AD.AE$$

und die Gleichung der Winkel BAD und EAC, so daß die Winkel BAC und EAD eine gemeinschaftliche Halbierende AF haben.

Dasselbe Produkt kann auf andere Weise ausgedrückt werden, indem man die den Winkel BAC und seinen Nebenwinkel Halbierenden zieht, welche die Gerade BC in F und G, den Kreis in F_1 und G_1 schneiden.*) Dann sind die Dreiecke ACF und AF_1B ähnlich, weil die Winkel ACF und AF_1B, FAC und BAF_1 gleich sind. Daher hat man $AC:AF = AF_1:AB$, folglich



$$AB.AC = AF.AF_1 = AF(AF+FF_1)$$
$$= BF.FC + AF^2$$

weil $AF.FF_1 = BF.FC$ (3). Ebenso sind die Dreiecke ACG und AG_1B ähnlich, mithin

$$AB.AC = G_1A.AG = (G_1G - AG)AG$$
$$= BG.CG - AG^2$$

woraus man schließt, daß

$$FG^2 = AG^2 + AF^2 = BG.CG - BF.FC$$

25. Der gefundene Ausdruck für das Produkt von zwei Seiten eines Dreiecks (24) enthält zugleich den Ausdruck für den Radius des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises durch die Seiten des Dreiecks. Weil $BC.DA$ die doppelte Fläche des Dreiecks ist, so ist das Produkt der drei Seiten des Dreiecks gleich dem Produkt der vierfachen Fläche des Dreiecks mit dem Radius des umgeschriebenen Kreises. Bezeichnet man wie oben die Seiten des Dreiecks, die Fläche desselben und den Radius des umgeschriebenen Kreises durch a, b, c, $\triangle$, r, so hat man

$$abc = 4\triangle r, \quad r = \frac{abc}{4\triangle}$$**)

Hieraus folgt, daß die Flächen von Dreiecken, welche demselben Kreise eingeschrieben sind, sich verhalten wie die Produkte ihrer Seiten.

Weil r größer als der Diameter $2d$ des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises ist (4), so hat man***)

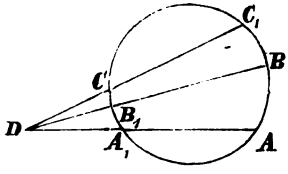
*) Schooten exercit. math. 1657 p. 65.
**) Brahmagupta. S. Chasles a. a. O. p. 470.
***) Lehmus Sammlung 1820 p. 27. Crelle math. Aufsätze I p. 162.

$$\frac{abc}{4\triangle} > \frac{4\triangle}{a+b+c}$$

$$abc > (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

In der That ergiebt sich eine positive Differenz der beiden Produkte für irgend welche positive Zahlen a, b, c, wenn man die Differenzen dieser Zahlen in die Rechnung einführt.

26. Vier Punkte A, B, C, D bestimmen 4 Dreiecke. Wenn man von den Flächen dieser Dreiecke eine jede mit der Potenz des umgeschriebenen Kreises in Bezug auf den übrig gebliebenen Punkt multipliciert, so erhält man gleiche Produkte; ihr gemeinschaftlicher Wert ist die Fläche des Dreiecks, dessen Seiten die Produkte $DA.BC$, $DB.CA$, $DC.AB$ sind. Bezeichnet man die Potenzen von D, A, B, C in Bezug auf die Kreise ABC, BCD, CDA, DAB durch p, p_1, p_2, p_3, und die nach (23) zu berechnende Fläche des Dreiecks, dessen Seiten die Produkte $DA.BC$, .. sind, durch ε, so ist*)



$$p.ABC = p_1.BCD = p_2.CDA = p_3.DAB = \varepsilon$$

Beweis. Werden DA, DB, DC von dem Kreise ABC in A_1, B_1, C_1 geschnitten, so hat man (13)

$$DA.DA_1 = DB.DB_1 = DC.DC_1 = p$$

$$A_1B_1 = p\frac{AB}{DA.DB} = \frac{p}{DA.DB.DC}DC.AB$$

u. s. w. Bezeichnet man $DA.DB.DC$ durch q, so ist

$$A_1B_1 = \frac{p}{q}DC.AB, \quad B_1C_1 = \frac{p}{q}DA.BC, \quad C_1A_1 = \frac{p}{q}DB.CA$$

$$A_1B_1C_1 = \frac{p^2}{q^2}\varepsilon$$

weil die Seiten von $A_1B_1C_1$ zu den Seiten, welche die Fläche ε einschließen, das Verhältnis $p:q$ haben (§. 11, 2). Nun sind die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ demselben Kreise eingeschrieben, folglich (25)

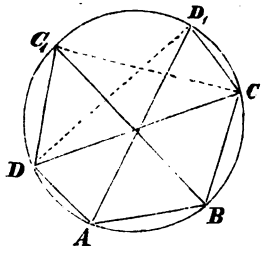
$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1} = \frac{AB.BC.CA}{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1} = \frac{q^2}{p^3}$$

$$p.ABC = \varepsilon$$

Durch gegenseitige Vertauschung von A, B, C, D erleidet ε keine Veränderung, folglich erhält man auf gleiche Weise $p_1.BCD = \varepsilon$, u. s. w.

*) Staudt Borchardt J. 57 p. 88.

27. Aus den Seiten eines dem Kreise eingeschriebenen Vierecks $ABCD$ kann man noch zwei andere demselben Kreise eingeschriebene Vierecke bilden, ABC_1D, $ABCD_1$, indem man einer Seite der Reihe nach jede von den übrigen Seiten gegenüberstellt. Die Flächen der 3 Vierecke sind gleich, weil sie von der Fläche des Kreises durch dieselben Segmente sich unterscheiden. Je zwei von diesen Vierecken haben eine Diagonale von derselben Größe. Sind nämlich a, b, c, d die Seiten, so giebt es in den 3 Vierecken die Diagonalen f, g, h, von denen die erste (DB) mit b und c, die andere (AC_1, D_1B) mit c und a, die dritte (AC) mit a und b ein Dreieck bildet.



Wenn nun das Viereck $ABCD$ konkav ist, so sind auch ABC_1D und $ABCD_1$ konkav, und man hat nach dem Ptolemäischen Lehrsatz (15)

$$\begin{aligned} hf &= ca + bd \\ fg &= ab + cd \\ gh &= bc + ad \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{f} : \frac{1}{g} : \frac{1}{h} = bc + ad : ca + bd : ab + cd$$

$$f^2g^2h^2 = (ab + cd)(bc + ad)(ca + bd)$$

$$f^2 = \frac{(ca + bd)(ab + cd)}{bc + ad}$$

$$g^2 = \frac{(ab + cd)(bc + ad)}{ca + bd}$$

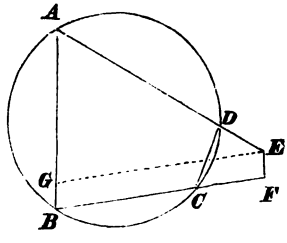
$$h^2 = \frac{(bc + ad)(ca + bd)}{ab + cd}$$ *)

Wenn dagegen der Perimeter des Vierecks $ABCD$ sich selbst schneidet, so ist dies auch bei den Vierecken ABC_1D und $ABCD_1$ der Fall. Die kleinste Seite z. B. AB wird in keinem dieser Vierecke von der gegenüberliegenden Seite innen geschnitten. Dann hat man aber nach dem Ptolemäischen Lehrsatz $ca + h_1f_1 = bd$, u. s. w., indem man die Diagonalen auf gleiche Art wie oben durch f_1, g_1, h_1 bezeichnet. Mithin ergeben sich wiederum die obigen Formeln, nur mit dem Unterschiede, daß die kleinste Seite (a) negativ zu nehmen ist. In den abgeleiteten Formeln für f_1^2, g_1^2, h_1^2 ist es gleichgültig, welche von den vier Seiten negativ genommen wird.

*) Brahmagupta. S. Chasles ap. hist. p. 485 d. Übers. Die dritte Diagonale kommt bei Girard vor. Vgl. unten (30).

28. Wenn in einem dem Kreis eingeschriebenen Viereck $ABCD$ die gegenüberliegenden Seiten DA, BC in E, F von den Geraden geschnitten werden, die durch C, D parallel mit den Diagonalen DB, AC gezogen sind, so ist das Viereck $CDEF$ ähnlich $ABCD$ und entgegengesetzten Sinnes. Mit Hilfe des Vierecks $ABFE$, dessen erste Seite mit der dritten parallel ist, kann das Viereck $ABCD$ konstruiert werden, dessen Seiten gegeben sind und durch dessen Eckpunkte ein Kreis geht.*)

Beweis. Die Winkel $2CDE$, $2CDA$, $2CBA$ sind gleich, weil D, E, A auf einer Geraden, C, D, A, B auf einem Kreise liegen. Die Winkel $2DEC$, $2ADB$, $2ACB$ sind gleich, weil EC und BD parallel sind, und A, B, D, C auf einem Kreise liegen. Daher sind die Dreiecke CDE und ABC ähnlich und entgegengesetzten Sinnes. Dasselbe ergiebt sich auf gleiche Weise für die Dreiecke CDF und ABD. Hieraus erkennt man die Ähnlichkeit der Vierecke $CDEF$ und $ABCD$ (§. 12, 1). Daher sind die entsprechenden Winkel $CD\angle EF$ und $AB\angle CD$ entgegengesetzt gleich, also die Strecken EF und AB parallel und von einerlei Richtung.



Aus der Ähnlichkeit der Figuren $CDEF$ und $ABCD$ folgt, wenn man die Seiten AB, BC, CD, DA der Reihe nach durch a, b, c, d bezeichnet,

$$CF = \frac{c}{a}d, \quad FE = \frac{c}{a}c, \quad ED = \frac{c}{a}b$$

Demnach hat das Viereck $ABFE$ die Seiten

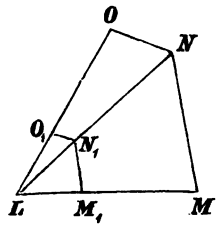
$$AB = a, \quad BF = b \mp \frac{c}{a}d, \quad FE = \frac{c}{a}c, \quad EA = d \mp \frac{c}{a}b$$

wovon die untern Zeichen für das konkave Viereck $ABCD$ gelten, während die obern Zeichen zu nehmen sind, wenn die Seiten BC und DA dieses Vierecks sich unverlängert schneiden. Zieht man noch unter der Voraussetzung $c < a$ die Gerade EG parallel mit FB, so hat das Dreieck AEG die Seiten

$$AG = a - \frac{c}{a}c, \quad GE = b \mp \frac{c}{a}d, \quad EA = d \mp \frac{c}{a}b$$

*) Nach Lamé examen des diff. méthodes p. 16. Diese Aufgabe ist seit dem Ende des 16ten Jahrhunderts vielfach behandelt worden. Vergl. Chasles aperçu hist. p. 496 d. Übers. Kunze Planim. 2te Aufl. p. 239. Camerer nach Klingenstjerna in der Übers. von Simsons Bearbeitung der ebenen Örter des Apollonius p. 427.

Sind nun die Strecken a, b, c, d gegeben, so lassen sich im allgemeinen zwei Vierecke $ABCD$ konstruieren, deren Seiten a, b, c, d sind, und um welche je ein Kreis beschrieben werden kann, davon das eine konkav ist, während der Perimeter des andern sich selbst schneidet. Man konstruiere zunächst aus den Strecken a, b, c, d, wovon $c < a$, ein beliebiges Viereck $LMNO$, dazu in perspektivischer Lage das ähnliche Viereck $LM_1N_1O_1$, worin $LM_1 = c$, folglich



$$M_1N_1 = \frac{c}{a}b, \quad N_1O_1 = \frac{c}{a}c, \quad O_1L = \frac{c}{a}d$$

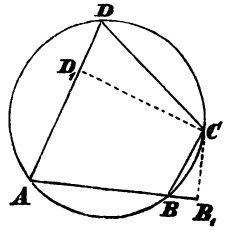
ist. Dann konstruiere man, wenn es möglich ist, die Dreiecke AGE aus den Seiten

$$a - N_1O_1, \quad b \mp O_1L, \quad d \mp M_1N_1$$

mache $AB = a$ in der Richtung AG, vollende die Parallelogramme $EGBF$, mache $BC = b$ in der Richtung BF und $AD = d$ in der Richtung AE. Um jedes der gefundenen Vierecke $ABCD$ läßt sich ein Kreis beschreiben, und in jedem ist $CD = c$.

Bezeichnet man nämlich den Durchschnitt von BC und DA durch H, so hat man $EH : EF = AE : AG$, $FH : EF = BF : AG$ zur Berechnung von EH und FH, DH und CH. Mit Hilfe der obigen Werte von $CF, .., AG, ..$ findet man $DH : CH = BF : AE = BH : AH$, und $DH : FH = AD : CF$. Die Gleichung $DH . AH = BH . CH$ lehrt, daß der Kreis ABC durch D geht. Weil endlich $CD : EF = DH : FH = AD : CF$, so ist $CD = c$.

29. Die Fläche eines dem Kreise eingeschriebenen Vierecks kann auf ähnliche Art wie die Fläche eines Dreiecks (23) durch die Seiten ausgedrückt werden. Zieht man CB_1 und CD_1 normal zu AB und AD, so sind die Dreiecke CBB_1 und CDD_1 ähnlich, wenn A, B, C, D auf einem Kreise liegen, mithin die Winkel $2ABC$ und $2ADC$ gleich sind. Demnach hat man



$$BB_1 : B_1C : CB = DD_1 : D_1C : CD$$

und für die Flächen

$$2ABC = AB . B_1C = AB . BC . \frac{B_1C}{BC}$$

$$2DAC = DA . D_1C = CD . DA . \frac{B_1C}{BC}$$

Dabei haben die Formeln $AB^2+BC^2-CA^2$ und $CD^2+DA^2-AC^2$ die absoluten Werte (21)

$$2AB.BB_1 = 2AB.BC.\frac{BB_1}{BC}$$

$$2DA.DD_1 = 2CD.DA.\frac{BB_1}{BC}$$

Ist nun das Viereck $ABCD$ konkav, und hat seine Fläche v Quadrateinheiten, so sind die Dreiecke ABC und DAC, deren Summe v ist, von einerlei Zeichen, folglich

$$16v^2 = 4(AB.BC+CD.DA)^2.\frac{B_1C^2}{BC^2}$$

Die Formeln $AB^2+..$ und $CD^2+..$ sind von entgegengesetzten Zeichen, weil die Winkel ABC und CDA zu 180^0 sich ergänzen (21), folglich

$$(AB^2+BC^2-CD^2-DA^2)^2 = 4(AB.BC+CD.DA)^2.\frac{BB_1{}^2}{BC^2}$$

Nun ist $B_1C^2+BB_1{}^2 = BC^2$, also nach Bezeichnung der Seiten des Vierecks durch a, b, c, d

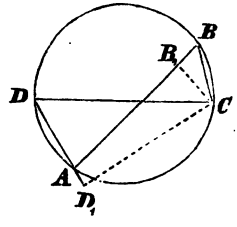
$$16v^2 = 4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$= 8abcd+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2$$
$$-a^4-b^4-c^4-d^4$$

Indem man die Differenz der Quadrate zerlegt, findet man

$$16v^2 = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

Setzt man noch $a+b+c+d = 2s$, so erhält man*)

$$v^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$



Wenn dagegen der Perimeter des Vierecks $ABCD$ sich selbst schneidet, so sind die Dreiecke ABC und DAC von entgegengesetzten Zeichen (§. 9, 7), während die Formeln $AB^2+..$ und $CD^2+..$ einerlei Zeichen haben. Bezeichnet man die Fläche des Vierecks durch v_1, so hat man in diesem Falle

$$16v_1{}^2 = 4(AB.BC-CD.DA)^2.\frac{B_1C^2}{BC^2}$$

$$(AB^2+BC^2-CD^2-DA^2)^2 = 4(AB.BC-CD.DA)^2.\frac{BB_1{}^2}{BC^2}$$

*) Brahmagupta, Snellius. Vgl. Chasles aperçu hist. p. 480 d. Übers.

folglich

$$16v_1^2 = 4(ab-cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$= -8abcd+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2$$
$$-a^4-b^4-c^4-d^4$$
$$= (-a+b+c-d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a+b+c+d)$$

Setzt man noch die Differenz einer Seite und der Summe der übrigen Seiten z. B. $a+b+c-d = 2s_1$, so erhält man

$$v_1^2 = (s_1-a)(s_1-b)(s_1-c)(s_1+d)$$

Die Formeln für die Flächen v und v_1 der Vierecke, welche die Seiten a, b, c, d haben und um welche ein Kreis sich beschreiben läßt, sind demnach eine aus der andern ableitbar; aus der einen entspringt die andere, wenn eine Seite ihr Zeichen wechselt. Dabei ist unmittelbar wahrzunehmen, daß*)

$$v^2-v_1^2 = abcd$$

Wenn d verschwindet, so gehn v und v_1 in die Formel für die Fläche des Dreiecks über, dessen Seiten a, b, c sind (23).

30. Die Radien der Kreise, in welche sich Vierecke beschreiben lassen, deren Seiten a, b, c, d sind, können auf ähnliche Art gefunden werden wie der Radius des Kreises, in den mit drei gegebenen Seiten ein Dreieck sich beschreiben läßt (25). Bezeichnet man die gesuchten Radien durch r oder r_1, je nachdem das Viereck nur konkave Winkel hat oder nicht, und behält man die angenommenen Bezeichnungen (27 ff.), so ist

$$4rv = 4r.ABC+4r.DAC$$
$$= abh \quad +cdh$$

Nun ist $ab+cd = fg$, folglich

$$r = \frac{fgh}{4v}$$**)

$$r^2 = \frac{(ab+cd)(bc+ad)(ca+bd)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

Für ein Viereck der zweiten Art hat man

$$4r_1v_1 = 4r_1.ABC-4r_1.DAC = abh_1-cdh_1$$

Abgesehn vom Zeichen ist $ab-cd = f_1g_1$, folglich

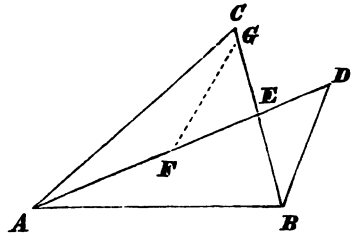
$$r_1 = \frac{f_1g_1h_1}{4v_1}$$

$$r^2 = \frac{(ab-cd)(bc-ad)(ca-bd)}{(-a+b+c-d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a+b+c+d)}$$

*) Vergl. Möbius in Crelle J. 3 p. 17.
**) Girard 1626. Vergl. Chasles aperçu hist. p. 492 d. Übers. Über die

§. 15. Perimeter und Fläche der Figuren.*)

1. Wenn zwei isoperimetrische Dreiecke (d. h. von gleichem Umfang) gleiche Basen haben, so hat dasjenige, in welchem an der Basis der größte Winkel liegt, die kleinere Fläche.**) Ist $AD+DB = AC+CB$, und DBA der größte unter den an AB liegenden Winkeln, so ist die Fläche $ABD < ABC$.



Beweis. Es sei der Winkel $DBA > CBA > BAC$, so ist $BAC > BAD$, sonst läge C im Dreieck ABD, und $AC+CB$ wäre kleiner als $AD+DB$ (§. 3, 2) gegen die Voraussetzung. Daher schneiden sich AD und CB innen in E, so daß $EB < AE$ (§. 3, 1). Macht man $EF = EB$ in der Richtung EA und $EG = ED$ in der Richtung EC, so ist $FG = DB$ (§. 5, 1), folglich $AF+FG+GE+EB = AF+DB+ED+FE = AD+DB = AC+CB$. Nun ist $AC < AF+FC$, folglich $AC+CB < AF+FC+CE+EB$, daher $AF+FG+GE+EB < AF+FC+CE+EB$, $FG+GE < FC+CE$. Hieraus folgt (§. 3, 2), daß das Dreieck FEG ein Teil des Dreiecks AEC ist, folglich $DEB < AEC$, $ABD < ABC$.

2. Unter den Dreiecken auf derselben Basis hat das gleichschenkelige bei gleichem Perimeter die größte Fläche, bei gleicher Fläche den kleinsten Perimeter.

Radien der Kreise, in welche sich mit mehr gegebenen Seiten Polygone beschreiben lassen, und über die Flächen solcher Polygone hat Möbius (a. a. O.) allgemeine Untersuchungen angestellt.

*) Die ersten Sätze über isoperimetrische Figuren, namentlich der Satz vom Kreise und der entsprechende von der Kugel, werden der Pythagoreischen Schule zugeschrieben. Die zugehörige Eigenschaft der Halbkugel wird von Archimedes Sph. et Cyl. II, 10) bewiesen. Zenodor (früher mit Zenodot verwechselt und ins 5te Jh. vor Chr. gesetzt, wahrscheinlich aber nach Archimedes zu setzen) hatte die Elementarsätze über isoperimetrische Figuren in einer Schrift vereint. Von derselben hat Theon im Kommentar zum Almagest (ed. Halma p. 33) einen Auszug gemacht, mit welchem Pappus Collect. V vielfach zusammentrifft. Nach diesen Quellen ist Zenodors Abhandlung deutsch wiedergegeben worden von Rokk im Programm des Freiburger Lyceum 1860. Eine neue Begründung dieser Lehre und beträchtliche Erweiterungen hat L'Huilier de relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum 1782 gegeben. Am gründlichsten ist dieser Gegenstand von Steiner 1841 in 2 Abhandlungen (Crelle J. 24 p. 93 und 189) beleuchtet worden.

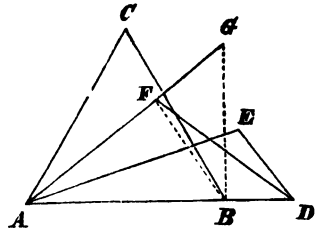
**) Pappus V, 5 und Steiner p. 96.

Beweis. Ist $AD + DB = AC + CB$, so liegt D außerhalb des Dreiecks ACB. Ist $AC = CB$, folglich der Winkel $CBA = BAC$, so ist von den Winkeln DBA und BAD einer kleiner, der andere größer als CBA, mithin (1) die Fläche $ABD < ABC$.

Ist das gleichschenkelige Dreieck ABC dem Dreieck ABD gleich, und das gleichschenkelige Dreieck ABE mit ABD von gleichem Umfang, so ist $BAD < ABE$, folglich $ABC < ABE$, woraus man schließt, daß ABC einen kleinern Perimeter hat als ABE oder ABD.

3. Unter den isoperimetrischen Dreiecken hat das gleichseitige die größte Fläche. Unter den gleichen Dreiecken hat das gleichseitige den kleinsten Perimeter.

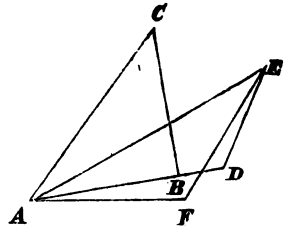
Beweis. Ist ABC gleichseitig und von gleichem Umfang mit ADE, dessen größte Seite AD ist; macht man ADF gleichschenkelig und von gleichem Umfang mit ADE, so ist $AF + FD + DA = AC + CB + BA$, $3AF < 3AB$, und der Winkel $FBA < AFB$. Verlängert man AF um FG, so daß FBG und FBD gleichen Umfang haben, so ist der Winkel $DBF > BFG$, folglich die Fläche $FBD < FBG$ (1). Nun ist $ADE < ADF$ (2), $ADF < ABG$, $ABG < ABC$ (2); folglich $ADE < ABC$. Die andere Behauptung wird wie in (2) bewiesen mit Hilfe des gleichseitigen Dreiecks, welches mit dem gemeinen Dreieck gleichen Umfang hat.*)



4. Unter den Dreiecken, welche die Summe von 2 Seiten gleich haben, ist dasjenige das größte, in dem diese Seiten einander gleich sind und einen rechten Winkel einschließen.

Beweis. Ist $AB = BC$, $CBA = 90^0$, $AD + DE = AB + BC = AF + FE$, $AF = FE$, so ist $ABC > AFE$ (§. 9, 2), $AFE > ADE$ (2), folglich $ABC > ADE$.

Unter den isoperimetrischen Vierecken hat demnach das Quadrat die größte Fläche. Unter den gleichen Vierecken hat das Quadrat den kleinsten Perimeter.



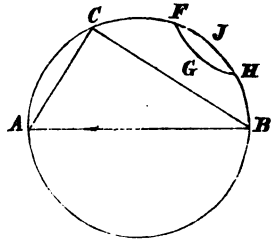
Unter den isoperimetrischen Kreissektoren hat derjenige die größte

*) Steiner p. 99.

Fläche, deſſen Bogen dem Diameter gleich iſt.*) Denn der Sektor iſt halb ſo groß als das rechtwinkelige Dreieck, deſſen Katheten ſo lang ſind als der Bogen und der Diameter (§. 10, 4). Bei gegebener Summe der Katheten wird das Dreieck am größten, wenn die Katheten einander gleich werden.

5. Unter allen iſoperimetriſchen Figuren hat der Kreis die größte Fläche. Unter allen gleichen Figuren hat der Kreis den kleinſten Perimeter.**)

Beweis. Figuren von gegebenem Perimeter können nicht beliebig große Fläche haben, weil jede Diagonale kleiner iſt als der halbe Perimeter (§. 3, 2). Die größten unter dieſen Figuren können von innen betrachtet nirgends konvex erſcheinen; ſonſt könnte man die Figur vergrößern, ohne den Perimeter zu vergrößern, indem man z. B. ſtatt des konvexen Teils *FGH* des Perimeters den gleichen und ähnlichen konkaven Teil *FJH* ſetzte. Sind *A* und *B* Punkte, welche den Perimeter einer größten Figur halbieren, ſo muß die Gerade *AB* die Fläche derſelben halbieren; ſonſt könnte man die Figur vergrößern, ohne den Perimeter zu vergrößern, indem man den größern Teil dem andern gleich und ähnlich machte. Sind *C*, *D*, .. andere Punkte des Perimeters, ſo müſſen die Winkel *ACB*, *ADB*, .. recht ſein; ſonſt könnte man ohne Änderung des Perimeters die Figur vergrößern, indem man dieſe Winkel recht machte (§. 9, 2). Die Scheitel der rechten Winkel *ACB*, *ADB*, .. liegen auf dem Kreiſe, deſſen Gegenpunkte *A* und *B* ſind (§. 4, 3). Alſo kann eine Figur von größter Fläche bei gegebenem Perimeter von einem Kreiſe nicht verſchieden ſein.



Iſt der Kreis *K* der Figur *L* gleich, und *L* mit dem Kreiſe *M* von gleichem Umfang, ſo iſt $L < M$, folglich $K < M$, mithin *K* von kleinerm Umfang als *M* oder *L*.

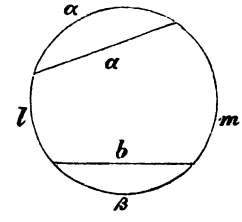
6. Wenn der Perimeter einer Figur aus einer unbegrenzten Geraden *g* und einer willkürlichen Linie *l* beſteht, und wenn entweder die Länge von *l* oder die Fläche der Figur gegeben iſt, ſo iſt die Fläche am größten, oder die Länge von *l* am kleinſten, wenn die Figur ein Halbkreis iſt.***)

*) Steiner p. 114.
**) Pappus V, 2. Steiner p. 105.
***) Steiner p. 109. Vgl. Pappus V, 17.

Beweis. Der Halbkreis P und die andere mit ihm zu vergleichende Figur Q, bei der die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, werden durch die gleichen und ähnlichen Figuren ergänzt, welche mit ihnen zur Geraden g symmetrisch liegen (§. 7, 4). Nun ist bei gleichem Perimeter $2P > 2Q$, bei gleicher Fläche der Perimeter von $2P$ kleiner als der von $2Q$ (5), folglich u. s. w.

7. Wenn der Perimeter einer Figur aus einer Strecke a und einer willkürlichen Linie l besteht, und wenn entweder die Länge von l oder die Fläche der Figur gegeben ist, so ist die Fläche am größten, oder der Perimeter am kleinsten, wenn die Figur ein Kreissegment ist.

Beweis. Das von a und l umschlossene Kreissegment P werde durch das Kreissegment $a\alpha$ zum Kreise K ergänzt, und eine andere von a und l umschlossene Figur durch Q bezeichnet. Nun ist bei gleichem Perimeter $K > Q + a\alpha$, bei gleicher Fläche der Perimeter von K kleiner als der von $Q + a\alpha$ (5). Durch Subtraktion von $a\alpha$ findet man $P < Q$ u. s. w.*)



Durch Addition von Kreissegmenten erkennt man ebenso, daß unter allen Figuren, deren Perimeter aus zwei Strecken a, b, und einer oder zwei willkürlichen Linien l, m besteht, das Kreissegment die größte Fläche oder den kleinsten Perimeter hat, je nachdem der Perimeter oder die Fläche der Figuren gegeben ist.

Ebenso schließt man, daß unter den aus gegebenen Seiten gebildeten Polygonen diejenigen, welche Kreisen eingeschrieben sind, und deren Perimeter sich selbst nicht schneiden, größte Flächen umspannen.**)

8. Unter den Polygonen von derselben Seitenzahl hat das gemeine reguläre bei gleichem Perimeter die größte Fläche, bei gleicher Fläche den kleinsten Perimeter.***)

Beweis. Ein Polygon kann in ein größeres Polygon von derselben Seitenzahl und von demselben Perimeter verwandelt werden, wenn zwei aufeinanderfolgende Seiten ungleich sind (2). Also muß das größte unter den isoperimetrischen Polygonen von gleicher Seitenzahl gleichseitig sein. Das größte unter den Polygonen, die von gegebenen

*) Steiner p. 110.
**) Moula 1737 Comm. Petrop. 9 p. 138 und Cramer Mém. de Berlin 1752 p. 283. Vergl. die Einleitung zu L'Huilier's Werk.
***) Pappus V, 10.

Seiten umſchloſſen werden können, iſt dasjenige, welchem ein Kreis umgeſchrieben werden kann (7).

Die andere Behauptung wird wie oben (2) bewieſen.

9. Die Flächen der iſoperimetriſchen regulären Polygone vom Dreieck an bis zum Kreis bilden eine ſteigende Reihe; die Perimeter der gleichen regulären Polygone vom Dreieck an bis zum Kreis bilden eine fallende Reihe.*)

Beweis. Das reguläre $n$eck kann als irreguläres $(n+1)$eck betrachtet werden, in welchem ein Winkel 180^0 beträgt. Das irreguläre $(n+1)$eck iſt kleiner als das iſoperimetriſche reguläre $(n+1)$eck (8), u. ſ. w.

*) Pappus V, 1. Steiner p. 112. Der Letztere hat den einfachen Beweis gefunden.

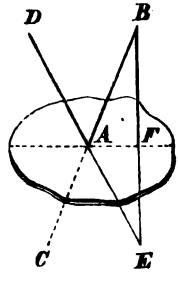
Fünftes Buch.

Stereometrie.

§. 1. Durchschnitt von Ebenen und Geraden.

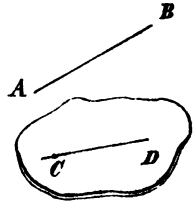
1. Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemein haben, so haben sie eine durch den gemeinschaftlichen Punkt gehende Gerade gemein.*)

Beweis. Durch den gemeinschaftlichen Punkt A der Ebenen werden auf der ersten Ebene die Geraden BC, DE gezogen, welche die zweite Ebene schneiden, weil sie die durch A gehenden Geraden der zweiten Ebene schneiden (Plan. §. 1, 3). Durch die Punkte B und E, welche auf verschiedenen Seiten der zweiten Ebene liegen, ist eine Gerade bestimmt, welche die zweite Ebene in F schneidet. Weil die Gerade BE mit der ersten Ebene zwei Punkte gemein hat, so liegt sie auf der ersten Ebene (Planim. §. 1, 4). Daher ist F ein gemeinschaftlicher Punkt, und die Gerade AF eine gemeinschaftliche Gerade der beiden Ebenen, in der sie sich schneiden. Außerhalb der Geraden AF können die beiden Ebenen einen Punkt nicht gemein haben, ohne ganz zusammenzufallen.



2. Eine Gerade und eine Ebene haben einen Punkt gemein, in dem sie im allgemeinen sich schneiden. Wenn die Gerade mit einer Geraden der Ebene parallel ist, so ist sie mit der Ebene parallel, d. h. sie schneidet sie nicht und hat mit ihr einen unendlich fernen Punkt gemein, ihre Richtung ist in der Ebene enthalten.

Beweis. Durch die Gerade AB und einen beliebigen Punkt C der Ebene ist eine Ebene bestimmt (Planim. 1, 4), welche die gegebene Ebene in der Geraden CD schneidet (1). Die Geraden AB und CD der Ebene ABC haben im allgemeinen einen Punkt gemein, in dem sie sich schneiden, in dem also auch die gegebene Ebene



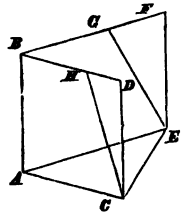
*) Eucl. XI, 3 u. A. geben nur an, daß die Linie, welche zwei Ebenen gemein haben, gerade ist.

von der Geraden AB geschnitten wird. Außer diesem Punkt kann die Gerade mit der Ebene einen andern Punkt nicht gemein haben, ohne ganz mit ihr zusammenzufallen.

Wenn die Gerade AB irgend eine Gerade CD der Ebene, die zugleich der Ebene ABC angehört, nicht schneidet oder mit ihr parallel ist, so kann sie mit der Ebene einen endlich fernen Punkt nicht gemein haben, weil AB mit CD keinen endlich fernen Punkt gemein hat, und die Ebene ABC mit der gegebenen Ebene keinen Punkt neben CD gemein hat. Der gemeinschaftliche unendlich ferne Punkt von AB und CD (ihre Richtung, Planim. §. 2) ist das gemeinschaftliche der Geraden und der Ebene.

3. Wenn von den drei Geraden a, b, c je zwei auf einer Ebene liegen, so haben sie einen (endlich oder unendlich fernen) Punkt gemein, den gemeinschaftlichen Punkt der drei Ebenen, und bilden einen Büschel von Geraden (Planim. §. 14, 8). Denn ein gemeinschaftlicher Punkt von a und b liegt sowohl auf der Ebene ac, als auch auf der Ebene bc, folglich auf der Geraden c, welche diese Ebenen gemein haben. Und wenn zwei unter den drei Geraden sich nicht schneiden, so können sie auch nicht von der dritten Geraden geschnitten werden.

Wenn die Geraden AB und CD parallel sind und die Ebenen ABE und CDE in der Geraden EF sich schneiden, so ist EF mit AB und CD parallel, jede Gerade EG des Winkels FEA schneidet AB. Denn die Ebene GEC schneidet die Ebene DCA in einer Geraden CH des Winkels DCA, von welcher AB geschnitten wird (Planim. §. 2, 6). Also wird AB auch von EG geschnitten.



Wenn von den Geraden CD, EF jede mit der Geraden AB parallel ist, so sind auch CD und EF parallel.*) Gesetzt, die Ebenen ABC und CEF schnitten sich in der Geraden CD', so wäre CD' mit AB parallel, mithin CD nicht mit AB parallel gegen die Voraussetzung.

4. Wenn zwei Ebenen α, β mit einer Geraden c parallel sind, so ist die Gerade $\alpha\beta$, welche sie gemein haben, mit der Geraden c parallel. Nach der Voraussetzung giebt es auf der Ebene α eine Gerade a und auf der Ebene β eine Gerade b, die beide mit c parallel sind (2). Daher sind die Geraden a und b parallel (3), und von den drei

*) Eucl. XI, 9 hat den Beweis mit Hilfe einer normalen Ebene geführt. Bolyai und Lobatschewsky haben gezeigt, daß dieser Satz unabhängig ist von der Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks.

Geraden a, b, $\alpha\beta$ liegen je zwei auf einer Ebene, folglich ist $\alpha\beta$ mit a, b und c parallel.

Nach dem Axiom über die parallelen Geraden, welches der gemeinen Geometrie zu Grunde liegt (Planim. §. 2, 7), schließt man: Wenn von zwei Ebenen α, β jede mit zwei nicht parallelen Geraden c, d parallel ist (wenn sie zwei verschiedene Richtungen gemein haben), so sind sie parallel, d. h. sie schneiden sich nicht, sie haben eine unendlich ferne Gerade gemein und einerlei Stellung.*) Hätten die Ebenen eine endlich ferne Gerade gemein, so müßte dieselbe sowohl mit c als auch mit d parallel sein. Also wären c und d parallel, gegen die Voraussetzung.

In der gemeinen Geometrie wird die Linie der unendlich fernen Punkte einer Ebene als eine Gerade vorgestellt, weil mit ihr jede Gerade derselben Ebene nur einen (unendlich fernen) Punkt gemein hat; und die Fläche der unendlich fernen Punkte des Raumes als eine Ebene, weil mit ihr jede Ebene nur eine (unendlich ferne) Gerade gemein hat. Wie von dem unendlich fernen Punkt einer Geraden nicht die Entfernung, wohl aber die Richtung, in der er liegt, sich angeben läßt, so kann von der unendlich fernen Geraden einer Ebene nicht die Richtung, sondern nur die Stellung, in der sie sich befindet, angegeben werden. Parallele Ebenen haben einerlei Stellung, gleichwie parallele Gerade einerlei Richtung haben; die unendlich ferne Ebene des Raumes hat unbestimmte Stellung.

Unter der Voraussetzung, daß eine Gerade zwei getrennte unendlich ferne Punkte hat, liegt die gemeinschaftliche Gerade der Ebenen, die einen unendlich fernen Punkt der Geraden c und einen unendlich fernen Punkt der Geraden d gemein haben, in endlicher Ferne und ist einerseits mit c, andrerseits mit d parallel.

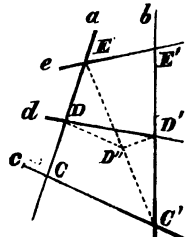
5. Wenn zwei Ebenen α, β parallel sind und mit einer dritten Ebene γ je einen Punkt gemein haben, so werden sie von ihr in parallelen Geraden geschnitten. Denn die Durchschnitte (1) $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ liegen auf der Ebene γ und haben einen endlich fernen Punkt ebenso wenig gemein, als die Ebenen α, β.

Wenn zwei Ebenen α, β parallel sind, und eine derselben von einer Geraden c oder von einer Ebene γ geschnitten wird, so wird auch die andere von der Geraden oder von der Ebene geschnitten. Wird β von der Geraden c geschnitten, und ist D ein Punkt von α, der nicht zugleich auf c liegt, so werden α und β von der Ebene Dc in parallelen Geraden geschnitten. Die Gerade c, welche eine derselben, die auf β liegende schneidet, schneidet auch die andere auf α liegende, mithin die Ebene α (Planim. §. 2, 7). Wenn β von der Ebene γ geschnitten wird, und c eine Gerade von γ ist, welche die Ebene β schneidet, so wird α von c, also auch von γ geschnitten.

*) Eucl. XI, 15. Die unendlich ferne Gerade einer Ebene ist von Desargues mit dem Büschel von Ebenen (s. Planim. §. 14, 8) angegeben und neuerlich nebst der unendlich fernen Ebene des Raumes von Poncelet (propr. proj. 107. 580) eingeführt worden. Den Ausdruck „Stellung einer Ebene" verdankt man Staudt Geom. d. Lage 40.

Wenn die Ebenen α, β parallel sind, und eine derselben mit einer Geraden c oder mit einer Ebene γ parallel ist, so ist auch die andere mit der Geraden oder mit der Ebene parallel. Wird α von c nicht geschnitten, so wird β von c nicht geschnitten, u. s. w.

Wenn 3 Gerade a, b, c einen Punkt gemein haben und mit einer Ebene δ parallel sind, so liegen sie auf einer Ebene, die mit der gegebenen Ebene parallel ist. Denn die Ebene der Geraden a, b ist mit δ parallel (4). Würde die Ebene ab von der Geraden c geschnitten, so würde auch δ von c geschnitten, gegen die Voraussetzung.



Zwei Gerade a, b werden von drei parallelen Ebenen γ, δ, ε oder von drei Geraden c, d, e, die mit einer Ebene parallel sind, nach demselben Verhältnis geschnitten, die eine in C, D, E, die andere in C', D', E', so daß (Eucl. XI, 16. 17)

$$CD : DE : CE = C'D' : D'E' : C'E'$$

Zieht man nämlich die Gerade $C'E$, welche von δ in D'' geschnitten wird, so sind CC' und DD'', $D''D'$ und EE' parallel. Hieraus ergiebt sich die Behauptung nach Planim. §. 8, 2.

6. Drei Ebenen α, β, γ haben einen Punkt gemein, in dem die Geraden, welche sie paarweise gemein haben, sich schneiden. Denn die Gerade, welche zwei der Ebenen gemein haben, hat mit der dritten Ebene einen Punkt gemein, der den drei Ebenen angehört.

Wenn die drei Ebenen mit einer Geraden parallel sind (einen unendlich fernen Punkt, eine Richtung gemein haben), so sind die Geraden, welche sie paarweise gemein haben, parallel (4).

Wenn von den drei Ebenen zwei parallel sind, so ist von den parallelen Geraden, die sie paarweise gemein haben, eine unendlich fern (4 und 5).

Wenn die drei Ebenen zwei Punkte gemein haben, so haben sie eine Gerade gemein, in der sie sich schneiden, und bilden einen Büschel von Ebenen (Planim. §. 14, 8). Diese Gerade ist unendlich fern, wenn die drei Ebenen parallel sind.

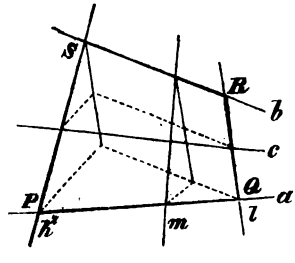
7. Zwei Gerade a, b, welche nicht auf einer Ebene liegen, haben keinen Punkt gemein; auch ihre unendlich fernen Punkte sind verschieden. Durch jeden beliebigen Punkt C des Raumes geht eine Ebene, die mit den beiden Geraden parallel ist. Man findet dieselbe, indem man durch den Punkt C die Geraden zieht, welche einzeln mit a und mit b parallel sind.

Durch jeden Punkt C des Raumes geht auch eine Gerade, welche mit jeder von beiden Geraden a, b einen Punkt gemein hat. Denn die Ebenen Ca und Cb schneiden sich in einer Geraden CD (1), die sowohl mit a als auch mit b auf einer Ebene liegt, folglich entweder beide zugleich schneidet, oder eine schneidet und mit der andern parallel ist. Ist C unendlich fern, so haben die Ebenen Ca und Cb bestimmte Stellungen; ihre gemeinschaftliche Gerade ist die Gerade von bestimmter Richtung, welche mit a und b je einen Punkt gemein hat.

Wenn sowohl a als b mit den Geraden k und l je einen Punkt gemein haben, so können k und l nicht auf einer Ebene liegen; sonst müßten a und b auf derselben Ebene liegen.*)

8. Drei Gerade a, b, c, von denen je zwei nicht auf einer Ebene liegen, können mit unendlich vielen Geraden k, l, m, .. je einen Punkt gemein haben; denn durch jeden Punkt von a geht eine Gerade, die mit a, b, c je einen Punkt gemein hat (7). Je zwei unter den Geraden k, l, m, .. liegen nicht auf einer Ebene; je drei unter denselben Geraden haben aber nicht nur mit a, b, c, sondern noch mit unendlich viel andern Geraden je einen Punkt gemein. Beide Serien von Geraden a, b, c, .. und k, l, m, .. liegen auf einer durch irgend drei Gerade der einen oder der andern Serie bestimmten geradlinigen Fläche**), die den Namen geradliniges Hyperboloid (hyperbolisches, à une nappe) erhalten hat.

Wenn eine Gerade der Serie a, b, c, .. unendlich fern ist, so haben die Geraden k, l, m, .. mit einer Ebene η, auf welcher die unendlich ferne Gerade liegt, je einen unendlich fernen Punkt gemein und sind mit ihr parallel. Auf jeder Ebene, die mit η parallel ist, liegt eine Gerade der Serie k, l, m, .. also auch auf der unendlich fernen Ebene, mithin ist eine Gerade der Serie k, l, m, .. unendlich fern, folglich sind auch die Geraden der Serie a, b, c, .. mit einer Ebene ϑ parallel. Die Fläche, auf der beide Serien von Geraden liegen, heißt ein geradliniges (hyperbolisches) Paraboloid; sie ist durch drei Gerade bestimmt, von denen je zwei nicht auf einer Ebene liegen, und die mit einer Ebene parallel sind. Am einfachsten ist dieselbe Fläche durch ein unebenes (gauche) Viereck



*) Vergl. Steiner Crelle J. 2 p. 268.

**) Der Beweis dieser Eigenschaft beruht auf metrischen Beziehungen. Vergl. unten Trigon. §. 7, 16.

$PQRS$ bestimmt; jede Ebene, die mit PQ und RS parallel ist, schneidet QR und SP in Punkten, durch welche eine Gerade der Serie PQ, RS, .. geht; jede Ebene, die mit QR und SP parallel ist, schneidet PQ und RS in Punkten, durch welche eine Gerade der Serie QR, SP, .. geht.

9. In der neuern Geometrie hat man mehr und mehr die Sätze, welche die gegenseitige Lage der Figuren und ihrer Elemente betreffen, von den Sätzen unterschieden, welche die Größe derselben und quantitative Beziehungen von Raumgrößen in Betracht nehmen. Die Sätze der ersten Art handeln von graphischen (deskriptiven) Eigenschaften, die Sätze der andern Art von metrischen Relationen der räumlichen Objekte. Man kann deshalb die gesamte Geometrie auch in zwei Gebiete trennen, in eine Geometrie der Lage (situs, situation), und eine Geometrie des Maßes.*)

Schon die ersten graphischen Sätze, welche die Lage von Punkten, Geraden, Ebenen betreffen, lassen eine gewisse paarweise Zusammengehörigkeit (Dualität, Reciprocität, Polarität) erkennen, von der Art, daß aus einem Satze der ihm zugeordnete (reciproke, polare) Satz entsteht, wenn Punkte und Ebenen mit einander vertauscht werden.**) Nämlich:

Durch 2 Gerade a, b, die auf einer Ebene liegen, ist ein Punkt ab bestimmt. Durch 2 Gerade a, b, die einen Punkt gemein haben, ist eine Ebene ab bestimmt (Planim. §. 1 und 2).

Durch 2 Punkte A, B ist eine Gerade AB bestimmt. Durch 2 Ebenen α, β ist eine Gerade $\alpha\beta$ bestimmt.

Durch 2 Richtungen ist eine Stellung, durch 2 Stellungen eine Richtung bestimmt (4).

Durch eine Gerade a und einen Punkt B, der nicht auf der

*) Vergl. Leibniz Brief an Huygens 1679 Sept. 8, mehrere Abhandlungen von Euler, Vandermonde u. A. (Reuß Repert. Comm. p. 33). Die Ausdrücke „graphisch und metrisch" sind von Poncelet propr. proj. 5 ff. entgegengesetzt worden. Vergl. Chasles Aperçu hist. p. 207 d. Übers. Carnot's Géométrie de position handelt nur von metrischen Relationen. Die Entwickelung der graphischen Eigenschaften des Raumes ohne Benutzung metrischer Relationen, welche die Figuren als transportabel voraussetzen, hat Staudt Geom. der Lage 1847 unternommen.

**) Das Gesetz der Dualität ist zuerst in metrischer Beziehung bei dem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck (§. 4) von Vieta, Lansberg, Snellius wahrgenommen worden. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 52 d. Übers. und Klügel math. W. 4 p. 850. Dasselbe wurde umfassend in graphischer Beziehung bei planen und räumlichen Figuren erst im Anfang des 19ten Jahrhunderts erkannt. Wesentlich war dabei die Einführung der Benennungen „Pol einer Geraden" durch Servois 1811, „Polare eines Punktes" und „Dualität" durch Gergonne 1813, „Reciprocität" durch Monge, Poncelet und Plücker. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 398 und 405 d. Übers. Die obigen Dualisierungen finden sich bei Gergonne (Ann. 16 p. 209) und Staudt Geom. d. Lage 66.

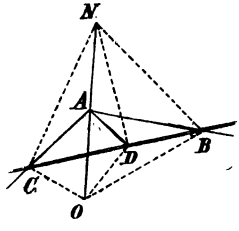
Geraden liegt, ist eine Ebene aB bestimmt. Durch eine Gerade a und eine Ebene β, welche die Gerade nicht enthält, ist ein Punkt $a\beta$ bestimmt (2).

Durch 3 Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, ist eine Ebene ABC bestimmt. Durch 3 Ebenen α, β, γ, die nicht eine Gerade enthalten, ist ein Punkt $\alpha\beta\gamma$ bestimmt (6).

Bei diesen Sätzen ist es gleichgültig, ob die Punkte, Geraden, Ebenen in endlicher oder unendlicher Ferne liegen.

§. 2. Winkel und Abstände von Ebenen und Geraden.

1. Wenn eine Gerade zu zwei sich schneidenden Geraden einer Ebene normal ist, so ist sie eine Normale der Ebene, d. h. zu jeder Geraden der Ebene normal.*) Wenn die Winkel NAB, NAC recht sind, und die Gerade AD auf der Ebene ABC liegt, so ist auch der Winkel NAD recht und AN eine Normale der Ebene ABC.



Beweis. Man zieht auf der Ebene ABC durch je einen beliebigen Punkt der Schenkel AB und AC des Winkels, in welchem AD liegt, die Gerade BC, welche AD in D schneidet. Auf der die Geraden AB, AC normal schneidenden Geraden teilt man entgegengesetzt gleiche Strecken ab, AN und AO. Dann sind (Planim. §. 5)
die Dreiecke NAB und OAB gleich und ähnlich, d. h. $NB = OB$;
die Dreiecke NAC und OAC gleich und ähnlich, d. h. $NC = OC$;
die Dreiecke NBC und OBC gleich und ähnlich, d. h. W. $NBC = OBC$;
die Dreiecke NBD und OBD gleich und ähnlich, d. h. $ND = OD$;
die Dreiecke NAD und OAD gleich und ähnlich, d. h. W. $NAD = DAO$.
Demnach ist der Winkel NAD recht.

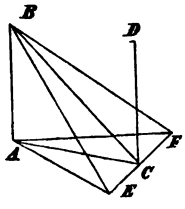
Anmerkung. Wenn die Ebenen β, γ zu einer Geraden a normal stehn, so können sie sich nicht schneiden. Eucl. XI, 14. Denn eine beliebige Ebene δ, welche die Gerade a enthält, schneidet die Ebenen β, γ in Geraden, die zu der Geraden a normal sind und sich nicht schneiden.

*) Eucl. XI, 4. Der Euclidsche Beweis ist weitläufiger als der hier gegebene, der in einer Abhandlung von Crelle (Crelle J. 45 p. 35) vorkommt. Ein anderer Beweis ist von Legendre (géom. V, 4) auf Sätze gegründet worden, die diesem Gebiete von Betrachtungen fern stehn.

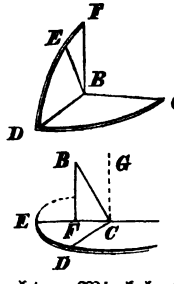
2. Wenn drei Gerade AB, AC, AD eine Gerade AN in demſelben Punkt normal ſchneiden, ſo liegen ſie auf einer Ebene. Eucl. XI, 5. Läge AD nicht auf BAC, ſo ſchnitten ſich die Ebenen NAD und BAC in der Geraden AE, und der Winkel NAE wäre recht (1), folglich NAD nicht recht, gegen die Vorausſetzung.

Wenn ein rechter Winkel um einen ſeiner Schenkel als Axe umgedreht wird, ſo beſchreibt der andere Schenkel eine Ebene.

3. Zwei Normalen einer Ebene liegen auf einer Ebene und ſchneiden ſich nicht. Eucl. XI, 6. Zieht man auf der Ebene, deren Normalen AB und CD ſind, die Gerade ECF normal zu der Geraden AC, und macht man $EC = CF$, ſo iſt $ECA \cong FCA$ d. h. $EA = FA$, folglich $BAE \cong BAF$ d. h. $EB = FB$, folglich $ECB \cong FCB$ d. h. der Winkel BCE recht. Zugleich ſind die Winkel DCE, ACE recht; alſo liegen CB, CD, CA auf einer Ebene (2), während die Winkel DCA und CAB recht ſind.



Wenn CD normal zu der Ebene ACE, und die Gerade AB auf der Ebene DCA normal zu der Geraden CA gezogen wird, ſo iſt AB eine Normale der Ebene ACE. Eucl. XI, 8. Geſetzt, AB' wäre die Normale der Ebene ACE, ſo läge AB' auf der Ebene DCA, und die Ebene $B'AB$ wäre normal zu der Geraden CA; alſo läge die Gerade AB nicht auf der Ebene DCA, gegen die Vorausſetzung.

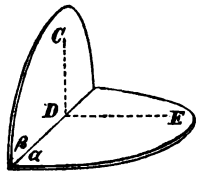


Anmerkung. Um die Normale der Ebene α durch einen gegebenen Punkt B zu ziehn, hat man 3 rechte Winkel zu konſtruieren. Liegt B auf α, und konſtruiert man die rechten Winkel CBD auf α, CBE außer α, DBF auf der Ebene DBE, ſo iſt BF die geſuchte Normale. Denn BF liegt auf der Ebene DBE, die zu der Geraden BC der Ebene α normal ſteht (1).

Liegt B außer α, und konſtruiert man die rechten Winkel BCD, deſſen Schenkel CD auf α liegt, DCE auf α, und BFC auf BEC, ſo iſt BF die geſuchte Normale. Konſtruiert man auf der Ebene BCE den rechten Winkel GCE, ſo iſt CG eine Normale der Ebene α, folglich auch BF.

4. Wenn eine Ebene β eine Normale einer andern Ebene α enthält, ſo liegt jede Normale der Ebene β, die mit der Ebene α einen Punkt gemein hat, auf der Ebene α, und die Ebenen heißen normal zu einander geſtellt. Eucl. XI, 18. Iſt D ein gemeinſchaftlicher Punkt

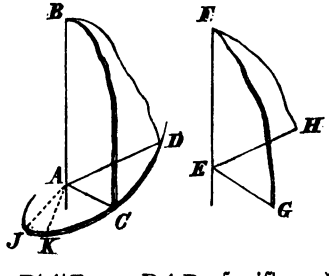
der beiden Ebenen, DC die auf β liegende Normale von α, DE eine Normale von β, so ist der Winkel EDC recht, mithin DE eine Gerade der Ebene α (2). Ist F ein beliebiger Punkt von α, FG eine Normale von β, so liegt FG mit DE auf einer Ebene (3), d. h. FG liegt auf α.



Wenn zwei Ebenen normal zu einer dritten Ebene stehn, so ist die Gerade, welche sie gemein haben, zu der dritten Ebene normal. Vergl. §. 1, 4.

5. Zwei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden, teilen den Raum in 4 Räume, welche Flächenwinkel (angle dièdre, coin bei Legendre Géom. V, 17) genannt werden. Die Teile der Ebenen, welche einen Flächenwinkel einschließen, heißen seine Seiten oder Flächen (ἕδρα, face); die Gerade, in der die Seiten zusammentreffen, heißt die Kante des Flächenwinkels (πλευρά, latus, côté, besser acies bei Euler, arête bei Legendre). Der Flächenwinkel, dessen Kante AB, dessen Seiten ABC und ABD sind, wird durch $\overline{CABD}$ unzweideutig bezeichnet, wenn der Sinn der Drehung festgesetzt ist, durch welche der Flächenwinkel beschrieben werden soll, d. h. wenn bestimmt ist, ob einem von A nach B aufwärts gerichteten Betrachter die von C nach D gehende Bewegung linksum oder rechtsum gehend erscheint. Vergl. Planim. §. 1, 5.

I. Gleiche Flächenwinkel $\overline{CABD}$ und $\overline{GEFH}$ sind kongruent. Konstruiert man die Winkel $CAB = GEF$ und $DAB = HEF$, und vereinigt man den Winkel CAB mit dem gleichen Winkel GEF, so fällt die Ebene DAB mit der Ebene HEF zusammen, sonst wären die beiden Flächenwinkel ungleich. Daher fällt auch der Schenkel AD mit dem Schenkel EH zusammen; und die Winkel CAD und GEH sind einander gleich. Konstruiert man auf dem ersten Flächenwinkel die Winkel $C'A'B = CAB$ und $D'A'B = DAB$, so ist auch $C'A'D' = GEH$, folglich $C'A'D' = CAD$.



II. Ein Flächenwinkel hat mit einer Ebene, welche seine Kante schneidet, einen Winkel gemein, und wird von parallelen Ebenen in gleichen Winkeln geschnitten (I). Wenn die Schenkel eines Winkels mit den Schenkeln eines andern Winkels der Reihe nach parallel und von einerlei Richtung sind, so sind die Winkel gleich. Unter dem

Winkel von zwei Geraden, die nicht auf einer Ebene liegen, wird ein Winkel verstanden, dessen Schenkel mit den beiden Geraden der Reihe nach parallel und von einerlei Richtung sind.

III. Unter einem Normalschnitt eines Flächenwinkels versteht man den Winkel, in welchem der Flächenwinkel von einer Ebene geschnitten wird, die zu der Kante, also auch zu den Seiten des Flächenwinkels (4) normal steht. Alle Normalschnitte eines Flächenwinkels sind einander gleich, gleiche Flächenwinkel haben gleiche Normalschnitte. Umgekehrt schließt man, daß zwei Flächenwinkel gleich sind, wenn sie gleiche Normalschnitte haben. Eucl. XI def. 6.

Flächenwinkel heißen spitz, recht, stumpf, supplementär, komplementär, Nebenwinkel, Scheitelwinkel, wenn ihren Normalschnitten diese Benennungen zukommen. Wenn die Seiten des Flächenwinkels normal zu einander stehn (4), so ist der Flächenwinkel recht.

IV. Die von einer Normale einer Ebene mit einer Normale einer andern Ebene gebildeten Winkel können ebenfalls zur Bestimmung der von den beiden Ebenen gebildeten Flächenwinkel gebraucht werden. Wenn CAD ein Normalschnitt des Flächenwinkels $\widehat{CABD}$ ist und die rechten Winkel JAC, KAD auf der Ebene CAD liegen, so sind AJ, AK Normalen der Ebenen CAB, DAB (1), und die Winkel CAD, JAK einander gleich.

6. Wenn durch gegebene Punkte des Raumes A, B, C, .. nach einem gegebenen Gesetz Linien von bestimmter Art gezogen werden, welche eine gegebene Fläche in den Punkten A_1, B_1, C_1, .. schneiden, so heißen die Flächenpunkte A_1, B_1, C_1, .. Projektionen (projectio = Entwerfung, Entwurf) der Raumpunkte A, B, C, .. auf die gegebene Fläche. Die gegebene Fläche heißt die Projektionsfläche (Bildfläche), die durch die Raumpunkte gezogenen Linien heißen die Projicierenden (projetantes) der Punkte. Die Figur, deren Punkte die Projektionen der Punkte einer Figur sind, heißt die Projektion der gegebenen Figur.*)

In den einfachsten Fällen nimmt man zur Projektionsfläche eine Ebene, zu Projicierenden Gerade, welche zur Projektionsebene normal

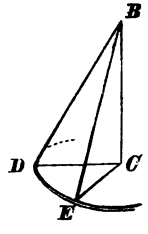
*) Die Projektionen sind von den griechischen Astronomen (Hipparchus, Ptolemaeus u. A.) zur Abbildung der scheinbaren Himmelskugel gebraucht worden. Klügel math. W. IV p. 492. Im 16ten Jahrhundert wurde die aus dem Altertum bekannte Perspektive weiter entwickelt, zu der am Ende des 18ten Jahrhunderts die von Monge ausgebildete deskriptive Geometrie (Projektionslehre) hinzukam. Zu geometrischen Untersuchungen hat zuerst Desargues um 1640 die Projektionen gebraucht; die Wichtigkeit dieser Anwendung ist durch Monges Schule, besonders aber durch Poncelet's Arbeiten (propr. proj.) in helles Licht gesetzt worden.

sind. Die so erhaltenen Projektionen heißen Normalprojektionen (orthogonale, orthographische, Projektionen schlechthin). Die Geraden, welche die Punkte einer Geraden projicieren, liegen auf einer Ebene, welche die Gerade projiciert und normal zur Projektionsebene steht (4). Die Gerade, in der die Projektionsebene von der Ebene geschnitten wird, welche eine gegebene Gerade projiciert, enthält die Projektionen aller Punkte der gegebenen Geraden und ist die Projektion der gegebenen Geraden. Nur in dem Falle, daß die gegebene Gerade normal zur Projektionsebene ist, ist die Projektion der Geraden ein Punkt.

Die Normalprojektionen von zwei sich schneidenden Geraden sind zwei Gerade, die sich schneiden oder zusammenfallen; die Normalprojektionen von zwei sich nicht schneidenden Geraden einer Ebene sind zwei Gerade, die sich nicht schneiden oder zusammenfallen. Die Normalprojektion eines rechten Winkels ist nur dann ein rechter Winkel, wenn ein Schenkel normal ist zu der Ebene, welche den andern Schenkel projiciert.

Unter den Abbildungen eines räumlichen Objektes sind von besonderer Anwendung seine horizontale und vertikale Projektion (Grundriß, Aufriß); bei jener sind die Projicierenden vertikal und die Projektionsebene horizontal, bei dieser sind die Projicierenden horizontal und normal zur vertikalen Projektionsebene. Die Bilder, welche in der Stereometrie zur Unterstützung der Vorstellung der räumlichen Objekte gezeichnet werden, sind Projektionen dieser Objekte durch Projicierende, die auch zu einer andern Ebene als der Projektionsebene normal sein können.

7. Unter den Abständen eines gegebenen Punktes B von den Punkten einer Ebene α ist der Abstand des Punktes von seiner Normalprojektion auf die Ebene (6) am kleinsten, und giebt den Abstand des Punktes von der Ebene an. Die Punkte der Ebene, welche von einem außer der Ebene gegebenen Punkt gleiche Abstände haben, liegen auf einem Kreise, dessen Centrum die Normalprojektion des Punktes auf die Ebene ist.

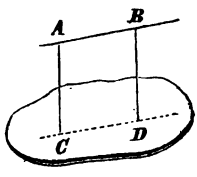


Beweis. Wenn außer der Ebene α der Punkt B liegt, wenn C die Normalprojektion von B auf α, und D ein beliebiger Punkt der Ebene α ist, so ist der Winkel BCD recht (1), folglich $CB < DB$. Wenn E ein anderer Punkt von α und $DB = EB$ ist, so sind die Dreiecke BCD und BCE gleich und ähnlich, mithin $DC = EC$.

8. Unter dem Abstand einer Geraden von einer Ebene, die mit ihr parallel ist, versteht man den Abstand eines beliebigen Punktes der

Geraden von der Ebene, weil alle Punkte der Geraden von der Ebene gleiche Abstände haben. Unter dem Abstand paralleler Ebenen versteht man den Abstand eines beliebigen Punktes der einen Ebene von der andern Ebene, weil alle Punkte der einen Ebene von der andern Ebene gleiche Abstände haben.

Beweis. Wenn A und B Punkte der Geraden, C und D ihre Normalprojektionen auf die Ebene sind, so sind die Projicierenden AC und BD parallel (3). Ferner ist die Gerade AB mit ihrer Normalprojektion CD parallel, weil die Gerade mit der Projektionsebene parallel ist. Also ist das Viereck $ACDB$ ein Parallelogramm, $CA = DB$.

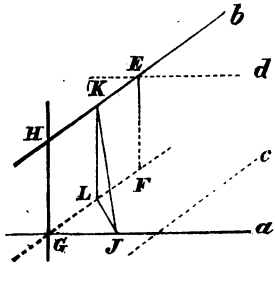


Wenn A und B Punkte der einen Ebene, C und D ihre Normalprojektionen auf die andere Ebene, und die beiden Ebenen parallel sind, so findet man durch dieselben Betrachtungen $CA = DB$.

Zwei parallele Ebenen teilen den Raum in 3 Räume, von denen der mittlere eine Schicht (couche) heißt. Die Größe einer Schicht wird nach dem Abstand der parallelen Ebenen beurteilt. Eine Schicht kann als ein Flächenwinkel mit einer unendlich fernen Kante betrachtet werden (§. 1, 4).

9. Unter dem Abstand von zwei Geraden, die nicht auf einer Ebene liegen, versteht man den Abstand der parallelen Ebenen, auf denen die Geraden liegen, oder den Abstand der einen Geraden von der Ebene, die mit derselben parallel ist und die andere Gerade enthält, oder den Abstand der Punkte, in welchen die beiden Geraden von einer bestimmten Geraden normal geschnitten werden.*)

Wenn die Geraden a und b nicht auf einer Ebene liegen, und man zieht durch einen Punkt von a die Gerade c parallel mit b, durch einen Punkt von b die Gerade d parallel mit a, so ist die Ebene ac nicht nur mit der Geraden b, sondern auch mit der Ebene bd parallel (§. 1).



Ein beliebiger Punkt E der Geraden b werde durch die Gerade EF normal projiciert auf die Ebene ac; durch F werde die Gerade gezogen, die mit b parallel ist und a in G schneidet; durch G werde die Gerade gezogen, die mit EF parallel ist und b in H schneidet. Die Gerade GH

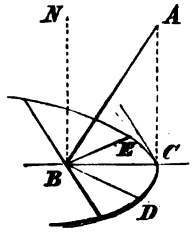
*) Legendre Géom. note 6.

ist gleichwie EF eine Normale der Ebene ac (3), folglich auch eine Normale der mit ac parallelen Ebene bd, also schneidet sie die Geraden a und b normal und ist der Durchschnitt der Ebenen, welche die Geraden a und b enthalten und zu den parallelen Ebenen ac und bd normal stehn (4).

Die Punkte G und H der Geraden a und b haben von einander einen kleinern Abstand, als irgend welche andere Punkte J und K derselben Geraden. Zieht man KL parallel mit GH, so ist der Winkel KLJ recht, $JK > LK$, $LK = GH$, also $JK > GH$.

10. Eine Gerade, die eine Ebene nicht normal schneidet, bildet mit den Geraden der Ebene verschiedene Winkel, mit ihrer Normalprojektion auf die Ebene den kleinsten spitzen und den größten stumpfen Winkel. Deshalb versteht man unter dem Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bildet, den Winkel, welchen sie mit ihrer Normalprojektion auf die Ebene bildet.*)

Es sei C die Normalprojektion des Punktes A, BC die Normalprojektion der Geraden BA auf die gegebene Ebene, der Winkel ABC spitz, und BD eine Strecke der Ebene, die man der Strecke BC gleich macht. Während nun der Winkel CBD von 0 bis 180^0 wächst, so wächst in dem Dreieck CBD die Seite CD von 0 bis $2BC$ (Planim. §. 5, 5). Dabei wächst in dem rechtwinkeligen Dreieck ACD die Hypotenuse AD von AC bis zur Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten $2BC$ und CA sind. Also wächst auch in dem Dreieck ABD der Winkel ABD von ABC bis $180^0 - ABC$.



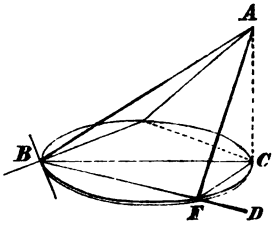
Wenn der Winkel $CBD = 90^0$ ist, so ist BD eine Normale der Ebene ABC, weil die Ebenen ABC und DBC normal zu einander stehn, folglich $ABD = 90^0$. Wenn die Winkel CBD und CBE entgegengesetzt gleich sind, so sind die Winkel ABD und ABE gleich.

Der von der Geraden AB mit der Ebene BCD gebildete spitze Winkel ist das Komplement des Winkels NBA, den die Normale BN der Ebene mit der Geraden BA bildet. Dieser letztere Winkel heißt in der Optik der Incidenzwinkel des Strahls AB in Bezug auf die Ebene BCD.

Während der Winkel CBD von 0 bis 90^0 und dann von 90^0 bis 180^0 wächst, so fällt der Flächenwinkel $\overline{ABDC}$ von 90^0 bis ABC

*) Eucl. XI def. 5 und Optica 37 ff. Pappus VI, 44.

und steigt dann wieder bis auf 90°. Zieht man CF normal zu BD, so ist BD eine Normale der Ebene AFC, mithin AFC ein Normalschnitt des Flächenwinkels $ABDC$. Wenn nun der Winkel CBD von 0 bis 90° wächst, so wächst in dem rechtwinkeligen Dreieck CBF die Kathete CF von 0 bis CB und es fällt in dem rechtwinkeligen Dreieck ACF der Winkel AFC von 90° bis ABC. Bei weiterer Zunahme des Winkels CBD von 90° bis 180° fällt die Kathete CF von CB bis 0, und der Winkel AFC wächst von ABC bis 90°.



§. 3. Kegel, Cylinder und Kugel.

1. Eine geradlinige Fläche (Planim. §. 1, 4), deren Gerade sämtlich einen Punkt gemein haben, heißt ein **Kegel** (κῶνος, conus), die auf ihm liegenden Geraden heißen seine **Kanten** (vergl. §. 5, 1), der gemeinschaftliche Punkt sein **Centrum** (Spitze). Der vollständige Kegel wird durch sein Centrum in 2 Felder, Kegel und Gegenkegel, geteilt. Wenn die Geraden einer geradlinigen Fläche sämtlich parallel sind, so heißt die geradlinige Fläche ein **Cylinder** (κύλινδρος). Der Cylinder kann als ein Kegel betrachtet werden, dessen Centrum unendlich fern ist. Die Ebene kann als ein Kegel wie auch als ein Cylinder betrachtet werden.

Wenn eine beliebige Linie mit einer Geraden starr verbunden ist und um die unbewegliche Gerade als Axe umgedreht wird, so ist ihre Bahn eine **Rotationsfläche** (surface de rotation, révolution). Zu den Rotationsflächen gehört der **Rotationskegel***), entstanden durch Rotation eines spitzen Winkels um einen seiner Schenkel; die **Ebene**, entstanden durch Rotation eines rechten Winkels um einen seiner Schenkel (§. 2, 2); der **Rotationscylinder**, entstanden durch Rotation eines Streifens um einen seiner Schenkel; die **Kugel**, entstanden durch Rotation eines Halbkreises um den ihn begrenzenden Diameter (vergl. unten 4).

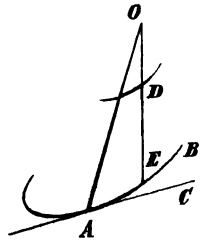
Die Ebenen, welche die Axe einer Rotationsfläche normal schneiden, schneiden die Rotationsfläche in Kreisen, deren Centren auf der Axe liegen (§. 2, 2), und welche **Parallelkreise** heißen. Die Ebenen,

*) Eucl. XI def. 14 ff. Man unterschied spitzwinkelige, rechtwinkelige, stumpfwinkelige Kegel nach der Größe des Winkels, dessen Hälfte durch Rotation den Kegel beschreibt. Zu den Rotationsflächen gehören die von Archimedes untersuchten Konoide und Sphäroide. Die allgemeinere Auffassung des Kegels findet sich bei Apollonius Conica I def. 1.

welche die Axe der Rotationsfläche enthalten, schneiden die Rotationsfläche in kongruenten Linien, welche nach geographischem Gebrauch Meridiane der Fläche heißen.

2. Eine Ebene, die durch das Centrum eines Kegels geht, enthält entweder zwei Kanten desselben, oder eine Kante, oder keine. In dem ersten Falle schneidet sie den Kegel beiderseits vom Centrum, der Kegelschnitt ist ein Winkel und sein Scheitelwinkel; in dem zweiten Falle berührt sie den Kegel entlang einer Kante, der Kegelschnitt ist eine Gerade; in dem dritten Falle schneidet sie alle Kanten des Kegels im Centrum, der Kegelschnitt ist ein Punkt.

Wenn die Ebene das Centrum O des Kegels und eine Tangente AC einer auf dem Kegel liegenden Kurve AB enthält, so tritt der zweite Fall ein, die Ebene OAC berührt den Kegel längs der Kante OA und hat mit ihm außer der Kante OA in unmittelbarer Nähe keinen Punkt gemein. Denn eine Ebene, welche die Kante OA und einen neben OA liegenden Punkt D des Kegels enthält, hat mit dem Kegel die Kante OD und mit der Kurve AB den Punkt E gemein, in welchem die Kurve von der Kante OD geschnitten wird. Die Ebene OAD enthält also eine Sehne AE der Kurve AB und nicht die Tangente AC derselben.



Wenn der Kegel und die ihn berührende Ebene OAC von einer Ebene in der Kurve AF und der Geraden AG geschnitten werden, so ist AG die Tangente von AF in dem gemeinschaftlichen Punkt A, weil sie mit dem Kegel, also auch mit der Kurve keinen Punkt neben A gemein hat. Umgekehrt schließt man: die Geraden, welche die eine Kante schneidenden Kegelkurven in diesen Punkten berühren, liegen auf einer Tangentenebene des Kegels, die mit demselben jene Kante gemein hat.

3. Eine Ebene, welche das Centrum des Kegels nicht enthält, ist entweder mit 2 Kanten desselben parallel, oder sie ist mit einer Kante d. h. mit einer diese Kante enthaltenden Tangentenebene des Kegels parallel, oder sie ist mit keiner Kante des Kegels parallel.*)

*) Vergl. Poncelet propr. proj. 4 und Steiner syst. Entw. 36. Die Schnitte der verschiedenen Rotationskegel durch eine zu einer Kante normale Ebene sind zuerst von Menächmus (Platonische Schule 370 v. Chr.) unterschieden und durch entsprechende Gleichungen bestimmt worden. Reimer hist. dupl. cubi p. 58. Die Schriften von Aristäus und Euclides über die Kegelschnitte sind nicht mehr vorhanden. Archimedes hat diese Kurven als Schnitte eines jeden Rotationskegels erkannt (Con. et Sph. 8 ff.), Apollonius hat sie als Schnitte eines jeden Kegels, auf dem ein Kreis liegt, nachgewiesen und mit den noch heute gebräuchlichen Namen versehn (Conica I).

In dem ersten Falle werden 2 Kanten des Kegels nicht geschnitten, die übrigen werden teils auf dem einen, teils auf dem andern Kegelfelde geschnitten; der Kegelschnitt besteht aus zwei nach zwei Richtungen ins Unendliche sich erstreckenden Ästen und heißt hyperbolisch (ὑπερβολή, excessus).

In dem zweiten Falle werden außer einer alle Kanten geschnitten, der Kegelschnitt bleibt nach einer Richtung offen und heißt parabolisch (παραβολή, aequalitas).

In dem dritten Falle werden alle Kanten geschnitten, der Kegelschnitt ist geschlossen und heißt elliptisch (ἔλλειψις, defectus).

Anmerkung. Die Planschnitte eines Cylinders, auf dem ein Kreis liegt, sind im allgemeinen elliptisch. In dem besondern Falle, daß die schneidende Ebene mit den Kanten des Cylinders parallel ist, wird der Cylinderschnitt ein Streifen, dessen Schenkel getrennt, real oder nicht konstruierbar (imaginär), oder vereint sind.

4. Die Punkte des Raumes, welche von einem gegebenen Punkt gleiche Abstände haben, liegen auf einer geschlossenen Fläche, welche Kugel (σφαῖρα, globus) genannt wird. Der gegebene Punkt heißt das Centrum, die Strecke zwischen dem Centrum und einem beliebigen Punkt der Kugel heißt ein Radius der Kugel. Eine Gerade, die durch das Centrum geht, schneidet die Kugel in zwei Punkten, welche Gegenpunkte (antipodes) heißen und einen Diameter begrenzen. Eine durch das Centrum gehende Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis, dessen Centrum und Radius von dem Centrum und Radius der Kugel nicht verschieden sind, und der ein Hauptkreis (größter Kreis, Normalkreis) genannt wird. Ein Hauptkreis teilt die Kugel in zwei kongruente Teile, welche Halbkugeln (Hemisphären) heißen.*)

5. Wenn der Abstand einer Ebene vom Centrum der Kugel kleiner ist als ein Radius, so wird die Kugel von der Ebene in einem Kreis geschnitten, dessen Centrum die Normalprojektion des Centrum der Kugel auf die Ebene ist. Die Radien der Kugel, welche nach Punkten dieses Kreises gehn, liegen auf einem Rotationskegel; ihre Normalprojektionen auf die Ebene sind Radien des Kreises.

Wenn der Abstand der Ebene vom Centrum der Kugel dem Radius gleich ist, so wird die Kugel von der Ebene berührt, d. h. die Normalprojektion des Centrum auf die Ebene liegt auf der Kugel,

*) Die Ausdrücke „Hauptkreis, Gegenpunkte" sind von Steiner (Crelle J. 2 p. 45) eingeführt worden.

und die Geraden, welche in diesem Punkt die hindurchgehenden Hauptkreise berühren, liegen auf der Ebene. Die Kugel wird von ihren Radien normal geschnitten.

Wenn der Abstand der Ebene vom Centrum der Kugel größer ist als ein Radius, so ist die Ebene von der Kugel ausgeschlossen.*)

Beweis. Ist B das Centrum der Kugel, C dessen Normalprojektion auf die Ebene α, D ein beliebiger Punkt dieser Ebene, so ist $BD > BC$. Wenn nun BC kleiner ist als ein Radius, so ist C von der Kugel eingeschlossen, und die Ebene hat mit der Kugel einen Kreis gemein (§. 2, 7). Wenn BC dem Radius gleich ist, so liegt C auf der Kugel und die Gerade CD berührt den auf der Ebene BCD liegenden Hauptkreis der Kugel. Wenn BC größer ist als ein Radius, so sind alle Punkte der Ebene von der Kugel ausgeschlossen.

Anmerkung. Vier beliebige Punkte der Kugel liegen im allgemeinen nicht auf einer Ebene, die Kugel ist eine krumme Fläche (Planim. §. 1, 4). Die durch 3 Punkte der Kugel bestimmte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis, dessen Centrum die Normalprojektion des Centrum der Kugel auf die Ebene ist. Ein vierter Punkt der Kugel liegt nur dann auf derselben Ebene, wenn er auf dem erwähnten Kreis liegt.

6. Die Geraden, welche einen Punkt A gemein haben und eine gegebene Kugel (B) berühren, liegen auf einem Rotationskegel, dessen Axe den gemeinschaftlichen Punkt und das Centrum der Kugel enthält. Die Berührungspunkte $C, C', \ldots$ liegen auf einem Kreis, dessen Centrum auf der Axe liegt und dessen Ebene normal zur Axe steht.**) Denn die Dreiecke $ABC, ABC', \ldots$ sind rechtwinkelig und kongruent u. s. w.

Wenn der Punkt A von der Kugel (B) eingeschlossen ist, so ist der Kreis, dessen Centrum mit A zusammenfällt, der kleinste unter allen Kreisen der Kugel, deren Ebenen den Punkt A enthalten (Planim. §. 6, 11).

Wenn man den Radius der Kugel durch r bezeichnet, so hat man für jede den Punkt A enthaltende Gerade, welche die Kugel in P und P_1 schneidet, nach Planim. §. 14, 3

$$AP.AP_1 = AB^2 - r^2.$$

Dieses für den gegebenen Punkt und die Kugel unveränderliche Produkt

*) Theodosius Sphaerica I.
**) Euclides Opt. 23.

heißt die Potenz des Punktes in Bezug auf die Kugel; sein Wert ist das Quadrat einer von A an die Kugel reichenden Tangente, oder Null, oder das negative Quadrat der halben (kleinsten) Sehne, deren Mitte A ist, je nachdem der Punkt A von der Kugel (B) ausgeschlossen ist, oder auf ihr liegt, oder von ihr eingeschlossen ist.

7. Zwei Kugeln (A) und (B) haben einen Kreis gemein, dessen Centrum auf der Geraden AB liegt und dessen Ebene normal zu derselben Geraden steht, wie man aus der Betrachtung ihrer auf einer Ebene liegenden Hauptkreise erkennt (Planim. §. 3, 3). Der von den Kugeln in einem gemeinschaftlichen Punkt gebildete Flächenwinkel wird durch den Winkel angegeben, den die nach dem gemeinschaftlichen Punkt gehenden Radien bilden (§. 2, 5. Anm.); also schneiden sich die Kugeln längs des gemeinschaftlichen Kreises unter denselben Winkeln.

Der gemeinschaftliche Kreis der Kugeln ist nur dann real, wenn die Radien und der Abstand der Centren Seiten eines Dreiecks sind. Er fällt mit seinem Centrum zusammen, so daß die Kugeln sich berühren, wenn der Abstand der Centren der Summe oder der Differenz der Radien gleichkommt. Er wird imaginär, so daß eine Kugel die andere ganz ein- oder ausschließt, wenn der Abstand der Centren kleiner ist als die Differenz oder größer als die Summe der Radien.

In jedem Falle ist die Ebene des gemeinschaftlichen Kreises real und vermöge der Eigenschaft konstruierbar, daß jeder Punkt der Ebene in Bezug auf die beiden Kugeln gleiche Potenzen besitzt (Planim. §. 14, 6 ff.). Die von den Kugeln ausgeschlossenen Punkte dieser Ebene sind Centren von bestimmten Orthogonalkugeln der Kugeln (A) und (B), d. h. von Kugeln, welche die Kugeln (A) und (B) rechtwinkelig längs je eines Kreises schneiden.

8. Drei Kugeln (A), (B), (C) haben im allgemeinen zwei Punkte P und Q gemein, welche symmetrisch zur Ebene der Centren ABC liegen, so daß die Strecke PQ von der Ebene ABC normal halbiert wird. Denn die Dreiecke PQA, PQB, PQC sind gleichschenkelig und die Mitte ihrer gemeinschaftlichen Basis liegt auf der Ebene ABC (§. 2, 2).

Die gemeinschaftlichen Punkte P und Q können in ihrer Mitte zusammenfallen, oder imaginär werden. In jedem Falle ist die Gerade, auf der die gemeinschaftlichen Punkte getrennt oder vereint liegen oder die Realität verloren haben, real und durch die Eigenschaft bestimmt, daß jeder Punkt der Geraden in Bezug auf die 3 Kugeln gleiche Potenzen besitzt. Denn sie liegt auf den Ebenen, deren Punkte in Bezug auf jedes Paar der Kugeln gleiche Potenzen haben.

Zu 4 Kugeln (A), (B), (C), (D) giebt es im allgemeinen einen

Punkt, der in Bezug auf dieselben gleiche Potenzen hat. Denn die Gerade, deren Punkte in Bezug auf die Kugeln (A), (B), (C) gleiche Potenzen haben, hat mit der Ebene, deren Punkte in Bezug auf die Kugeln (A) und (D) gleiche Potenzen haben, einen Punkt gemein.

Wenn insbesondere 3 Kugeln von solcher Größe und Lage sind, daß ihre auf einer Ebene liegenden Hauptkreise einen Büschel (Planim. §. 14, 8) bilden, so bilden die Kugeln einen Büschel, d. h. es giebt eine Ebene, deren Punkte in Bezug auf die Kugeln gleiche Potenzen besitzen. Auf dieser Ebene liegt der reale oder imaginäre Kreis, welchen die Kugeln des Büschels gemein haben. Eine andere Ebene schneidet den Büschel der Kugeln in einem Büschel von Kreisen.

9. Ein Punkt, der von 2 gegebenen Punkten A und B gleiche Abstände hat, liegt auf der Ebene, welche die Strecke AB normal halbiert und zu welcher die Punkte A und B symmetrisch liegen (§. 2, 2). Ein Punkt, dessen Abstände von A und B ein gegebenes Verhältnis haben, liegt auf der Kugel, welche die Strecke AB nach dem gegebenen Verhältnis innen und außen normal schneidet (Planim. §. 8, 6).

Ein Punkt, der von 3 gegebenen Punkten A, B, C gleiche Abstände hat, liegt auf der Geraden, welche die Ebene ABC im Centrum des Kreises ABC normal schneidet (§. 2, 7).

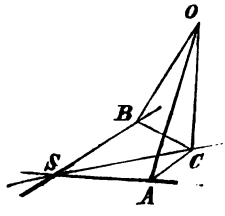
Zu 4 Punkten A, B, C, D giebt es im allgemeinen einen Punkt, der von ihnen gleiche Abstände hat, das Centrum der Kugel $ABCD$.*) Denn die Gerade, deren Punkte von A, B, C gleich fern sind, hat mit der Ebene, welche die Strecke AD normal halbiert, einen Punkt gemein, der von A, B, C, D gleich fern ist. Denselben Punkt haben die Ebenen gemein, welche die 6 durch die 4 gegebenen Punkte begrenzten Strecken normal halbieren. Wenn die Punkte A, B, C, D auf einer Ebene liegen, so ist das Centrum der Kugel $ABCD$ auf einer Normale der Ebene ABC unendlich fern, und die Kugel unterscheidet sich nicht von dieser Ebene. Wenn insbesondere die Punkte A, B, C, D auf einem Kreis liegen, so sind alle Punkte der Geraden, welche die Ebene des Kreises in seinem Centrum normal schneidet, von den gegebenen Punkten gleich fern.

Demnach ist eine Kugel durch 4 Punkte bestimmt, die nicht auf einem Kreis liegen; also auch durch einen Kreis und einen daneben liegenden Punkt, durch 2 Kreise, die 2 Punkte gemein haben, z. B. durch die Kreise ABC und ABD. Zwei Kreise, die in einem Punkt sich schneiden, können nicht auf einer Kugel liegen. Zwei Kreise, die

*) Fermat de contact. sph. Opp. p. 74.

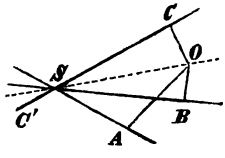
ſich nicht ſchneiden, liegen im allgemeinen nicht auf einer Kugel. Vergl. unten §. 5.

10. Die Punkte, die von einer gegebenen Geraden gleiche Abſtände haben, liegen auf einem Rotationscylinder, deſſen Axe die gegebene Gerade iſt. Die Geraden (Ebenen), die von einer gegebenen Geraden gleiche Abſtände haben, berühren einen Rotationscylinder, deſſen Axe die gegebene Gerade iſt.



Ein Punkt, der von 2 gegebenen Geraden einer Ebene gleiche Abſtände hat, liegt auf einer der Ebenen, welche die Winkel (Streifen) der Geraden normal halbieren. Wenn die Winkel *OAS*, *OBS* recht und die Strecken *OA*, *OB* gleich ſind, und wenn *C* die Normalprojektion von *O* auf die Ebene des Winkels *ASB* iſt, ſo ſind die Strecken *CA*, *CB* gleich, u. ſ. w.

Ein Punkt, der von 3 Geraden, welche paarweiſe je einer Ebene angehören (§. 1, 3), gleiche Abſtände hat, liegt auf einer von 4 beſtimmten Geraden, den Axen von Rotationskegeln, auf denen die gegebenen Geraden liegen.

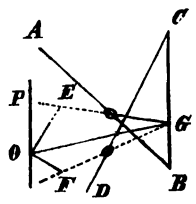


Wenn die Winkel *OAS*, *OBS*, *OCS* recht und die Strecken *OA*, *OB*, *OC* gleich ſind, ſo liegt *OS* ſowohl auf den Ebenen, welche die Winkel *ASB* und *BSC* normal halbieren, als auch auf der Ebene, welche den Winkel *CSA* normal halbiert, und iſt die Axe eines Rotationskegels, deſſen Kanten die Geraden *SA*, *SB*, *SC* ſind. Ebenſo liegen *SA*, *SB*, *SC'* auf einem Rotationskegel, u. ſ. w. Anſtatt der Rotationskegel findet man Rotationscylinder, wenn die gegebenen Geraden parallel ſind.

11. Ein Punkt, der von 2 gegebenen Ebenen gleiche Abſtände hat, liegt auf einer der Ebenen, welche die von den gegebenen Ebenen gebildeten Flächenwinkel halbieren. Wenn die Normalen *OE*, *OF* aus *O* zu den Ebenen *ABC*, *BCD* gleich ſind, ſo wird *BC* von der Ebene *OEF* in *G* normal geſchnitten (§. 2, 4) und *OG* halbiert den Winkel *EGF*.

Hieraus folgt, daß eine Gerade *OP* von 2 nicht auf einer Ebene liegenden Geraden *AB* und *CD* gleiche Abſtände hat, wenn ſie auf einer der Ebenen liegt, welche einen die Geraden *AB*, *CD* enthaltenden

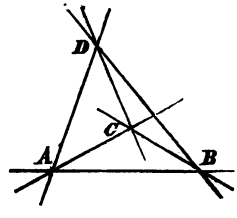
Flächenwinkel $A\overline{BC}D$ halbieren, und wenn sie zugleich mit der Kante BC des Flächenwinkels parallel ist. Denn die Abstände der Geraden OP von AB und CD sind den Abständen des Punktes O von den Ebenen ABC und BCD gleich (§. 2, 9). Insbesondere haben alle Geraden der Ebene, welche die durch AB und CD bestimmte Schicht halbiert, von AB und CD gleiche Abstände.



Ein Punkt, der von 3 Ebenen gleiche Abstände hat, liegt auf einer von 4 bestimmten Geraden, den Axen von Rotationskegeln, die von den 3 Ebenen berührt werden. Wenn der Punkt O von den Ebenen ASB, BSC gleiche Abstände hat, so liegt er auf einer der Ebenen, welche den Flächenwinkel $A\overline{SBC}$ halbieren. Wenn die Gerade SO auf zwei Ebenen liegt, welche die Flächenwinkel $A\overline{SBC}$, $B\overline{SCA}$ halbieren, so liegt sie auch auf einer Ebene, die den Flächenwinkel $C\overline{SAB}$ halbiert, weil O von den 3 Ebenen gleiche Abstände hat. Die Gerade SO bildet mit den 3 Ebenen gleiche Winkel, u. s. w.

12. Zu 4 Ebenen α, β, γ, δ giebt es im allgemeinen 8 Punkte, die von ihnen gleiche Abstände haben, die Centren der Kugeln, welche die 4 Ebenen berühren.

Man hat zuvörderst die Räume zu unterscheiden, welche durch je eine Ebene getrennt werden. Von dem gemeinschaftlichen Punkt A der Ebenen β, γ, δ werde gesagt, daß er auf der positiven Seite der Ebene α liegt; von einem jenseitigen Punkt werde gesagt, daß er auf der negativen Seite von α liegt. Auf den positiven Seiten von β, γ, δ liegen nach ähnlicher Annahme die gemeinschaftlichen Punkte B, C, D der jedesmal übrigen Ebenen. Unter $\alpha\delta$ werde der auf den positiven Seiten von α und δ an der Kante BC liegende Flächenwinkel verstanden, u. s. w.



Der gemeinschaftliche Punkt der Ebenen, welche die Flächenwinkel $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ halbieren, hat von den Ebenen α, β, γ, δ gleiche Abstände; er liegt folglich auf den Ebenen, welche die übrigen Flächenwinkel $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ halbieren, und ist das Centrum der Kugel, welche die Ebenen α, β, γ, δ berührt und auf ihren positiven Seiten liegt.

Der gemeinschaftliche Punkt der Ebenen, welche die Nebenwinkel von $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ halbieren, ist das Centrum der die vier Ebenen berührenden Kugel, welche auf der negativen Seite von δ liegt. Die

gemeinschaftlichen Punkte der Ebenen, welche zwei Flächenwinkel $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ und den Nebenwinkel des dritten halbieren, sind die Centren der die vier Ebenen berührenden Kugeln, die auf den negativen Seiten von γ, α, β liegen.

Die übrigen 3 von allen die 4 Ebenen berührenden Kugeln liegen auf den negativen Seiten von jedesmal zwei der Ebenen α, β, γ, δ. Ihre Centren sind die gemeinschaftlichen Punkte der Ebenen, welche einen der Flächenwinkel $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ und die Nebenwinkel der beiden andern halbieren. Z. B. die Ebenen, welche die Nebenwinkel von $\alpha\delta$ und $\beta\delta$ halbieren, schneiden sich in einer Geraden, die mit der Ebene, welche den Flächenwinkel $\gamma\delta$ halbiert, einen Punkt gemein hat. Dieser Punkt liegt entweder in dem Scheitelwinkel von $\gamma\delta$ d. i. auf den negativen Seiten von γ und δ; oder in dem Flächenwinkel $\gamma\delta$ auf den negativen Seiten von α und β d. i. in dem Scheitelwinkel von $\alpha\beta$; oder er ist unendlich fern in der Richtung jener Geraden, wenn sie mit der den Flächenwinkel $\gamma\delta$ halbierenden Ebene parallel ist. Dieselben Bemerkungen gelten von jedem der beiden andern Centren. Von den drei letzten Kugeln können also eine, oder zwei, oder alle unendlich groß sein, und die 4 gegebenen Ebenen in unendlicher Ferne berühren.*)

§. 4. Sphärik.**)

1. Durch zwei Punkte A, B der Kugel (und deren Gegenpunkte A_1, B_1) ist ein Hauptkreis AB bestimmt. Durch zwei Hauptkreise a, b ist ein Punkt ab (und dessen Gegenpunkt) bestimmt. Denn die Punkte A, B und das Centrum der Kugel bestimmen eine Ebene, auf der die Gegenpunkte A_1, B_1 liegen, und welche die Kugel in einem Hauptkreis

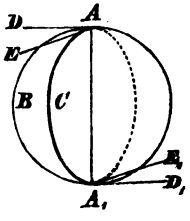
*) Von der ersten Kugel, welche 4 Ebenen berührt, hat Fermat gehandelt (Opp. p. 77), die übrigen Kugeln kommen bei Lagrange sur les pyram. 24 (Mém. de Berlin 1773) vor, genauer bei Feuerbach (die dreieckige Pyramide §. 36). Die Aufgabe, eine Kugel zu konstruieren, welche 4 gegebene Ebenen berührt, ist untergeordnet unter die allgemeinere Aufgabe: eine Kugel zu konstruieren, die mit 4 gegebenen Kugeln gegebene Winkel bildet. Die gegebenen Kugeln können Punkte oder Ebenen sein, die gegebenen Winkel können verschwinden. Vergl. Pascal oeuvres éd. Lahure II p. 396. Miquel Liouv. J. 11 p. 75.

**) Die Kugel ist im frühen Altertum für die Dienste der Astronomie als Konstruktionsfeld betrachtet und untersucht worden. Ausführliche Abhandlungen der sphärischen Geometrie von Theodosius (1tes Jahrhundert vor Chr.) und Menelaus (Anfang des 2ten Jahrhunderts nach Chr.) sind übrig geblieben. Weiteren Zuwachs hat die Sphärik durch Vieta, Snellius, Girard, besonders durch Euler und Lexell erhalten. Zusammenhängende Bearbeitungen der Sphärik sind erst in neuester Zeit von C. F. Schulz 1833 und Gudermann 1835 erschienen.

schneidet (§. 3, 4). Die Ebenen der Hauptkreise a, b haben das Centrum der Kugel gemein, folglich schneiden sie sich in einem Diameter der Kugel (§. 1, 1).

Hiernach hat unter den sphärischen Linien der Hauptkreis dieselben Grundeigenschaften, wie unter den planen Linien die Gerade.

2. Zwei Punkte A, B und deren Gegenpunkte A_1, B_1 teilen den hindurchgehenden Hauptkreis in 4 Bogen, AB, BA_1, A_1B_1, B_1A, unter denen zwei folgende supplementär sind, d. h. zu einem Halbkreis sich ergänzen; zwei getrennte Bogen, wie AB und A_1B_1, sind einander gleich.



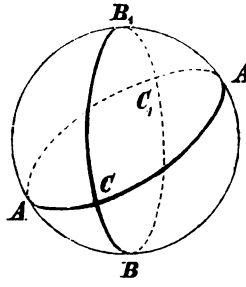
Zwei Hauptkreise teilen die Kugel in 4 Felder, sphärische Winkel*) genannt. Der Winkel, welchen in A und A_1 die Hauptkreise AB und AC bilden, ist derselbe, welchen die in A, A_1 die Hauptkreise berührenden Geraden AD und AE, A_1D_1 und A_1E_1 auf den Ebenen ADE und $A_1D_1E_1$ bilden (Planim. §. 3, 6). Nun sind die Tangenten AD, AE, A_1D_1, A_1E_1 normal zu dem Diameter AA_1, also sind die Ebenen ADE, $A_1D_1E_1$ normal zu dem Diameter AA_1 (§. 2, 2), und die Winkel DAE, $D_1A_1E_1$ sind Normalschnitte des Flächenwinkels $B\overline{AA_1}C$ (§. 2, 5), in welchem der sphärische Winkel ABA_1C enthalten ist.

Wenn die von den Hauptkreisen a, b und die von den Hauptkreisen c, d in ihren Durchschnittspunkten gebildeten Winkel gleich sind, so sind die von den Ebenen a, b und die von den Ebenen c, d eingeschlossenen Flächenwinkel gleich (§. 2, 5), und die in diesen Flächenwinkeln enthaltenen sphärischen Winkel kongruent. Demnach ist ein sphärischer Winkel durch den Winkel bestimmt, welchen die ihn einschließenden Hauptkreise in einem ihrer Durchschnittspunkte bilden. Eine Halbkugel ist ein gestreckter sphärischer Winkel. Unter den vier von zwei Hauptkreisen gebildeten sphärischen Winkeln erscheinen zwei folgende als Nebenwinkel, zwei getrennte als Scheitelwinkel.

3. Drei Punkte der Kugel A, B, C (und deren Gegenpunkte A_1,

*) Uneigentlich ein „sphärisches Zweieck", weil unter zwei Punkten der Kugel in der Regel solche verstanden werden, von denen nicht einer des andern Gegenpunkt ist. Legendre (Géom. VII, déf. 9) nennt den sphärischen Winkel fuseau (Spindel).

B_1, C_1), die nicht auf einem Hauptkreis liegen, bestimmen drei Hauptkreise, welche die Kugel in 8 Felder teilen, sphärische Dreiecke genannt. Die Bogen*) AB, BC, CA, welche die Punkte A, B, C der Reihe nach verbinden, heißen die Seiten, die von den Seiten an ihren gemeinschaftlichen Punkten der Reihe nach gebildeten Winkel ACB, CBA, BAC heißen die Winkel des sphärischen Dreiecks. Das Dreieck heißt gleichschenkelig, wenn zwei Seiten einander gleich sind, gleichseitig, wenn alle drei Seiten einander gleich sind, rechtseitig, wenn eine Seite ein Quadrant ist, rechtwinkelig, wenn ein Winkel recht ist.



Zu dem sphärischen Dreieck ABC gehören 1) das Gegendreieck $A_1B_1C_1$, welches mit dem Dreieck der Reihe nach gleiche Winkel und Seiten hat; 2) 3 Nebendreiecke ABC_1, BCA_1, CAB_1, welche mit dem Dreieck der Reihe nach eine Seite und den gegenüberliegenden Winkel gleich haben, während die übrigen Seiten und Winkel supplementär sind; 3) 3 Scheiteldreiecke A_1B_1C, B_1C_1A, C_1A_1B, die Gegendreiecke der Nebendreiecke.

Unter einem sphärischen Polygon versteht man die von Bogen der Hauptkreise eingeschlossene Figur, welche mehr der Reihe nach gegebene Punkte der Kugel, den ersten mit dem zweiten, .., den letzten mit dem ersten, verbinden. Die Ausdrücke Seiten, Winkel, Fläche, Diagonalen werden in der Sphärik wie in der Planimetrie gebraucht, mit dem Unterschiede, daß Hauptkreise, Kugel an die Stelle von Geraden, Ebene treten. Zu jeder sphärischen Figur gehört deren Gegenfigur, die Figur der Gegenpunkte der gegebenen Figur. Es giebt sphärische Figuren, welche mit ihren Gegenfiguren zusammenfallen, z. B. ein Hauptkreis ist seine eigene Gegenfigur.

4. Ein sphärisches Dreieck und sein Gegendreieck sind im allgemeinen nicht kongruent, und nur dann kongruent, wenn das Dreieck gleichschenkelig ist. Eine sphärische Figur ist mit ihrer Gegenfigur gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes (Planim. §. 7, 1); beide haben nicht nur der Reihe nach gleiche Seiten und Winkel, sondern auch gleiche Flächen.**)

*) Unter Bogen schlechthin werden in der Sphärik Bogen von Hauptkreisen verstanden. Die Benennung sphärisches Dreieck kommt noch nicht bei Theodosius, wohl aber bei Menelaus vor.

**) Es ist den alten Geometern nicht entgangen, daß mit der Gleichheit und

Beweis. Legt man den Winkel C des Dreiecks ABC auf den Winkel C_1 des Gegendreiecks $A_1B_1C_1$, so fallen die Bogen CA, CB längs der Bogen C_1B_1, C_1A_1; aber es fällt weder A auf B_1, noch B auf A_1, außer wenn $CA = C_1B_1 = CB$ ist. Einem Betrachter, der auf der Außenseite der Kugel die sich entsprechenden Seiten AB, A_1B_1 der Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ zurücklegt, liegt C zur Linken, C_1 zur Rechten.

Wenn O das Centrum der Kugel, P die Normalprojektion von O auf die Ebene ABC ist, und die Gerade OP die Kugel in D und D_1 schneidet, so sind die planen Dreiecke OPA, OPB, OPC gleich und ähnlich, mithin sowohl die Winkel POA, POB, POC, als auch die Bogen DA, DB, DC gleich. Die gleichschenkeligen sphärischen Dreiecke DAB, DBC, DCA haben aber mit ihren Gegendreiecken $D_1A_1B_1$, $D_1B_1C_1$, $D_1C_1A_1$ der Reihe nach gleiche Flächen, also sind auch die Flächen ABC und $A_1B_1C_1$ einander gleich. Vergl. Planim. §. 9, 9.

5. Wenn in einem sphärischen Dreieck die Seiten und Winkel einzeln weniger als 180^0 betragen, so ist die Summe seiner Winkel größer als 180^0, die Differenz zwischen dieser Summe und 180^0 heißt der Exceß des sphärischen Dreiecks. Die Fläche des sphärischen Dreiecks ist der Fläche eines zweirechtwinkeligen sphärischen Dreiecks gleich, dessen dritter Winkel der Exceß des gegebenen sphärischen Dreiecks ist.*)

Beweis. Die Summe der sphärischen Winkel (2) ABA_1C, BCB_1A, $CA_1C_1B_1$ übertrifft die von dem Hauptkreis ABA_1B_1 eingeschlossene Halbkugel, auf welcher der Punkt C liegt, um die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$. Also beträgt die Summe der Winkel $BAC + CBA + ACB$ mehr als 180^0. Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$

Ähnlichkeit von Raumfiguren deren Kongruenz nicht notwendig verbunden ist. Vergl. Eucl. XI, 26. Archim. Conoid. et Sph. 20. Die später bisweilen übersehene Inkongruenz eines sphärischen Dreiecks und seines Gegendreiecks wurde unter den Neuern bestimmt ausgesprochen von Segner 1741. Vergl. Klügel math. W. 4 p. 859. Den obigen Beweis für die Gleichheit jener inkongruenten Flächen hat Legendre von einem ungenannten ausländischen Mathematiker erhalten und in den Elém. de géom. VII, 21 (2te Ausg. 1800) mitgeteilt. Inkongruente gleiche und ähnliche Raumfiguren werden häufig nach Legendre (Géom. VI, déf. 16) symmetrisch genannt.

*) Dieser Satz ist durch Girard (Invention nouvelle en algèbre 1629) bekannt geworden, der ihn aber unvollkommen bewiesen hat. Mit dem obigen einfachen Beweis wurde derselbe Satz von Cavalieri 1632 (Directorium generale uranometricum c. 8 p. 315) mitgeteilt. Die Regel für die Berechnung der Fläche eines sphärischen Polygons wird von Broscius apologia Aristot. et Eucl. 1690 p. 78 „ex antiquis in Vitellonem notis“ angeführt. Diese Hinweisung sowie die Notiz desselben Autors p. 79: demonstratio amplitudinis anguli solidi refertur ab H. Briggio ad Th. Harriotum — ermangeln bis jetzt der weitern Bestätigung.

haben gleiche Flächen (4), folglich ist die doppelte Fläche ABC die Differenz zwischen der Summe der genannten drei sphärischen Winkel und einer Halbkugel, d. i. ein sphärischer Winkel, dessen Schenkel im Scheitel um den Exceß $BAC + CBA + ACB - 180^0$ von einander abweichen.

Der Hauptkreis, welcher die Schenkel eines sphärischen Winkels halbiert, teilt den sphärischen Winkel in zwei gleichschenkelige sphärische Dreiecke mit einer gemeinschaftlichen Basis, an welcher rechte Winkel liegen (§. 2, 1 und 4). Die gleichschenkeligen Dreiecke sind kongruent, folglich ist jedes von ihnen halb so groß als der sphärische Winkel. Also ist die Fläche eines sphärischen Dreiecks der Fläche eines zweirechtwinkeligen sphärischen Dreiecks gleich, dessen dritter Winkel der Exceß des gegebenen sphärischen Dreiecks ist.

Anmerkung. Wenn sphärische Dreiecke verschiedener Kugeln gleiche Flächen haben, so hat das Dreieck der größern Kugel den kleinern Exceß. Auf einer unendlich großen Kugel kann ein sphärisches Dreieck einen endlichen Exceß nicht haben, die Exceße aller sphärischen Dreiecke verschwinden. Aber nur unter der der gemeinen Geometrie zu Grunde liegenden Voraussetzung (Planim. §. 2, 7) ist ein unendlich großer Hauptkreis gerade und eine unendlich große Kugel plan.

Als Einheit der sphärischen Flächen wird das zweirechtwinkelige sphärische Dreieck genommen, dessen dritter Winkel eine Einheit der Winkel ist und den Arcus 1 hat. Wenn man nun, wie gewöhnlich, unter der Fläche ihr Verhältnis zur sphärischen Flächeneinheit, unter dem Winkel seinen Arcus versteht, so ist die Fläche des sphärischen Dreiecks seinem Exceß gleich.

Hiernach ist ein sphärischer Winkel doppelt so groß als der Winkel, unter welchem die ihn einschließenden Hauptkreise sich schneiden. Für die Fläche eines sphärischen Polygons von n Seiten findet man (mit Rücksicht auf Planim. §. 9, 10) die Summe seiner Winkel vermindert um $(n-2).180^0$.

Wenn zwei sphärische Dreiecke gleiche Summen ihrer Winkel haben, so haben sie gleiche Flächen. Wenn zwei sphärische Polygone gleiche Summen ihrer Winkel haben, so sind ihre Flächen gleich oder sie unterscheiden sich um eine ganze Anzahl von Viertelkugeln.

6. Die Hauptkreise, welche einen gegebenen Hauptkreis normal schneiden, gehn durch einen Punkt (und dessen Gegenpunkt), den Pol (und Gegenpol) des Hauptkreises. Die Bogen, welche die Punkte des Hauptkreises mit seinem Pole verbinden, sind Quadranten.

Die Quadranten, welche von einem Punkte der Kugel ausgehn, endigen auf einem Hauptkreis, der Polare des Punktes (und des Gegenpunktes). Die durch den Punkt gehenden Hauptkreise schneiden die Polare des Punktes normal.*)

Beweis. Die Ebenen, welche zur Ebene des Hauptkreises normal sind und das Centrum der Kugel gemein haben, schneiden sich in einer Normale der Ebene des Hauptkreises (§. 2, 4).

Die Geraden, welche zu einem Radius der Kugel normal sind und das Centrum gemein haben, liegen auf einer Ebene (§. 2, 2), die normal steht zu jenem Radius und zu den denselben Radius enthaltenden Ebenen.

Man findet den Pol eines Hauptkreises, indem man in einem beliebigen Punkt desselben einen normalen Hauptkreis zieht und auf demselben von jenem Punkt aus einen Quadranten abschneidet. Man findet die Polare eines Punktes, indem man von demselben aus einen beliebigen Quadranten zieht und normal zu ihm durch seinen Endpunkt einen normalen Hauptkreis legt. Wenn ein Punkt der Pol eines Hauptkreises ist, so ist der Hauptkreis die Polare des Punktes. Wenn Hauptkreise durch einen Punkt gehn, so liegen ihre Pole auf einem Hauptkreis, der Polare des Punktes; wenn Punkte auf einem Hauptkreis liegen, so gehn ihre Polaren durch einen Punkt, den Pol des Hauptkreises.

7. Der Bogen eines Hauptkreises ist durch seinen Anfangspunkt und Endpunkt unzweideutig bestimmt, wenn der Sinn gegeben ist, in welchem der Hauptkreis von dem Anfangspunkt bis zum Endpunkt durchlaufen werden soll (Planim. §. 4, 6). Während man außen auf der konvexen Seite der Kugel den Hauptkreis in dem vorgeschriebenen Sinne zurücklegt, behält man einen seiner Pole (Pol und Gegenpol) zur Linken, den andern zur Rechten; unter dem Pol des Hauptkreises soll der zur Linken liegende verstanden werden, wenn die Winkel auf der Kugel durch linksum gehende Drehungen beschrieben werden. Demgemäß wird die Polare eines Punktes in solchem Sinne durchlaufen, daß der Punkt der zur Linken liegende Pol seiner Polare ist.**) Unter diesen Voraussetzungen gilt folgender Satz:

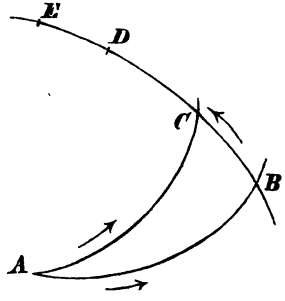
---

*) Theodos. Sph. I. Vergl. die Anmerkung zu §. 1, 9. Der Ausdruck „Pol eines Kreises" kommt früher z. B. bei Archimedes vor (Kugel und Cylinder II), und bedeutet das sphärische Centrum des Kreises. S. unten 12.

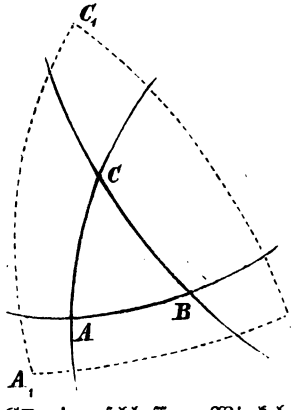
**) Auf diese wichtige Unterscheidung hat Gauß 1827 (Disquis. generales circa superficies curvas 2, VI) aufmerksam gemacht. Vergl. Schulz Sphärik I, 12. und Mobius anal. Sphärik 16 und 18.

Der von zwei Hauptkreisen eingeschlossene Winkel ist dem von ihren Polen eingeschlossenen Bogen gleich, dessen Pol der Scheitel des Winkels ist. Der von zwei Punkten eingeschlossene Bogen ist dem von ihren Polaren eingeschlossenen Winkel gleich, dessen Scheitel der Pol des Bogens ist, — wobei um der Kürze willen Bogen statt des zu ihm gehörigen Centriwinkels gesetzt ist.

Beweis. Werden die durch A gehenden Hauptkreise von der Polare des Punktes A in B und C geschnitten, so daß die Schenkel des in Betracht kommenden Winkels AB und AC je einen Quadranten betragen, so ist der Bogen BC unzweideutig bestimmt, der zu ihm gehörige Centriwinkel ist ein Normalschnitt des von den Ebenen der Hauptkreise eingeschlossenen Flächenwinkels (§. 2, 5) und dem Winkel der Hauptkreise gleich (2). Werden nun auf der Polare von A in dem bestimmten Sinne die Quadranten BD und CE abgeschnitten, so sind D und E die Pole von AB und AC, und man hat $BE - BD = BE - CE$, $DE = BC$.



8. Zu einem sphärischen Dreieck ABC gehört ein Polardreieck (Supplementardreieck) $A'B'C'$, dergestalt, daß nicht nur die Punkte A', B', C' die Pole der Seiten BC, CA, AB, sondern auch die Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ die Polaren der Punkte A, B, C sind, mithin ABC wiederum das zu $A'B'C'$ gehörige Polardreieck ist.*) Ist A' der Pol von BC, B' der Pol von CA, so betragen die Bogen CA', CB' je einen oder drei Quadranten, und der Bogen $A'B'$ kann in solchem Sinne beschrieben werden, daß C sein Pol ist, u. s. w.



Die Winkel eines Dreiecks sind der Reihe nach Supplemente der Seiten des Polardreiecks. Denn der von CA und CB eingeschlossene Winkel ist dem von ihren Polen B' und A'' eingeschlossenen Bogen gleich (7). Nun ist A'' der Gegenpunkt von A', also $A'B' + B'A'' = 180^0$, folglich u. s. w.

*) Vergl. die Anmerkung zu §. 1, 9. Polardreiecke werden deshalb auch reciproke Dreiecke genannt. Gudermann nied. Sphärik 20.

Die Fläche des Dreiecks und der Perimeter des Polardreiecks ergänzen sich zu 360^0. Haben die Winkel des Dreiecks α, β, γ, die Seiten des Polardreiecks a', b', c' Grad, so ist

$$\alpha + a' = 180^0, \quad \beta + b' = 180^0, \quad \gamma + c' = 180^0$$
$$(\alpha + \beta + \gamma - 180^0) = (a' + b' + c') = 360^0$$

wovon das erste Glied die Fläche des Dreiecks, das andere den Perimeter des Polardreiecks bedeutet (5).

9. Zu jeder sphärischen Figur gehört eine Polarfigur, deren Punkte der Reihe nach die Pole der Seiten der Figur sind, und deren Seiten der Reihe nach die Polaren der Punkte der Figur sind. Wenn der Perimeter der Figur nicht aus Bogen von Hauptkreisen besteht, so sind ihre Seiten als verschwindend klein und mit berührenden Hauptkreisen zusammenfallend zu betrachten, deren Pole auf dem Perimeter der Polarfigur liegen. Eine sphärische Figur ist die Polarfigur ihrer Polarfigur.

Durch Zusammensetzung der Figur aus Dreiecken findet man, daß die Fläche der sphärischen Figur und der Perimeter ihrer Polarfigur zu 360^0 sich ergänzen (8). Aus der Quadratur der Figur wird die Rektifikation der Polarfigur gefunden, und umgekehrt.

Jede Eigenschaft einer sphärischen Figur kann auch als Eigenschaft ihrer Polarfigur betrachtet werden, und giebt vermöge des Zusammenhangs beider Figuren eine zugeordnete Eigenschaft der ursprünglichen Figur zu erkennen. In dem Ausdruck der zugeordneten Eigenschaft stehn Hauptkreise an der Stelle von Punkten, Seiten an der Stelle von Winkeln, Perimeter an der Stelle von Flächen, und umgekehrt. Die Eigenschaften der sphärischen Figuren sind dual.*)

10. Unter den Eigenschaften des gemeinen sphärischen Dreiecks, dessen Seiten und Winkel einzeln 180^0 nicht erreichen, sind zu erwähnen (Menelaus Sph. I):

I. Die Summe der Winkel ist größer als 180^0. Die Summe der Seiten ist kleiner als 360^0.

Beweis. Der Exceß des sphärischen Dreiecks ist oben (5) nachgewiesen worden. Der Perimeter des Dreiecks wird durch den Exceß des Polardreiecks zu 360^0 ergänzt (8).

II. Ein Außenwinkel ist größer als die Differenz, kleiner als die Summe der beiden Winkel, welche nicht neben ihm liegen. Eine Seite

*) Die Polarfigur und die Beziehung ihres Perimeters zur Fläche der Figur findet man erwähnt bei Schulz Sphärik I p. 21 und II p. 241. Über die Dualität (§. 1, 9) vergl. Gergonne Ann. 15 p. 302.

ist größer als die Differenz, kleiner als die Summe der beiden andern Seiten.*)

Beweis. Haben im Dreieck ABC die Winkel und die gegenüberliegenden Seiten der Reihe nach $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ Grad, so ist im Nebendreieck A_1BC (I)

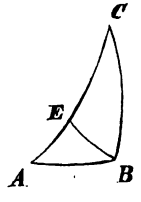
$$\alpha + 180^0 - \beta + 180^0 - \gamma > 180^0$$
$$a + 180^0 - b + 180^0 - c < 360^0$$

d. h. $180^0 - \gamma > \beta - \alpha$, $a - b < c$, u. s. w. Im Dreieck ABC hat man $\alpha + \beta > 180^0 - \gamma$.

Anmerkung. Der kleinere Bogen eines Hauptkreises ist kürzer als eine andere Linie, die auf der Kugel zwischen denselben Endpunkten enthalten ist, und giebt den sphärischen Abstand seiner Endpunkte an. Denn AB ist kürzer als die aus Bogen von Hauptkreisen bestehenden Linien $BC + CA$, $BC + CD + DA$, ..; also ist AB kürzer, als eine Linie, die aus unendlich viel unendlich kleinen Bogen von Hauptkreisen bestehend mit irgend einer sphärischen Kurve zwischen A und B zusammenfällt. Die auf einer Fläche zwei Punkte verbindende kürzeste Linie wird seit Anfang des 19ten Jhdts. eine geodätische Linie (géodésique) genannt.

III. Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber; dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber. Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber; der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

Beweis. Wenn im Dreieck ABC die Winkel A und B einander gleich sind, so deckt das Dreieck ABC sein Gegendreieck $A_1B_1C_1$, wenn man A mit B_1, B mit A_1 vereint. Also ist die Seite $BC = A_1C_1 = AC$.



Wenn aber der Winkel $CBA > BAC$, so macht man den Winkel $EBA = BAC$, und erhält $EB = EA$. Nun ist $CE + EB > BC$ (II), folglich $CA > BC$.

Wenn das Dreieck zwei gleiche Winkel hat, so hat sein Polardreieck zwei gleiche Seiten, u. s. w.

Anmerkung. Die Summe von zwei Winkeln ist zugleich mit der Summe der gegenüberliegenden Seiten kleiner, oder so groß, oder größer als 180^0. Wenn z. B. die Summe der Winkel $ACB + BAC < 180^0$, so ist in dem Nebendreieck CBA_1 der Winkel $CA_1B < BCA_1$, folglich die Seite $BC < BA_1$, d. h. $AB + BC < 180^0$.

*) Gewöhnlich wird dieser Satz vorangestellt und nach Eucl. XI, 20 aus Betrachtungen abgeleitet, welche der Sphärik fremd sind.

11. I. Wenn zwei sphärische Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich. Wenn zwei sphärische Dreiecke zwei Winkel und die daranliegende Seite der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich.

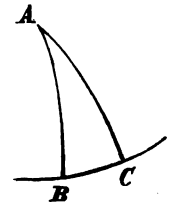
II. Wenn zwei sphärische Dreiecke die drei Seiten der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich. Wenn zwei sphärische Dreiecke die drei Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich.

Beweis. Unter den gegebenen Bedingungen sind die Dreiecke kongruent, wenn sie eines Sinnes sind; dagegen kann das eine Dreieck das zu dem andern gehörige Gegendreieck decken, wenn die Dreiecke entgegengesetzten Sinnes sind. Der zweite Satz wird auf den ersten zurückgeführt. Vergl. Planim. §. 5, 2. Die Zusätze werden durch Anwendung der Sätze auf die zu den Dreiecken gehörigen Polardreiecke abgeleitet.

III. Wenn in einem sphärischen Dreieck zwei Seiten unverändert bleiben und der eingeschlossene Winkel wächst, so wächst auch die ihm gegenüberliegende Seite. Wenn in einem sphärischen Dreieck zwei Winkel unverändert bleiben und die anliegende Seite wächst, so wächst auch der ihr gegenüberliegende Winkel.

Beweis. Wie Planim. §. 5, 5. Der Zusatz folgt aus der Betrachtung des Polardreiecks.

IV. Wenn in dem sphärischen Dreieck ABC der Winkel B recht, die eine Kathete AB spitz ist und unverändert bleibt, während die andere Kathete BC von 0 bis 90^0 und dann von 90^0 bis 180^0 wächst, so wächst die Hypotenuse AC von AB bis 90^0 und dann von 90^0 bis $180^0 - AB$, der der unveränderlichen Kathete gegenüberliegende Winkel C fällt von 90^0 bis AB und steigt dann wieder bis 90^0. Wenn in dem sphärischen Dreieck ABC die Seite AC recht, der eine anliegende Winkel C spitz ist und unverändert bleibt, während der andere anliegende Winkel A von 0 bis 90^0 und dann von 90^0 bis 180^0 wächst, so fällt der der rechten Seite gegenüberliegende Winkel B von $180^0 - C$ bis 90^0 und dann von 90^0 bis C, die dem unveränderlichen Winkel gegenüberliegende Seite AB fällt von 90^0 bis C und steigt dann wieder von C bis 90^0.

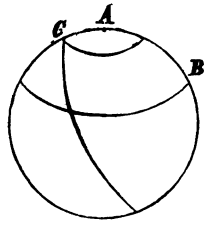


Beweis. Durch Betrachtung der zu den Bogen gehörigen Centriwinkel nach §. 2, 10. Der Zusatz wird aus dem Polardreieck des Dreiecks $A_1B_1C_1$ abgeleitet.

Anmerkung. Wenn zwei sphärische Dreiecke einen rechten Winkel, die Hypotenuse und eine Kathete, oder eine rechte Seite, den gegenüberliegenden und einen anliegenden Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich.

Unter den Bogen, welche von einem Punkte an einen Hauptkreis reichen, ist der spitze und normale der kürzeste und giebt den sphärischen Abstand des Punktes vom Hauptkreis an. Der sphärische Abstand eines Punktes von einem Hauptkreis ist das Komplement seines sphärischen Abstands von dem Pol des Hauptkreises.

12. Der Pol A des Hauptkreises, dessen Ebene mit der Ebene eines Kreises der Kugel parallel ist, hat von allen Punkten des Kreises gleiche sphärische Abstände (vergl. §. 2, 7), und heißt das sphärische Centrum des Kreises. Die gleichen Bogen, welche das sphärische Centrum mit Punkten des Kreises verbinden, heißen sphärische Radien des Kreises. Ein Hauptkreis, der durch einen Punkt des Kreises normal zu dem sphärischen Radius des Punktes geht, und dessen sphärischer Abstand vom sphärischen Centrum ein sphärischer Radius ist, ist eine sphärische Tangente des Kreises (vergl. Planim. §. 3, 5). Der sphärische Abstand des Pols einer sphärischen Tangente des Kreises von dem sphärischen Centrum ergänzt den sphärischen Radius zu einem Quadranten. Wenn B der Pol des Hauptkreises ist, der einen um A beschriebenen Kreis in C berührt, so ist $CA + AB = CB = 90^0$.



Die Punkte, welche von einem gegebenen Punkt der Kugel, mithin auch von der Polare des Punktes gleiche Abstände haben, liegen auf einem Kreis, dessen sphärisches Centrum der gegebene Punkt ist. Die Polaren der Kreispunkte haben von dem sphärischen Centrum gleiche sphärische Abstände und bilden mit der Polare des sphärischen Centrum gleiche Winkel (7); daher berühren sie einen concentrischen (parallelen) Kreis, die Polarfigur des gegebenen Kreises. Die sphärischen Radien dieser Kreise ergänzen sich zu 90^0.*)

Insbesondere hat der einem sphärischen Dreieck umgeschriebene Kreis den dem Polardreieck eingeschriebenen Kreis zur Polarfigur. Diese Kreise sind concentrisch (parallel), ihre sphärischen Radien

*) Schulz Sphärik I, 44. Der in der Geographie sogenannte Polarkreis ist die Polarfigur des auf derselben Hemisphäre liegenden Wendekreises. Der mit dem Äquator parallele Kreis, dessen Breite 45^0 beträgt, fällt mit seinem Polarkreis zusammen.

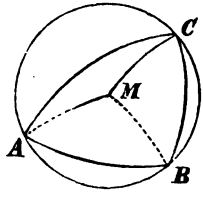
ergänzen sich zu 90^0. Die Polaren der sphärischen Centren der Kreise, von denen einer dem sphärischen Dreieck umgeschrieben, der andere demselben eingeschrieben ist, sind mit den Kreisen der Reihe nach parallel; also ist der Flächenwinkel der Ebenen dieser Kreise dem sphärischen Abstand ihrer sphärischen Centren gleich.

Anmerkung. Eine sphärische Sehne des Kreises und der Winkel, welchen die den Polarkreis berührenden Polaren der Endpunkte der Sehne bilden, ergänzen sich zu 180^0 (8). Die größte sphärische Sehne ist ein sphärischer Diameter des Kreises; den kleinsten Winkel schließen die sphärischen Tangenten an den Endpunkten eines sphärischen Diameters ein. In dem sphärischen Dreieck, welches von einer sphärischen Sehne mit den sphärischen Tangenten an den Endpunkten der Sehne gebildet wird, ist die Summe der beiden Tangenten 180^0 oder mehr oder weniger, je nachdem der eingeschlossene Kreisbogen ein Halbkreis ist oder mehr oder weniger (10, III. Anm.).

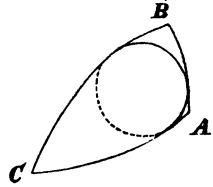
13. Wenn die Spitze C des sphärischen Dreiecks ABC auf dem umgeschriebenen Kreise ABC sich bewegt, so bleibt die Winkeldifferenz $BAC + CBA - ACB$ unverändert. Bezeichnet man durch M das sphärische Centrum, so ist die Winkeldifferenz

$$= CBM + MBA + BAM + MAC - ACM - MCB = 2BAM$$

Dieser Wert hängt nur von der Lage des sphärischen Centrum in Bezug auf die Basis AB ab, und verschwindet, wenn AB ein sphärischer Diameter des Kreises ABC ist. Vergl. Planim. §. 4, 3.



Wenn die Basis AB des sphärischen Dreiecks ABC sich so bewegt, daß sie den dem Dreieck eingeschriebenen Kreis nicht aufhört zu berühren, so bleibt die Seitendifferenz $BC + CA - AB$ unverändert. Dies erkennt man durch Betrachtung des Polardreiecks, oder direkt auf demselben Wege, der zu dem entsprechenden planimetrischen Satze führt (Planim. §. 4, 9). Die unveränderliche Seitendifferenz ist der doppelten sphärischen Tangente gleich, welche von C bis an den Kreis sich erstreckt; sie beträgt 180^0, wenn der zwischen BC und CA von AB berührte Kreisbogen ein Halbkreis ist (12, Anm.).



Umgekehrt schließt man: Die Spitzen der sphärischen Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Basis und zwischen der Summe der Winkel an der Basis und dem Winkel an der Spitze dieselbe Differenz haben, liegen auf einem bestimmten Kreise, welcher der gemein-

schaftlichen Basis umgeschrieben ist. Die Basen der sphärischen Dreiecke, welche den Winkel an der Spitze gemein und zwischen der Summe der Seiten an der Spitze und der Basis dieselbe Differenz haben, berühren einschließend einen bestimmten Kreis, der dem Winkel an der Spitze eingeschrieben ist. Wenn die Winkeldifferenz

$$BAC + CBA - ACB = BAD + DBA - ADB$$

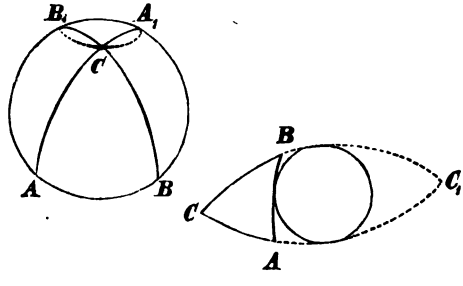
ist, und durch M, N die sphärischen Centren der Kreise ABC, ABD bezeichnet werden, so ist $2BAM = 2BAN$, folglich u. s. w. Vergl. auch 10, II.

Die Spitzen der sphärischen Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Basis und gleiche Winkelsummen, mithin gleiche Flächen haben (5), liegen auf einem bestimmten Kreise (dem Lexellschen Kreise), der durch die Gegenpunkte der Endpunkte der Basis geht.*) Die Basen der sphärischen Dreiecke, welche den Winkel an der Spitze gemein und gleiche Perimeter haben, berühren ausschließend einen bestimmten Kreis, der dem gemeinschaftlichen Winkel eingeschrieben ist. Denn in den Scheiteldreiecken ABC, A_1B_1C hat man

$$CBA + BAC + ACB - 180^0 = 180^0 - (CB_1A_1 + B_1A_1C - A_1CB_1)$$

und in den Nebendreiecken ABC, ABC_1

$$BC + CA + AB = 360^0 - (AC_1 + C_1B - AB).$$



Aus den Voraussetzungen schließt man, daß in dem einen Falle $B_1A_1C + CB_1A_1 - A_1CB_1$, in dem andern $AC_1 + C_1B - AB$ von unveränderlicher Größe ist, folglich u. s. w.

Wenn die Spitze C auf dem Lexellschen Kreise CA_1B_1 mit A_1 zusammenfällt, so wird der Bogen AC zur sphärischen Tangente dieses Kreises in A_1 (Planim. §. 3, 5). Also ist die Fläche des sphärischen Dreiecks ABC dem doppelten Winkel (5, Anm.) gleich, welchen der Lexellsche Kreis CA_1B_1 mit der Basis AB in A_1 bildet. Wenn die Basis AB, welche einen dem Winkel C' eingeschriebenen Kreis ausschließend berührt, mit

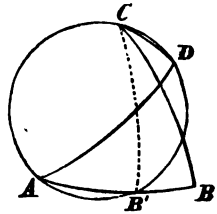
*) Dieser Satz ist von Lexell entdeckt und sowohl durch Rechnung als auch durch Konstruktion bewiesen worden: Acta Petrop. 1781, I p. 112 (nicht Nova Acta, wie durchgängig nach Legendre Géom. Note X citiert wird). Einen direkten Beweis desselben Satzes hat Euler gegeben. Vergl. unten 16. Der zugeordnete Satz ist von Sorlin (Gerg. Ann. 15 p. 302) gegeben worden.

der sphärischen Tangente CB desselben Kreises zusammenfällt, so wird B ein Punkt dieses Kreises. Also ist der Perimeter des sphärischen Dreiecks ABC gleich der doppelten sphärischen Tangente aus C an diesen Kreis.

Mit Hilfe von Lexellschen Kreisen kann man sphärische Dreiecke konstruieren, die gegebene Flächen oder gegebene Perimeter haben; man kann ein sphärisches Polygon von n Seiten in ein sphärisches Polygon von $n-1$ Seiten und von gleicher Fläche oder von gleichem Perimeter verwandeln, u. s. w.*)

14. Wenn ein sphärisches Viereck einem Kreise eingeschrieben ist, so ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln der Summe der beiden andern Winkel gleich. Wenn ein sphärisches Viereck einem Kreise umgeschrieben ist, so ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Seiten der Summe der beiden andern Seiten gleich. Dabei sind solche Seiten, in Bezug auf welche der Kreis konträre Lage hat, mit konträren Zeichen zu nehmen.**) Beweis und Erweiterung wie Planim. §. 4, 4 und 10.

Umgekehrt schließt man: Wenn in einem sphärischen Viereck die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln der Summe der beiden andern Winkel gleich ist, so ist das Viereck einem Kreis eingeschrieben. Wenn in einem sphärischen Viereck die Summe von zwei Seiten der Summe der beiden andern Seiten gleich ist, so ist das Viereck einem Kreis umgeschrieben. Liegt z. B. B außer dem Kreis ACD, und wird AB von dem Kreis in B' geschnitten, so ist die Summe der Winkel $CB'A+ADC = DCB'+B'AD$, $CBA-B'CB < CB'A$ (10, II), daher $CBA+ADC < CB'A+ADC+B'CB$ oder $DCB+BAD$. Übrigens gelten die in der Planimetrie a. a. O. angewandten Schlüsse.



15. Die Hauptkreise, welche die Seiten eines sphärischen Dreiecks normal halbieren, gehn durch einen Punkt, das sphärische Centrum des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises. Die Hauptkreise, welche die Winkel eines sphärischen Dreiecks halbieren, gehn durch einen Punkt, das sphärische Centrum des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises. Wie Planim. §. 6, 7 und 8.

*) Steiner, Verwandlung und Teilung sphärischer Figuren durch Konstruktion (Crelle J. 2 p. 45). Vergl. Gudermann nied. Sphärik 97 ff.

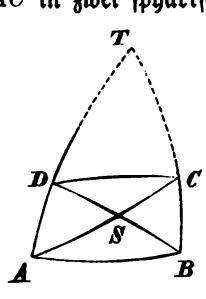
**) Lexell Acta Petrop. 1782, I p. 90 und 100. Vergl. Germ. Ann. 12 p. 279 und 6 p. 49. Schulz Sphärik I, 75 f.

Die Hauptkreise, welche durch die Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks normal zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, gehn durch einen Punkt.*) Wie Planim. §. 6, 9.

Oder: Die Bogen, welche die Spitzen eines sphärischen Dreiecks mit den Polen der gegenüberliegenden Seiten verbinden, gehn durch einen Punkt. Die Punkte, in welchen die Seiten eines sphärischen Dreiecks von den Polaren der gegenüberliegenden Eckpunkte geschnitten werden, liegen auf einem Hauptkreis, der Polare des vorhin erwähnten Punktes.**)

Oder: Wenn in einem sphärischen Viereck die gegenüberliegenden Seiten normal zu einander sind, so sind auch die Diagonalen normal zu einander. Wenn in einem sphärischen Viereck die Diagonalen je 90^0 betragen, so beträgt auch der sphärische Abstand der Punkte, in welchen die gegenüberliegenden Seiten sich schneiden, 90^0.***)

16. Ein sphärisches Viereck $ABCD$, welches durch eine Diagonale AC in zwei sphärische Dreiecke geteilt wird, die nicht nur gleich und ähnlich, sondern auch kongruent sind, ist ein sphärisches Parallelogramm.†) Die Diagonalen desselben halbieren einander in dem sphärischen Centrum S des Parallelogramms.



Die Polarfigur eines sphärischen Parallelogramms ist ein concentrisches sphärisches Parallelogramm. Denn der Hauptkreis, welcher durch das sphärische Centrum S geht und AB normal schneidet, ist auch zu CD normal, und der Punkt S hat von AB und CD gleiche sphärische Abstände. Diese Abstände ergänzen die sphärischen Abstände des Punktes S von den Polen E, G der Seiten AB und CD zu 90^0, folglich liegen E und G auf einem durch S gehenden Hauptkreise so, daß $ES = SG$. Ebenso liegen die Pole F, H der Seiten BC, DA auf einem durch S gehenden Hauptkreise so, daß $FS = SH$. Daher ist $EFGH$ ein sphärisches Parallelogramm und concentrisch mit $ABCD$.

Wenn zwei folgende Winkel eines sphärischen Parallelogramms

---

*) Dieser Satz ist von Querret Gerg. Ann. 15 p. 87 und Schulz Sphärik II, 47 durch Rechnung bewiesen worden. Den konstruktiven Beweis hat Gudermann nied. Sphärik 68 gegeben. Vergl. unten §. 5, 3.

**) Bobillier Gerg. Ann. 18 p. 195. Gudermann nied. Sphärik 69.

***) Joachimsthal nach Lierſemanns Mitteilung in Grunert Archiv 32 p. 108.

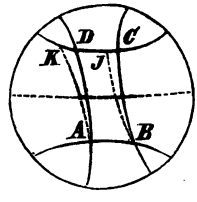
†) Euler Nov. Act. Petrop. X p. 57. Vergl. Schulz Sphärik I, 94 ff. Gudermann nied. Sphärik 78 ff.

gleich sind, so ist das sphärische Parallelogramm einem Kreis eingeschrieben; wenn zwei folgende Seiten gleich sind, so ist es einem Kreis umgeschrieben (14).

Die gegenüberliegenden Seiten BC und DA, AB und CD schneiden sich auf der Polare des sphärischen Centrum S. Bezeichnet man den Durchschnitt von BC und DA durch T, seinen Gegenpunkt durch T_1, so folgt aus der Kongruenz der sphärischen Dreiecke SCT und SAT_1, daß $ST = T_1S = 90^0$ ist.

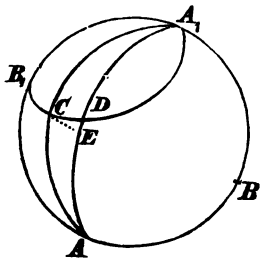
Zwei folgende Eckpunkte des sphärischen Parallelogramms und die Gegenpunkte der beiden andern liegen auf einem Kreis. Denn von dem Hauptkreis, welcher durch S geht und die Seiten BC, DA halbiert, haben die Punkte A, B einerseits, C, D andrerseits gleiche sphärische Abstände, also auch die Gegenpunkte C_1, D_1 einerseits, A_1, B_1 andrerseits. Daher liegen C, D, A_1, B_1 und A, B, C_1, D_1 auf je einem Kreise so, daß die beiden Kreise Gegenfiguren sind. Ebenso liegen B, C, D_1, A_1 und D, A, B_1, C_1 auf Gegenkreisen.

Überhaupt haben zwei Gegenkreise, deren Punkte von einem Hauptkreis (Äquator) beiderseits gleichweit abstehn, dieselben Eigenschaften wie in der Planimetrie zwei Linien, deren Punkte von einer Geraden beiderseits gleichweit abstehn. Wenn ein Hauptkreis einen Kreis schneidet, so schneidet er auch den Gegenkreis; der Bogen zwischen den beiden Durchschnittspunkten wird von dem Äquator halbiert, und der Hauptkreis bildet mit den Gegenkreisen in den Durchschnittspunkten gleiche Winkel (Gegenwinkel, Wechselwinkel). Wenn zwei Hauptkreise durch denselben Punkt des Äquators gehn, so schneiden sie die Gegenkreise in den Eckpunkten eines sphärischen Parallelogramms. Wenn A ein Punkt des Kreises, DK ein Bogen des Gegenkreises ist, so beträgt in dem von DK mit den Hauptkreisbogen KA, AD gebildeten Dreieck die Summe der Winkel soviel als die Summe der in dem Punkt A gebildeten Winkel d. i. 180^0. Wenn AB, CD gleiche Bogen der Gegenkreise, und BC, DA Hauptkreisbogen sind, so sind A, B, C, D Eckpunkte eines sphärischen Parallelogramms, und die Summe der Winkel in dem von den beiden Bogen der Gegenkreise und den beiden Bogen der Hauptkreise gebildeten Viereck beträgt 360^0. Wenn CD, JK gleiche Bogen desselben Kreises sind, so haben die Vierecke $ABCD$, $ABJK$ gleiche Flächen (Planim. §. 9, 2); folglich haben auch die sphärischen Dreiecke ABC, ABJ gleiche Flächen und denselben Exceß, nämlich den doppelten von dem Kreisbogen AB mit seiner sphärischen Sehne gebildeten Winkel. Vergl. 13.

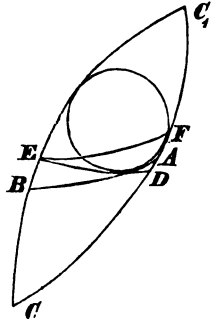


17. Unter den sphärischen Dreiecken, welche zwei gegebene Seiten CA, AB enthalten, deren Summe 180^0 nicht erreicht, hat dasjenige die größte Fläche, in welchem die nicht gegebene Seite BC der Diameter des umgeschriebenen Kreises ist.*) Unter den sphärischen Dreiecken, welche zwei gegebene Winkel enthalten, deren Summe 180^0 übersteigt, hat dasjenige den kleinsten Perimeter, in welchem der nicht gegebene Winkel dem Diameter des eingeschriebenen Kreises gleich ist.

Beweis. Man beschreibe durch die Gegenpunkte A_1, B_1 von A, B den Kreis, dessen sphärischer Diameter A_1C die Seite CA zu 180^0 ergänzt. Dazu ist erforderlich, daß $AB < 180^0 - CA$ oder $CA + AB < 180^0$ (12, Anm.). Liegt D auf dem Kreise B_1CA_1, so ist die Fläche $ABD = ABC$ (13). Ist nun EA auf dem Bogen DA so groß als CA, so ist $EA < DA$, weil $A_1E = A_1C > A_1D$, mithin ist die Fläche $ABE < ABD$, $ABE < ABC$. Dabei ist in dem sphärischen Dreieck ABC die Winkeldifferenz $B + C - A = -B_1 + C + A_1$. Weil aber A_1C ein sphärischer Diameter ist, so verschwindet $-B_1 + C + A_1$ (13), also verschwindet $B + C - A$, und BC ist ein sphärischer Diameter des Kreises ABC.



Um den Zusatz, welchen die Polarfigur liefert, direkt zu beweisen, beschreibe man in den gegebenen Winkel ACB den Kreis, dessen sphärischer Diameter den andern gegebenen Winkel zu 180^0 ergänzt. Dazu ist es erforderlich, daß ACB größer ist als der Nebenwinkel des andern gegebenen Winkels (12, Anm.), daß also die Summe der gegebenen Winkel mehr als 180^0 beträgt. Dann teilt man den sphärischen Winkel $ACBC_1$ in die Nebendreiecke ABC und ABC_1 so, daß die Seiten AB und BC_1 den eingeschriebenen Kreis an den Endpunkten eines Diameters berühren, mithin der Winkel ABC_1 dem sphärischen Diameter des eingeschriebenen Kreises, der Winkel CBA dem zweiten gegebenen Winkel gleich ist. Wird nun demselben Kreise das sphärische Dreieck C_1DE umgeschrieben, so haben ABC und DEC gleiche Perimeter (13), und der Winkel DEC_1 übertrifft den Winkel ABC_1 (12, Anm.). Macht man den Winkel

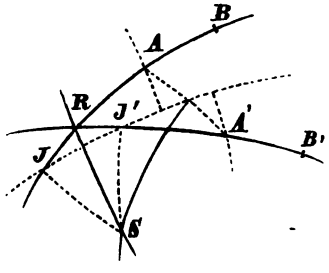


*) Legendre Géom. VII, 26. Vergl. Steiner Crelle J. 2 p. 63 und 24 p. 102. Der Zusatz war unbemerkt geblieben.

$FEC_1 = ABC_1$, so übertrifft der Perimeter des sphärischen Dreiecks CFE den Perimeter von CDE, also auch von ABC. Dabei ist $CA + AB - BC = -AC_1 + AB + C_1B$. Weil aber der Winkel ABC_1 einem sphärischen Diameter des dem sphärischen Dreieck ABC_1 eingeschriebenen Kreises gleich ist, so hat die Seitendifferenz $-AC_1 + AB + C_1B$ den Wert 180^0 (13), folglich hat $CA + AB - BC$ denselben Wert, und der Winkel BAC ist dem sphärischen Diameter des dem sphärischen Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises gleich.

Anmerkung. Hieraus folgt, daß die von planen Figuren bewiesenen isoperimetrischen Sätze (Planim. §. 15) auch für sphärische Figuren ihre Gültigkeit behalten.

18. Zu zwei gleichen Bogen AB, $A'B'$ giebt es auf der Kugel einen Punkt S, welcher mit AB und $A'B'$ kongruente sphärische Dreiecke bildet. Denn der Hauptkreis, welcher den Nebenwinkel des von AB und $A'B'$ eingeschlossenen Winkels halbiert, wird von dem Hauptkreis, welcher den Bogen AA' normal halbiert, in S so geschnitten, daß nicht nur die Bogen SA und SA', sondern auch die sphärischen Abstände SJ und SJ' des Punktes S von den Bogen AB und $A'B'$ gleich sind. Daher sind die sphärischen Dreiecke SJA und $SJ'A'$, SJB und $SJ'B'$, also auch SAB und $SA'B'$ kongruent. Zugleich ist der Winkel $ASA' = ASB + BSB' + B'SA' = BSB'$.



Demnach giebt es zu zwei kongruenten sphärischen Figuren $ABC..$ und $A'B'C'..$ einen sich selbst so entsprechenden Punkt S, daß $SABC..$ und $SA'B'C'..$ kongruent und die Winkel ASA', BSB', CSC', .. gleich sind. Wenn man die erste Figur um S dreht, bis SA den Winkel ASA' oder den Winkel $ASA' + 180^0$ zurückgelegt hat, so gelangt die Figur ABC zur Deckung von $A'B'C'..$, oder in solche Lage, daß $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$, .. concentrische sphärische Parallelogramme sind.*)

19. Zu zwei gleichen Bogen AB, $A'B'$ giebt es auf der Kugel einen Hauptkreis s, welcher mit AB und $A'B'$ entgegengesetzt gleiche Winkel bildet, von welchem A und A', B und B' entgegengesetzt gleiche sphärische Abstände haben, dessen Pol N seinem Gegenpunkt N_1

*) Der Hauptteil dieses Satzes ist von Euler (theoria motus corp. solid. 978 ff.) gegeben worden. Das Weitere enthält die Abhandlung des Verf. über Gleichheit und Ähnlichkeit 30 ff. Vergl. Planim. §. 7, 2 ff.

dergestalt entspricht, daß die sphärischen Dreiecke NAB und $N_1A'B'$ gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes sind. Wenn S, J, J' die vorige Bedeutung haben, und R den Durchschnitt der gleichen Bogen AB, $A'B'$ bezeichnet, so sind die sphärischen Dreiecke SRJ, SRJ' entgegengesetzt gleich und ähnlich. Daher ist $RJ = RJ'$ und JJ' bildet mit AB, $A'B'$ entgegengesetzt gleiche Winkel. Wenn nun N und N_1 die Pole von JJ' sind, so sind die sphärischen Dreiecke NJA und $N_1J'A'$, NJB und $N_1J'B'$, NAB und $N_1A'B'$ entgegengesetzt gleich und ähnlich. Daher haben A und A', B und B' entgegengesetzt gleiche sphärische Abstände von JJ', und die Winkel ANA', BNB', JNJ' sind gleich.

Demnach giebt es zu zwei entgegengesetzt gleichen und ähnlichen sphärischen Figuren $ABC..$ und $A'B'C'..$ einen Punkt N, der seinem Gegenpunkt N_1 so entspricht, daß $NABC..$ und $N_1A'B'C'..$ entgegengesetzt gleich und ähnlich, und die Winkel ANA', BNB', CNC', .. gleich sind. Wenn die erste Figur um N gedreht wird, bis NA den Winkel $ANA' + 180^0$ oder ANA' zurückgelegt hat, so fällt die Figur mit der Gegenfigur der andern zusammen, oder sie liegt mit ihr symmetrisch zur Polare von N, d. h. die Bogen AA', BB', .. werden von diesem Hauptkreis normal halbiert.

§. 5. Ecke, Prisma und die perspektivischen Figuren.

1. Eine Reihe von Winkeln, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, deren jeder mit dem folgenden, und deren letzter mit dem ersten einen Schenkel gemein hat, scheidet aus dem Raume um den gemeinschaftlichen Scheitel einen Raum ab, der eine **Ecke** (*γωνία στερεά* Eucl. XI def. 11, angulus solidus, Raumwinkel) genannt wird. Der gemeinschaftliche Scheitel heißt der **Scheitel** der Ecke (sommet, Spitze, Centrum), die gemeinschaftlichen Schenkel der folgenden Winkel heißen die **Kanten** der Ecke, die zwischen den folgenden Kanten enthaltenen Winkel heißen die **Seiten** oder **Flächen** der Ecke, die zwischen den folgenden Seiten enthaltenen Flächenwinkel heißen die **Winkel** der Ecke (vergl. §. 2, 5). Nach der Anzahl ihrer Seiten (oder Kanten) heißt die Ecke 3, 4, .. seitig (angle trièdre, tetraèdre, polyèdre). Ein Kegel kann als eine unendlichseitige Ecke betrachtet werden (§. 3, 1).

Parallele Eckenschnitte oder Kegelschnitte (ausgenommen die das Centrum enthaltenden) sind ähnliche Figuren. Werden von den parallelen Ebenen die Kanten in A und A', B und B', C und C', ..

geschnitten, so sind AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, .. parallel, und wegen der gleichen Winkel (§. 2, 5) die Dreiecke ABC und $A'B'C'$, ABD und $A'B'D'$, .. ähnlich, folglich die Figuren $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .. ähnlich (Planim. §. 12). Die Flächen der parallelen Schnitte verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Abstände vom Centrum S, weil $AB : A'B' = SA : SA'$ u. s. w.

2. Unter dem **Kugelschnitt** einer Ecke (eines Kegels) wird die sphärische Figur verstanden, welche die Ecke (der Kegel) mit einer concentrischen Kugel gemein hat, deren Radius eine Längeneinheit ist. Die Seiten der Ecke sind den Seiten dieser sphärischen Figur gleich, wenn man statt der Bogen von Hauptkreisen deren Centriwinkel setzt (§. 4, 7. Vergl. Planim. §. 13, 8); die Winkel der Ecke sind den Winkeln der sphärischen Figur gleich (§. 4, 2). Die Eigenschaften der Seiten und Winkel einer Ecke werden aus den Eigenschaften der Seiten und Winkel ihres Kugelschnitts erkannt. Wenn die Kugelschnitte von zwei Ecken kongruent sind, so sind auch die Ecken kongruent, also ist eine Ecke durch ihren Kugelschnitt bestimmt.

Zwei Ecken sind von gleicher Größe (amplitudo, apertura, capacitas), wenn ihre Kugelschnitte gleiche Flächen haben. Das Verhältnis einer Ecke zum ganzen Raum ist dem Verhältnis der Fläche ihres Kugelschnitts zur ganzen Kugel gleich; abgekürzt: die Größe einer Ecke ist die Fläche ihres Kugelschnitts.*)

Die Geraden, welche von den Punkten des Perimeters einer Flächenfigur nach dem Auge eines Betrachters derselben gehn, liegen auf den Seiten einer Ecke (eines Kegels), deren Größe (die Fläche ihres Kugelschnitts) die **scheinbare Größe der Flächenfigur** für den gegebenen Ort des Auges angiebt.

Zwei Ecken heißen isoperimetrisch, wenn ihre Kugelschnitte gleiche Perimeter haben. Unter allen isoperimetrischen Ecken hat der Rotationskegel die größte Amplitude; unter allen Ecken von gleicher Amplitude hat der Rotationskegel den kleinsten Perimeter des Kugelschnitts.**)

Zu jeder Ecke gehört die **Gegenecke** und die **Polarecke** derselben, bestimmt durch die Gegenfigur und die Polarfigur ihres Kugelschnitts (§. 4, 3 und 9).

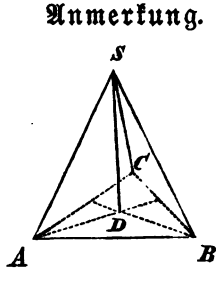
3. Drei Ebenen, die einen endlich fernen Punkt gemein haben, teilen den Raum in 8 dreiseitige Ecken. Zu einer dieser Ecken gehören außer ihrer Gegenecke 3 Nebenecken und deren Gegenecken (§. 4, 3).

*) Nach Cabasilas (Kommentar zum Almagest 1350) mitgeteilt von Vitello Opt. I, 87.

**) Descartes Oeuvr. inéd. II p. 218. Vergl. §. 4, 17. Anm.

Die Ebenen, welche die Seiten einer dreiseitigen Ecke normal halbieren, schneiden sich in einer Geraden, der Axe des der Ecke umgeschriebenen Rotationskegels. Die Ebenen, welche die Winkel einer dreiseitigen Ecke halbieren, schneiden sich in einer Geraden, der Axe des der Ecke eingeschriebenen Rotationskegels. Denn das sphärische Dreieck, welches der Kugelschnitt der Ecke ist, hat sowohl einen umgeschriebenen, als auch einen eingeschriebenen Kreis (§. 4, 15). Ebenso giebt es für die Nebenecken je einen umgeschriebenen und einen eingeschriebenen Rotationskegel. Vergl. §. 3, 10 und 11.

Die Ebenen, welche die Kanten einer dreiseitigen Ecke auf die gegenüberliegenden Seiten normal projicieren (§. 2, 6), schneiden sich in einer Geraden. Denn in dem sphärischen Dreieck, welches der Kugelschnitt der Ecke ist, gehn die Bogen, welche man aus den Eckpunkten normal zu den gegenüberliegenden Seiten zieht, durch einen Punkt (§. 4, 15).

Anmerkung. 

Um direkt zu beweisen, daß die Ebene *CSD* normal zur Ebene *ASB* ist, wenn *ASD* normal zu *BSC* und *BSD* normal zu *CSA*, schneide man die Kanten durch eine Ebene, die zu *SD* normal steht. Dann ist *ASD* normal zu *BC*, weil diese Ebene zu *BSC* und *ABC* normal ist (§. 2, 4); ebenso *BSD* normal zu *CA*. Daher ist die Gerade *AD* der Ebene *ASD* normal zu *BC* (§. 2, 1), und die Gerade *BD* der Ebene *BSD* normal zu *CA*, also aus planimetrischen Gründen *CD* normal zu *AB* (Planim. §. 6, 9). Weil aber auch *SD* normal zu *AB* ist, so steht die Ebene *CSD* normal zu *AB* und zu *ASB*.

4. Eine Reihe von Streifen, deren jeder mit dem folgenden, der letzte mit dem ersten einen Schenkel gemein hat, scheidet von dem Raum ein **Prisma***) ab. Die gemeinschaftlichen Schenkel der folgenden Streifen heißen die **Kanten**, die zwischen den folgenden Kanten enthaltenen Streifen heißen die **Seiten**, die zwischen den folgenden Seiten enthaltenen Flächenwinkel heißen die Winkel des Prisma. Nach der Anzahl seiner Seiten (oder Kanten) heißt das Prisma 3, 4, ..

*) Der von $\pi\varrho\iota\omega$ (säge) abgeleitete Name $\pi\varrho\tilde{\iota}\sigma\mu\alpha$ bezeichnet nach altem Gebrauch eine durch zwei parallele Ebenen begrenzte Schicht des sonst nach einer Richtung (und nach der entgegengesetzten Richtung) offenen Prisma. Vergl. unten §. 6, 2. In der Optik versteht man unter einem Prisma gewöhnlich nur ein zweiseitiges, d. h. einen (massiven) Flächenwinkel.

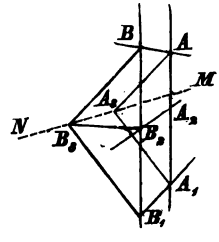
seitig. Der Cylinder kann als ein unendlichseitiges Prisma betrachtet werden.

Parallele Ebenen, die mit den Kanten eines Prisma nicht parallel sind, schneiden das Prisma in kongruenten Figuren (1). Unter den Schnitten eines Prisma ist sein Normalschnitt ausgezeichnet d. h. die Figur, in welcher das Prisma durch eine zu den Kanten normale Ebene geschnitten wird. Wenn zwei Prismen kongruente Normalschnitte haben, so sind sie kongruent (§. 2, 5); also ist das Prisma durch seinen Normalschnitt bestimmt. Die Seiten, die Winkel und die Größe des Prisma sind durch die Seiten, die Winkel und die Fläche des Normalschnitts bestimmt. Das Verhältnis eines Prisma zum unbegrenzten Raum ist von Null ebenso wenig verschieden, als das Verhältnis der Fläche seines Normalschnitts zur unbegrenzten Ebene.

Ein Prisma (Cylinder) kann als eine Ecke (Kegel) betrachtet werden, deren Scheitel (Centrum) unendlich fern ist. Der Normalschnitt des Prisma erscheint als Durchschnitt des Prisma mit einer concentrischen Kugel (2), welche bei unendlicher Ferne des Centrum nicht von einer Ebene unterschieden wird, die zu den Kanten (Radien) normal steht.

Drei Ebenen, die einen unendlich fernen Punkt gemein haben (mit einer nach demselben gerichteten Geraden parallel sind), teilen den Raum in 7 Räume (§. 1, 9. Vergl. Planim. §. 1, 4). Einer derselben ist ein dreiseitiges Prisma, drei andere sind als Nebenprismen desselben zu betrachten.

5. Ein Cylinder (Prisma) wird von einem Flächenwinkel in gleichen und ähnlichen Figuren geschnitten, wenn die den Flächenwinkel halbierende Ebene zu den Kanten des Cylinders normal steht. Werden die Kanten des Cylinders von den Seiten des Flächenwinkels in A, B, C, .. und A_1, B_1, C_1, .. geschnitten, werden dieselben von der den Flächenwinkel halbierenden Ebene normal in A_2, B_2, C_2, .. geschnitten, sind ferner AA_3A_1, BB_3B_1, .. Normalschnitte des Flächenwinkels $A\overline{MN}A_1$, so folgt aus der Gleichheit und



Ähnlichkeit der Dreiecke A_3A_2A und $A_3A_2A_1$, B_3B_2B und $B_3B_2B_1$, .., daß A und A_1, B und B_1, .. symmetrisch zur halbierenden Ebene A_2MN liegen, daß also $AB = A_1B_1$, .., die Figuren ABC.. und $A_1B_1C_1$ .. gleich und ähnlich sind.

Wenn insbesondere auf einem Cylinder ein Kreis liegt, so giebt

es auf dem Cylinder einen gleichen Kreis, der mit jenem symmetrisch zu einem Normalschnitt des Cylinders liegt.*)

Wenn überhaupt die Cylinderfiguren $ABC\,..$ und $A_1B_1C_1\,..$ gleich und ähnlich, und die Kantenstücke AA_1, BB_1, CC_1, .. nicht alle einander gleich sind, so liegen die Figuren symmetrisch zu einem Normalschnitt des Cylinders. Sind AA_1, BB_1, CC_1 ungleich, A_2, B_2, C_2 ihre Mitten, so haben die Vierecke AA_1B_1B, BB_1C_1C, .. zwei parallele und zwei gleiche Seiten; daher sind die Geraden A_2B_2, B_2C_2, .. normal zu den Kanten des Cylinders, mithin die Figur $A_2B_2C_2\,..$ ein Normalschnitt des Cylinders. Wenn insbesondere $CC_1 = BB_1$ ist, so sind BC, B_1C_1, B_2C_2 parallel, und das Viereck BB_1C_1C ist ein Rektangel.

Ein Cylinder wird von einer Kugel in gleichen und ähnlichen Figuren $ABC\,..$ und $A_1B_1C_1\,..$ geschnitten, welche zu dem Normalschnitt des Cylinders, der durch das Centrum der Kugel geht, symmetrisch liegen. Denn die parallelen Sehnen AA_1, BB_1, .. werden von der Centralebene, die zu ihnen normal ist, halbiert.

Ist von den Schnitten eines Cylinders durch eine Kugel der eine ein Kreis, so ist der andere ein gleicher Kreis.

Ein Büschel von Kugeln, die einen Kreis gemein haben, wird von einem Cylinder, auf welchem der gemeinschaftliche Kreis liegt, in Kreisen geschnitten, die parallel und dem gemeinschaftlichen Kreis gleich sind. Denn jeder von diesen Kreisen liegt mit dem gemeinschaftlichen Kreis symmetrisch zu einem Normalschnitt des Cylinders.

Zwei gleiche und nicht parallele Kreise k und k_1 eines Cylinders liegen auf einer Kugel. Die Kugel, welche den Kreis k enthält, und deren Centrum auf der Ebene liegt, zu welcher k und k_1 symmetrisch liegen, schneidet den Cylinder in dem Kreis k_2, mit welchem k_1 zusammenfällt, weil k_1 und k_2 mit k symmetrisch zu derselben Ebene liegen.

Zwei gleiche Kreise einer Kugel liegen auf einem Cylinder. Denn sie liegen symmetrisch zu dem Hauptkreis der Kugel, zu welchem die sphärischen Centren der Kreise symmetrisch liegen.

6. Wenn man die Punkte einer gegebenen Figur auf eine gegebene Fläche durch Gerade projiciert (§. 2, 6), die durch einen gegebenen Punkt gehn (einen Büschel bilden), so erhält man eine Central-

*) Von den beiden Kreisschnitten eines solchen Cylinders heißt einer in Bezug auf den andern ein Wechselschnitt des Cylinders, antiparalleler Schnitt, sectio subcontraria, τομὴ ὑπεναντία nach Apollonius Con. I, 5 und Serenus über den Cylinder (1, 6) in Halleys Ausgabe von Apollonius Conica. Vergl. den Aufsatz des Verf. in Borchardt J. 54 p. 162.

projektion (Perspektive, perspektivische Projektion) der gegebenen Figur. Dabei wird eine Strecke durch einen Winkel, eine Linie durch einen Kegel (Ebene) projiciert. Der gemeinschaftliche Punkt der projicierenden Geraden und Flächen, aus dem die gegebene Figur projiciert wird, heißt das Projektionscentrum.

Wenn die Projicierenden parallel sind, so erhält man eine Parallelprojektion der gegebenen Figur. Man kann dieselbe als Centralprojektion aus einem unendlich fernen Projektionscentrum betrachten. Die Normalprojektionen gehören zu den Parallelprojektionen, mithin auch zu den Centralprojektionen.

Unter den Centralprojektionen von sphärischen Figuren sind die stereographischen*) ausgezeichnet, bei welchen das Projektionscentrum auf der Kugel liegt und die Projektionsfläche plan und parallel ist mit der Ebene, welche die Kugel in dem Projektionscentrum berührt.

Anmerkung. Unter den planen Abbildungen der Erdoberfläche ist die Mercatorsche**) ausgezeichnet. Die Bilder der Meridiane sind parallele Gerade, deren Abstände sich zu einander verhalten, wie die Winkel der Meridiane. Jedes Dreieck des Bildes ist dem abgebildeten sphärischen Dreieck um so ähnlicher, je kleiner die Seiten desselben. Daher sind die Bilder des Äquators und der Parallelkreise parallele Gerade, welche die Meridiane normal schneiden; aber der Abstand des Bildes eines Parallelkreises von dem Bild des Äquators ist dem Abstand des abgebildeten Parallelkreises von dem Äquator nicht proportional. Namentlich wird es durch die Mercatorsche

*) Erfunden von Hipparchus (160 v. Chr.) nach Synesius' Bericht, benannt von Aguillon (Optica 1613 p. 498). Vergl. Klügel math. W. IV p. 492. In den zur Zeit nur lateinisch gedruckten Schriften von Ptolemäus Planisphaerium und De analemmate werden die Projektionen behandelt, in der erstern die stereographische, in der andern die orthographische.

**) Gerh. Mercator (Kremer) hat eine solche Abbildung (Seekarte, Verbesserung der herkömmlichen Plattkarten) 1569 zu Duisburg herausgegeben. Das Prinzip derselben (infolge dessen die Abbildung konform nach Gauß genannt wird, Untersuchungen über Geodäsie 1844. Gött. Abh. II) ist auf der Karte angemerkt, und wurde allgemeiner bekannt durch Wright the correction of certain errors in navigation, London 1599. Vergl. Breusing über Gerhard Kremer gen. Mercator, Duisburg 1869. Weiter entwickelt wurde das Prinzip durch Lambert Beiträge 3 p. 115 ff. Lagrange Mém. de Berlin 1779, Gauß 1822 in Schumachers Astron. Abh. 3, Jacobi Dynamik p. 215. Die Bahn des nach dem Kompaß geführten Schiffes war geometrisch bestimmt worden durch Nonius (Nuñez) de arte atque ratione navigandi 1546, bekannt unter dem Namen rhumb-line, linea rhombica. Rhumbs heißen horizontale Richtungen, Punkte des Horizonts, weil die Blätter der Windrose kongruente Rhomben sind, deren spitze Winkel 45° betragen; die Scheitel der einen spitzen Winkel sind im Centrum vereint, die der andern auf einem Kreise verteilt und mit den Himmelsgegenden bezeichnet. Vergl. Breusing Zeitschr. d. Ges. f. Erdkunde IV. Der Ausdruck rhumb, linea rhombica wurde durch das Wort loxodromia ersetzt von Snellius 1624 Tiphys Batavus, s. Histiodromice I, 4.

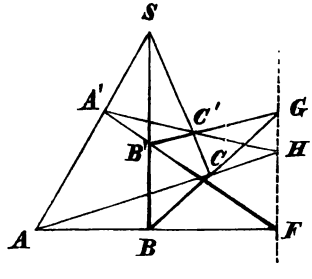
Abbildung erreicht, daß die Bilder von Loxodromien Gerade sind, d. h. von solchen Kurven, welche mit allen Meridianen, die sie schneiden, gleiche Winkel bilden. Ein Schiff, dessen Lauf auf der See mit der unverrückten Deklinationsnadel einen unveränderlichen Winkel bildet, beschreibt eine Loxodromie. Der Winkel aber, welchen die Richtung des Schiffs mit den Meridianen bilden muß, damit das Schiff von einem gegebenen Ort nach einem andern gelangt, ist in der Mercatorschen Abbildung der Erdoberfläche (Seekarte) meßbar.

7. Wenn den Punkten A, B, C, .. einer Figur die Punkte A', B', C', .. einer andern Figur nach einem beliebigen Gesetz entsprechen, und die Figuren in solcher Lage sich befinden, daß die Geraden AA', BB', CC', .., welche die entsprechenden Punkte verbinden, einen Büschel bilden, d. h. durch einen Punkt gehn, der endlich oder auch unendlich fern ist, mithin auf einem Kegel oder Cylinder liegen, so heißen die Figuren ABC .. und $A'B'C'$ .. in Rücksicht auf diese Lage perspektivisch.*)

Eine sphärische Figur und ihre Gegenfigur sind perspektivisch, weil die die Gegenpunkte verbindenden Geraden durch das Centrum der Kugel gehn. Bei sphärischen Betrachtungen werden auch zwei auf einer Kugel liegende Figuren perspektivisch genannt, wenn die die entsprechenden Punkte verbindenden Hauptkreise durch einen Punkt gehn.

Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspektivisch sind, so liegen die Durchschnitte der entsprechenden Seiten AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ auf einer Geraden, und umgekehrt.**)

Beweis. Wenn die perspektivischen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nicht auf einer Ebene liegen, so sind die Durchschnitte F, G, H der entsprechenden Seiten gemeinschaftliche Punkte der Ebenen ABC und $A'B'C'$; folglich liegen sie auf der Geraden, welche die Ebenen gemein haben. Umgekehrt: wenn die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nicht auf einer Ebene liegen und die entsprechenden Seiten paarweise je einen Punkt gemein

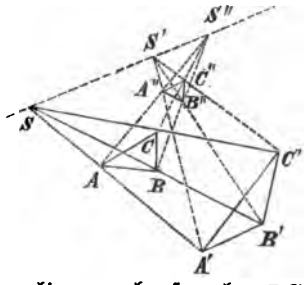


*) Nach Steiner syst. Entw. p. 4 und 29, Staudt Geom. d. Lage 89. Perspektivische Figuren werden in besondern Fällen ähnlich liegend genannt nach Eucl. VI, 18. XI, 27, homothetisch von Chasles Gerg. Ann. 18 p. 280, kollinear liegend von Magnus Aufgaben d. anal. Geom. I p. 44.

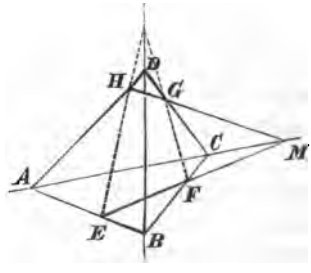
**) Dieser Fundamentalsatz der „Geometrie der Lage" (§. 1, 9) rührt von Desargues her Oeuvres éd. Poudra I p. 413. Vergl. Poncelet propr. proj. 168. Möbius baryc. Calcul p. 284 und 346. Die Gültigkeit des Satzes für zwei sphärische Dreiecke einer Kugel wird durch metrische Relationen erkannt. Gudermann nied. Sph. 211.

haben, so liegen die Geraden AA', BB', CC' paarweise auf je einer Ebene und haben einen Punkt gemein (§. 1, 3).

Wenn die perspektivischen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ auf einer Ebene liegen, so ziehe man die Geraden $A'S'$, $B'S'$, $C'S'$ nach einem beliebigen Punkt S' außer der gemeinschaftlichen Ebene, und die Geraden AS'', BS'', CS'' nach einem beliebigen Punkt S'' der Geraden SS'. Die erstern Hilfslinien haben mit den letztern der Reihe nach die Punkte A'', B'', C'' gemein, so daß $A''B''C''$ sowohl mit $A'B'C'$, als auch mit ABC perspektivisch ist. Nun gehn die Geraden AB, $A'B'$, $A''B''$ durch einen Punkt F, weil sie paarweise auf einer Ebene liegen; ebenso gehn BC, $B'C'$; $B''C''$ durch G, CA, $C'A'$, $C''A''$ durch H. Die Punkte F, G, H liegen auf der Geraden, welche die Ebenen ABC und $A''B''C''$ gemein haben.



Wenn andrerseits die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ auf einer Ebene so liegen, daß die Durchschnitte der entsprechenden Seiten auf einer Geraden g liegen, so projiciere man das Dreieck $A'B'C'$ auf eine durch g gehende Ebene aus einem beliebigen Punkt S'. Ist $A''B''C''$ diese Projektion, so geht $A''B''$ durch den gemeinschaftlichen Punkt von AB und $A'B'$, u. s. w. Daher liegen AA'', BB'', CC'' paarweise auf einer Ebene und haben einen Punkt S'' gemein. Den gemeinschaftlichen Punkt der Geraden $S'S''$ und der Ebene ABC haben die Geraden AA', BB', CC' gemein.



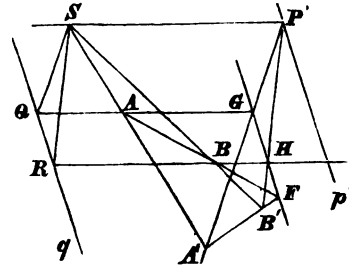
Anmerkung. Wenn einem ebenen oder unebenen Viereck $ABCD$ das Viereck $EFGH$ so eingeschrieben ist, daß ein Paar gegenüberliegende Seiten EF, GH auf der Diagonale AC sich schneiden, so schneiden sich die beiden andern FG, HE auf der andern Diagonale BD.*) Denn die Dreiecke AEH und CFG sind perspektivisch, folglich u. s. w.

8. Wenn die Planfiguren $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ perspektivisch und nicht in einer Ebene enthalten sind, so liegen die Durchschnitte der entsprechenden Geraden AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und $B'C'$, .. auf der Geraden, welche die Ebenen der Planfiguren gemein haben.

Wenn die Planfiguren $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ auf einer Ebene

*) Poncelet propr. proj. 166.

oder auf verschiedenen Ebenen so liegen, daß die entsprechenden Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$, ABD und $A'B'D'$, . . auf derselben Geraden sich schneiden, so sind sie perspektivisch (7). Der gemeinschaftliche Punkt S der die entsprechenden Punkte verbindenden Geraden AA', BB', CC', . . heißt das Kollineationscentrum der perspektivischen Figuren. Alle Geraden der einen Figur schneiden die entsprechenden Geraden der andern Figur auf derselben Geraden, welche die Kollineationsaxe der perspektivischen Planfiguren heißt.*) Den Punkten, welche die eine Figur mit der Kollineationsaxe gemein hat, entsprechen in der andern Figur dieselben Punkte. Einer Geraden der einen Figur, die mit der Kollineationsaxe parallel ist, entspricht in der andern Figur eine parallele Gerade. Dem unendlich fernen Punkt einer andern Geraden der einen Figur entspricht ein endlich ferner Punkt der andern Figur. Die Punkte der Figur ABC . ., welche den unendlich fernen Punkten der Figur $A'B'C'$ . . entsprechen, liegen auf einer Geraden q; die Punkte der Figur $A'B'C'$ . ., welche den unendlich fernen Punkten der Figur ABC . . entsprechen, liegen auf einer Geraden p'. Die Geraden p', q sind mit der Kollineationsaxe parallel, die eine hat von der Kollineationsaxe denselben Abstand, als der Kollineationspunkt von der andern.



Beweis. Die entsprechenden Geraden AB und $A'B'$ schneiden sich in einem Punkt F der Kollineationsaxe; sind G und H beliebige andere Punkte der Kollineationsaxe, so entspricht dem gemeinschaftlichen Punkt P der Geraden AG und BH der gemeinschaftliche Punkt P' der entsprechenden Geraden $A'G$ und $B'H$ dergestalt, daß die Gerade PP' durch das Kollineationscentrum S geht. Denn die Dreiecke $AA'G$ und $BB'H$ sind perspektivisch (7), mithin liegen die gemeinschaftlichen Punkte ihrer entsprechenden Seiten auf einer Geraden. Wenn nun AG und BH parallel sind, so ist SP' mit ihnen parallel, und der ihrem gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkt entsprechende P' liegt auf $A'G$ endlich fern. Ebenso schließt man: wenn P' auf $A'G$ so liegt, daß SP'

*) Die Planfiguren, welche eine Kollineationsaxe besitzen, sind nicht verschieden von den homologischen Figuren Poncelet's (propr. proj. 297) und gehören zur Klasse der von Möbius (baryc. Calcul p. 301) zuerst umfassend betrachteten und so benannten kollinearen Figuren. Der von Chasles (Ap. hist. p. 259 d. Übers.) gewählte Ausdruck homographisch ist die Übersetzung von kollinear. Die Namen Kollineationscentrum, Kollineationsaxe rühren von Magnus (anal.-geom. Aufg. I p. 43 ff.) her; derselbe hat die Geraden p', q Gegenaxen genannt.

und AG parallel sind, so entsprechen den durch P' gehenden Geraden $A'G$ und $B'H$ die parallelen Geraden AG und BH. Vollendet man die Parallelogramme $GP'SQ$, $HP'SR$, . . , so entsprechen aus gleichen Gründen den durch Q, R, . . gehenden Büscheln von Geraden der Figur ABC . . solche Büschel von Geraden der Figur $A'B'C'$ . ., die mit $A'G$, $B'H$, . . parallel sind. Die Strecken GQ, HR sind parallel und gleich, also sind auch QR und GH parallel, u. s. w.

Wenn die Ebenen der perspektivischen Planfiguren ABC . . und $A'B'C'$ . . nur die Kollineationsaxe FG . . gemein haben, so liegen die von S nach den unendlich fernen Punkten von $A'B'C'$ . . gehenden Geraden auf einer Ebene, die mit der Ebene $A'B'C'$ parallel ist. Diese Ebene hat mit der Ebene ABC die Gerade q gemein, deren Punkte den unendlich fernen Punkten der Figur $A'B'C'$ . . entsprechen. Die Gerade q, welche der unendlich fernen Geraden der Ebene $A'B'C'$ entspricht, ist mit der Kollineationsaxe parallel (§. 1, 5). Ebenso findet man auf der Ebene $A'B'C'$ eine Gerade p', entsprechend der unendlich fernen Geraden der Ebene ABC und parallel mit der Kollineationsaxe.

Anmerkung. Wenn die Planfiguren ABC . . und $A'B'C'$ . . eine Kollineationsaxe besitzen, und zwei der Verbindungslinien AA', BB', . . parallel sind, so sind alle parallel, das Kollineationscentrum ist unendlich fern, und die Planfiguren sind perspektivisch affin.*) Unendlich fernen Punkten der einen Figur entsprechen nur unendlich ferne Punkte der andern Figur (die Dreiecke $AA'G$ und $BB'H$ sind nicht nur perspektivisch, sondern auch ähnlich, also $A'G$ und $B'H$ parallel).

Wenn die entsprechenden Geraden AB und $A'B'$, . . der Planfiguren ABC . . und $A'B'C'$ . . parallel sind, so sind die Planfiguren perspektivisch ähnlich. Die Kollineationsaxe ist unendlich fern, das Kollineationscentrum heißt Ähnlichkeitscentrum. Vergl. Planim. §. 12.

9. Wenn von zwei Planfiguren, die eine Kollineationsaxe besitzen, die eine um die Kollineationsaxe gedreht wird, während die andere ruht, so bleiben die Figuren perspektivisch (8), das Kollineationscentrum beschreibt einen Kreis, dessen Ebene zur Kollineationsaxe normal steht und dessen Centrum auf der Geraden liegt, welche der unendlich fernen Geraden der bewegten Planfigur in der andern Planfigur entspricht.**)

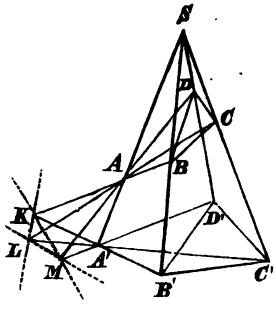
*) Die perspektivischen affinen Figuren sind von Clairaut 1731 (Chasles Ap. hist. p. 655 d. Übers.), Euler (Introd. II cap. 18), Poncelet (propr. proj. 326) betrachtet worden. Der Name Affinität rührt von Euler her. Umfassende Untersuchungen über die affinen Figuren hat zuerst Möbius angestellt. (Baryc. Calcul 144 ff. 230.)

**) Möbius baryc. Calcul p. 326 und Bobillier Gerg. Ann. 17 p. 335. Steiner syst. Entw. p. 53. Magnus anal.-geom. Aufg. II §. 16. Chasles Ap. hist. p. 81 d. Übers.

Beweis. Dreht man die Figur $ABC\ldots$ um die Kollineationsaxe FG, so bleiben $P'S$, QS mit AG, $A'G$ parallel und $P'S$ behält ihre Länge. Weil sich der Winkel von AG mit der Kollineationsaxe nicht ändert, so bleibt der Winkel von $P'S$ mit der Geraden p' unverändert. Daher beschreibt $P'S$ einen Rotationskegel um die Axe p', S einen Parallelkreis desselben.

10. Wenn die unebenen Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ perspektivisch sind, so liegen die Durchschnitte der entsprechenden Ebenen ABC und $A'B'C'$, ABD und $A'B'D'$, .. auf einer Ebene, und umgekehrt.*)

Beweis. Die gemeinschaftlichen Punkte von AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, AD und $A'D'$ werden durch K, L, M bezeichnet. Dann ist KL die Kollineationsaxe der perspektivischen Dreiecke ABC und $A'B'C'$, LM die Kollineationsaxe der perspektivischen Dreiecke ACD und $A'C'D'$, MK die Kollineationsaxe der perspektivischen Dreiecke ADB und $A'D'B'$. Die Geraden BC und $B'C'$ schneiden sich auf KL (7), die Geraden CD und $C'D'$ schneiden sich auf LM, die Geraden DB und $D'B'$ schneiden sich auf MK. Also ist KLM die Kollineationsebene der Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$.



Umgekehrt: Wenn die Ebenen ABC und $A'B'C'$ die Gerade f, ABD und $A'B'D'$ die Gerade g gemein haben, f und g auf einer Ebene liegen, so haben sowohl f, g, AB als auch f, g, $A'B'$ einen Punkt gemein (§. 1, 3), also haben AA' und BB' einen Punkt gemein. Ebenso erkennt man, daß je zwei unter den Geraden AA', BB', CC', DD' einen Punkt gemein haben, und schließt daraus, daß alle einen Punkt gemein haben.

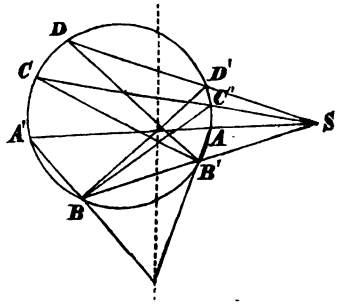
11. Wenn die Raumfiguren $ABCD$ und $A'B'C'D'$, $ABCE$ und $A'B'C'E'$, .. eine gemeinschaftliche Kollineationsebene besitzen, auf der die entsprechenden Ebenen ABC und $A'B'C'$, .. sich schneiden (10), so sind die Raumfiguren $ABCDE\ldots$ und $A'B'C'D'E'\ldots$ perspektivisch. Den

*) Poncelet propr. proj. 582. Ein allgemeinerer Satz über die unebenen Vierecke von Chasles (Ap. hist. p. 648 d. Übers.) lautet: Wenn die Geraden AA', .. auf einem Hyperboloid liegen, so liegen auch die Durchschnitte der Ebenen ABC und $A'B'C'$, .. auf einem Hyperboloid. Vergl. Hermes in Borchardt J. 56 p. 218.

Punkten, welche die eine Figur mit der Kollineationsebene gemein hat, entsprechen in der andern Figur dieselben Punkte. Einer Geraden der einen Figur, die mit der Kollineationsebene parallel ist, entspricht in der andern Figur eine parallele Gerade. Die Punkte der Figur $AB\ldots$, welche den unendlich fernen Punkten der Figur $A'B'\ldots$ (auf der unendlich fernen Ebene dieser Figur) entsprechen, liegen auf einer Ebene ϑ; die Punkte der Figur $A'B'\ldots$, welche den unendlich fernen Punkten der Figur $AB\ldots$ entsprechen, liegen auf einer Ebene η'. Die Ebenen η', ϑ sind mit der Kollineationsebene parallel, die eine hat von der Kollineationsebene denselben Abstand, als der Kollineationspunkt von der andern.*)

Beweis. Je zwei entsprechende Planfiguren, die zu den in Betracht gezogenen Raumfiguren gehören, haben eine auf der Kollineationsebene liegende Kollineationsaxe (8). Wenn den unendlich fernen Punkten von $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $A'E'$ die Punkte Q, Q_1, Q_2, Q_3 entsprechen, so sind die Geraden QQ_1, QQ_2, QQ_3 mit der Kollineationsebene parallel, folglich liegen Q, Q_1, Q_2, Q_3 auf einer Ebene ϑ, die mit der Kollineationsebene parallel ist. Wenn dem unendlich fernen Punkt von AB der Punkt P' entspricht, wenn S der Kollineationspunkt und K der Durchschnitt von AB mit der Kollineationsebene ist, so ist das Viereck $QSP'K$ ein Parallelogramm; daher hat die Ebene ϑ der Punkte Q von der Kollineationsebene denselben Abstand, als das Kollineationscentrum von der Ebene η' der Punkte P'.

12. Wenn die Figuren $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ einem Kreise eingeschrieben und perspektivisch sind, so haben sie eine Kollineationsaxe, auf der nicht nur die entsprechenden Strecken AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, .., BC und $B'C'$, .. sich schneiden, sondern auch die Geraden AB' und $A'B$, .., und die Geraden, welche den Kreis in A und A', .. berühren. Dem Punkt B', wenn er als ein Punkt der ersten Figur betrachtet wird, entspricht in der andern Figur der Punkt B. Die Kollineationsaxe ist die Polare des Kollineationscentrum in Bezug auf den Kreis. Planim. §. 14, 5.



*) Eine dieser Raumfiguren ist ein Relief der andern. Poncelet propr. proj. 576. Nach übereinstimmender Methode hatte Breysig Reliefs konstruieren gelehrt: Versuch einer Erläuterung der Reliefs-Perspektive, Magdeburg 1798. Vergl. Anger Grunert Archiv 4 p. 285. Die Kollinearität von Raumfiguren ist nächst Möbius besonders von Magnus analytisch behandelt worden (Analyt.-geom. Aufgaben II p. 72 ff.).

Wenn die Figuren $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ einer Kugel eingeschrieben und perspektivisch sind, so haben sie eine Kollineationsebene, die Polare des Kollineationscentrum S in Bezug auf die Kugel. Denn die in den Raumfiguren enthaltenen Planfiguren sind Kreisen eingeschrieben, und ihre Kollineationsaxen sind normal zu dem nach S gerichteten Radius der Kugel. Wird das Centrum der Kugel durch M, das Centrum eines Kreises, dessen Ebene den Punkt S enthält, durch N, die zu dieser Ebene gehörende Kollineationsaxe durch p bezeichnet, so ist p normal zu NS und zu NM, mithin normal zu MS.

Wenn die Figuren $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ je einem Kreise eingeschrieben und so perspektivisch sind, daß die Geraden AA', BB', .. in einem Ähnlichkeitspunkt der Kreise zusammentreffen, ohne daß die Geraden AB und $A'B'$ .. parallel sind, so haben die Figuren eine Kollineationsaxe, auf der die Geraden AB und $A'B'$, AB' und $A'B$, .. sich schneiden. Die Punkte der Kollineationsaxe haben gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise. Planim. §. 14, 6.

Wenn die Figuren $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ je einer Kugel eingeschrieben und so perspektivisch sind, daß die Geraden AA', BB', .. in einem Ähnlichkeitspunkt der Kugeln zusammentreffen, ohne daß die Geraden AB und $A'B'$ .. parallel sind, so haben die Figuren eine Kollineationsebene. Jeder Punkt der Kollineationsebene hat in Bezug auf die Kugeln gleiche Potenzen.

13. Von 3 Planfiguren f, f', f'' werde vorausgesetzt, daß je zwei eine Kollineationsaxe haben und perspektivisch sind (8). Wenn die 3 Kollineationsaxen einen Punkt gemein haben, so liegen die 3 Kollineationspunkte auf einer Geraden, und umgekehrt.*)

Beweis. Zieht man durch den gemeinschaftlichen Punkt O der Kollineationsaxen die Gerade AB der Figur f, und die entsprechenden Geraden $A'B'$, $A''B''$ der Figuren f', f'', so sind die Dreiecke $AA'A''$ und $BB'B''$ perspektivisch (7), folglich schneiden sich die Geraden AA' und BB' (in S), $A'A''$ und $B'B''$ (in S'), $A''A$ und $B''B$ (in S'') auf einer Geraden.

Anmerkung. Wenn von 3 Raumfiguren je zwei eine Kollineationsebene haben, so liegen die Kollineationspunkte auf einer Geraden. Denn die Kollineationsebenen haben einen Punkt gemein.

14. Wenn zwei Figuren einer dritten Figur ähnlich und mit ihr perspektivisch sind, so sind sie selbst ähnlich und perspektivisch; die

*) Magnus analyt.-geom. Aufgaben I p. 51. Vergl. Steiner Crelle J. 1 p. 41.

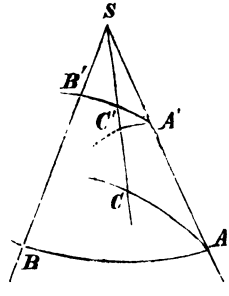
Ähnlichkeitspunkte liegen auf einer Geraden.*) Denn die entsprechenden Geraden z. B. AB, $A'B'$, $A''B''$ sind parallel und haben einen unendlich fernen Punkt gemein, folglich u. s. w. (13).

Insbesondere können zwei Kreise auf einer Ebene oder auf parallelen Ebenen, sowie zwei Kugeln auf zwei Arten als ähnlich und perspektivisch betrachtet werden (Planim. §. 12, 7). Daher können 3 Kreise auf einer Ebene oder auf parallelen Ebenen, oder 3 Kugeln auf 4 Arten 3 Paare von ähnlichen und perspektivischen Figuren bilden; von den Ähnlichkeitspunkten S_{12}, S_{13}, S_{23}, T_{12}, T_{13}, T_{23} liegen 4mal 3 auf je einer Geraden.**) Vier Kugeln können auf 8 Arten 6 Paare von ähnlichen und perspektivischen Figuren bilden; von den Ähnlichkeitspunkten $S_{12}, \ldots, S_{34}$, $T_{12}, \ldots, T_{34}$ liegen 8mal 6 auf je einer Ebene.

Drei Kreise einer Ebene können auch 3 Paare von perspektivischen und nicht ähnlichen Figuren bilden, deren Kollineationspunkte mit den Ähnlichkeitspunkten zusammenfallen (12). Weil die Collineationspunkte auf einer Geraden liegen, so gehn die Kollineationsaxen durch einen Punkt, der in Bezug auf die 3 Kreise gleiche Potenzen hat. Planim. §. 14, 7.

15. Zwei sphärische Figuren einer Kugel, welche perspektivisch liegen, sind isogonal, d. h. die entsprechenden Winkel sind gleich.***)

Beweis. AB, AC sind Kurven einer Kugel, $A'B'$, $A'C'$ ihre Centralprojektionen aus S auf dieselbe Kugel; die Ebenen, welche die Gerade SA gemein haben und die Kurven AB, AC berühren, schneiden die Kugel in den Kreisen $DAA'D'$, $EAA'E'$. Die Kreise $DAA'D'$, $EAA'E'$ berühren in A die Kurven AB, AC, in A' die Kurven $A'B'$, $A'C'$, weil die Ebenen SAD, SAE, auf welchen die Kreise liegen, die projicierenden Kegel berühren, auf denen die Kurven AB, $A'B'$ und AC, $A'C'$ liegen (§. 3, 2). Daher sind die von den Kurven AB, AC und von den Kurven $A'B'$, $A'C'$ gebildeten Winkel der Reihe nach nicht verschieden von den Winkeln der Kreisbogen AD, AE und



*) Magnus I p. 57, II p. 97.

**) Monge nach Poncelet's Angabe (propr. proj. 269), D'Alembert nach Fuß' Mitteilung (Nov. Act. Petrop. XIV p. 139). Die obigen Beziehungen sind von Fuß a. a. O. umfassend betrachtet worden.

***) Vergl. Planim. §. 14, 13 ff. Miquel Liouv. J. XI p. 72. Das einfache Prinzip des Beweises ist zuerst von Dandelin bei der Theorie der stereographischen Projektion angewendet worden. Vergl. Gerg. Ann. 16 p. 322.

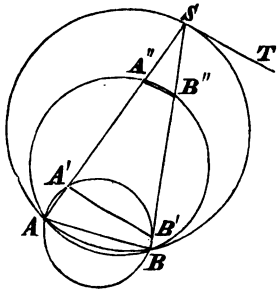
$A'D'$, $A'E'$. Diese letztern Winkel sind einander gleich, weil die sphärischen Dreiecke, welche A und A' mit den sphärischen Centren der Kreise bilden, gleich und ähnlich sind; also sind auch die erstern Winkel einander gleich.

16. Zwei sphärische Figuren einer Kugel, welche perspektivisch liegen, sind homocyklisch (kreisverwandt), d. h. vier Punkten der einen Figur, die auf einem Kreis liegen, entsprechen vier Punkte der andern Figur, die ebenfalls auf einem Kreis liegen. Der Hauptkreis, dessen Ebene den Kollineationspunkt und das sphärische Centrum des einen Kreises enthält, geht auch durch das sphärische Centrum des andern Kreises.

Beweis. Die Kugel wird von den Ebenen SAB, SBC, SCD, SDA in den Kreisen $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$ geschnitten, so daß die von Kreisbogen gebildeten Vierecke $ABCD$, $A'B'C'D'$ der Reihe nach gleiche Winkel haben (15). Wenn nun D auf dem Kreis ABC liegt, so ist die Summe von zwei nicht folgenden Winkeln des Vierecks $ABCD$ der Summe der beiden andern Winkel gleich (§. 4, 14). Dieselbe Gleichung findet zwischen den Winkeln des Vierecks $A'B'C'D'$ statt, also liegt D' auf dem Kreis $A'B'C'$. Ist AD der sphärische Diameter des Kreises ABC, auf dessen Ebene S liegt, so ist $A'B'$ ein sphärischer Diameter des Kreises $A'B'C'$, weil der von $A'B'$ mit dem Kreis $A'B'C'$ gebildete Winkel dem von AB mit dem Kreis ABC gebildeten Winkel gleich, also recht ist.

17. Ein Büschel von Kugeln, die einen Kreis gemein haben, wird von einem Kegel, auf welchem der gemeinschaftliche Kreis liegt, in Kreisen geschnitten, welche parallel sind und stereographische Projektionen des gemeinschaftlichen Kreises aus dem Centrum des Kegels.*)

Beweis. Die Kugeln haben mit dem Kegel, dessen Centrum S ist, den Kreis ABC gemein und werden von dem Kegel in den sphärischen Figuren $A'B'C'$, $A''B''C''$, .. geschnitten, die mit ABC isogonal und homocyklisch, also Kreise sind. Auf der Ebene ABS liegen die Kreise $ABB'A'$, $ABB''A''$, .., ABS und die Tangente des letztern ST; die Winkel $2AA'B'$, $2AA''B''$, .., $2AST$ sind gleich (Planim. §. 4, 3), also die Geraden $A'B'$, $A''B''$, .., ST parallel; u. s. w. Folglich sind die



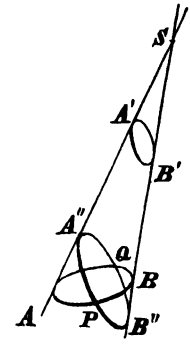
*) Vergl. den Aufsatz des Verf. in Borchardt J. 54 p. 165. Im allgemeinen

Ebenen $A'B'C'$, $A''B''C''$, .. mit der Ebene parallel, welche die Kugel $ABCS$ in S berührt, d. h. die Kreise $A'B'C'$, $A''B''C''$, .. sind stereographische Projektionen des Kreises ABC aus S (6).

Kreise wie ABC und $A'B'C'$ sind sogenannte Wechselschnitte des Kegels (5). Bei dem Rotationskegel sind dieselben parallel.

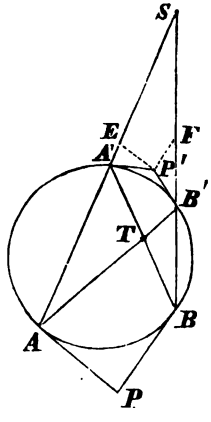
18. Wenn zwei nicht parallele Kreise auf einem Kegel (perspektivisch) liegen, so liegen sie auf einer Kugel.

Beweis. Haben die Kreise zwei Punkte gemein, so liegen sie auf einer Kugel (§. 3, 9). Haben die Kreise keinen realen Punkt gemein, z. B. ABC und $A'B'C'$, so ziehe man die Sehne PQ des Kreises ABC parallel mit der Ebene $A'B'C'$, und lege durch PQ den Kegelschnitt $A''B''C''$ parallel mit $A'B'C'$, der ein Kreis ist wie $A'B'C'$. Die Kreise ABC und $A''B''C''$ liegen auf einer Kugel, weil sie die Punkte P und Q gemein haben. Der gegebene Kegel enthält den Kreis ABC und schneidet zum zweitenmal die Kugel $ABCA''$ in dem Kreis $A''B''C''$, die Kugel $ABCA'$ in einem Kreis, welcher mit dem Kreise $A''B''C''$ parallel ist (17) und deshalb mit dem Kreis $A'B'C'$ zusammenfällt.



19. Wenn zwei Kreise auf einer Kugel liegen, so sind sie auf 2 Arten perspektivisch. Ihre Kollineationspunkte liegen sowohl auf der Ebene des Hauptkreises, welcher durch die sphärischen Centren der Kreise geht, als auch auf der Geraden, welche die Centren der Kegel verbindet, von denen die Kugel längs der beiden Kreise berührt wird.

Beweis. Der Hauptkreis, welcher durch die sphärischen Centren der Kreise geht, schneidet den einen Kreis k in A und B, den andern k' in A' und B'; die Geraden AA' und BB' schneiden sich in S. Der Kegel, welcher den Kreis k aus S auf die Kugel projiciert, schneidet dieselbe in einem Kreis, für den der Hauptkreisbogen $A'B'$ ein sphärischer Diameter ist (16), und mit dem also der



haben 2 Flächen 2ter Ordnung eine unebene Linie 4ter Ordnung gemein; die in besondern Fällen aus 2 (planen) Linien 2ter Ordnung mit 2 gemeinschaftlichen Punkten, in dem vorliegenden Fall aus 2 Kreisen besteht. Vergl. meine analytische Geometrie §. 56, 2.

Kreis k' zusammenfällt. Durch gegenseitige Vertauschung von A' und B' findet man den zweiten Kollineationspunkt T der gegebenen Kreise.

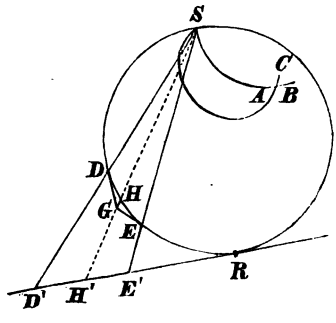
Die Geraden, welche den Hauptkreis an den Enden der Sehnen $A'B'$ und AB berühren, schneiden sich in P' und P, den Centren der Kegel, welche die Kugel längs der Kreise k' und k berühren (§. 3, 6). Zieht man $P'E$ und $P'F$ parallel mit PA und PB, so ist $P'E = P'A'$, $P'F = P'B'$, also $P'E = P'F$. Daher sind die Dreiecke $P'EF$ und PAB ähnlich und perspektivisch, d. h. die Gerade PP' geht durch S.

Die Gerade ST ist die Polare des Punktes, welchen die Geraden $A'B'$ und AB gemein haben, in Bezug auf den Kreis $ABB'A'$ (12).

Anmerkung. Drei Kreise einer Kugel können auf 4 Arten als 3 Paare von perspektivischen Figuren betrachtet werden. Die Kollineationspunkte S_{12}, S_{13}, S_{23}, T_{12}, T_{13}, T_{23} liegen auf einer Ebene, nämlich 4mal 3 auf je einer Geraden, weil die Kollineationsaxen einen Punkt gemein haben, den gemeinschaftlichen Punkt der Kreisebenen (13 und 14).

Die Kreise einer Kugel, deren Ebenen eine Gerade gemein haben, bilden einen sphärischen Büschel. Die sphärischen Centren ihrer Orthogonalkreise liegen auf dem Hauptkreise des Büschels.*) Aus einem von der Kugel ausgeschlossenen Punkt P der gemeinschaftlichen Geraden g gehn gleiche gerade Tangenten an die Kreise des Büschels, weil die Kreise auf einer Kugel liegen; die Projektion des Punktes P auf die Kugel aus dem Centrum derselben ist das sphärische Centrum eines bestimmten Kreises, der die Kreise des Büschels normal schneidet.

20. Eine sphärische Figur und eine stereographische Projektion derselben sind isogonal und homocyklisch. Die Gerade, welche das Centrum des Kegels projiciert, der die Kugel längs eines Kreises berührt, geht durch das Centrum der stereographischen Projektion des Kreises.**)



Beweis. Zwei sphärische Kurven Au und Av werden aus dem Punkt S der Kugel durch Kegel auf eine Ebene projiciert, die mit der Tangentenebene der Kugel, welche durch S geht, parallel

*) Vergl. Steiner in Crelle J. 1 p. 182. Miquel a. a. O. p. 73.

**) Vergl. Planim. §. 14, 14. Das Centrum der stereographischen Projektion eines Kreises ist in der angegebenen Weise von Chasles 1817 bestimmt worden (Ap. hist. p. 216 d. Übers.). Die einfache Begründung dieser Theorie rührt, wie oben (15) bemerkt, von Dandelin her.

ist und z. B. die Kugel in R, dem Gegenpunkt von S, berührt. Die Ebenen, welche die projicierenden Kegel in SA berühren, enthalten gerade Tangenten sowohl der sphärischen Kurven Au und Av, als auch ihrer Projektionen $A'u'$ und $A'v'$, sie schneiden die Kugel in den Kreisen SAB und SAC, die auf Tangentenebenen der projicierenden Kegel liegen und deshalb die sphärischen Kurven in A berühren; sie schneiden die Tangentenebene der Kugel, mit der die Projektionsebene parallel ist, in den Geraden Su'' und Sv'', welche die Kreise SAB und SAC berühren, und mit den Geraden $A'u'$ und $A'v'$ parallel sind. Der Winkel der sphärischen Kurven oder der sie berührenden Kreise ist dem in S von denselben Kreisen gebildeten Winkel gleich (15), folglich ist er auch dem von den Tangenten Su'' und Sv'' oder von den Tangenten $A'u'$ und $A'v'$ gebildeten Winkel, d. i. seiner stereographischen Projektion gleich.

Man bezeichne nun durch G das Centrum des Kegels, welcher die Kugel in dem Kreise DEF berührt, durch H die Projektion von G auf die Kugel aus dem Punkt S, durch D', E', F', H' die stereographischen Projektionen von D, E, F, H. Die Kreise SHD, SHE, SHF schneiden den Kreis DEF normal, weil ihre Tangenten DG, EG, FG den Kreis DEF normal schneiden. Also schneiden die Geraden $H'D'$, $H'E'$, $H'F'$ als die stereographischen Projektionen der Kreise SHD, SHE, SHF die stereographische Projektion $D'E'F'$ des Kreises DEF gleichfalls normal. Hieraus erkennt man, daß die Kurve $D'E'F'$ ein Kreis und H' dessen Centrum ist. Auch kann man wie oben (19) beweisen, daß $H'D' : H'E' = GD : GE$, u. s. w.

Anmerkung. Die stereographische Projektion eines sphärischen Büschels von Kreisen (19, Anm.) ist ein planer Büschel von Kreisen.

21. Eine sphärische Figur und die unähnliche Projektion derselben auf eine andere Kugel aus einem Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln sind isogonal und homocyklisch. Die Centren von Kegeln, welche die Kugeln in entsprechenden Kreisen berühren, liegen mit dem Projektionscentrum auf einer Geraden.*)

Beweis. Ist f eine Figur der ersten Kugel, f' die unähnliche, f'' die ähnliche Projektion der sphärischen Figur f auf die zweite Kugel aus einem Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln, so sind f' und f'' isogonal und homocyklisch (15 und 16), f'' und f desgleichen, weil sie ähnlich sind, also sind auch f' und f isogonal und homocyklisch. Sind P, P', P'' die Centren der Kegel, welche die Kugeln in einem Kreis von f und in den entsprechenden Kreisen von f' und f''

*) Miquel a. a. O. p. 72.

berühren, so liegt P' auf der Geraden, welche P'' projiciert (19), und P'' auf der Geraden, welche P projiciert, wegen der Ähnlichkeit von f'' und f, also liegt P' auf der Geraden, welche P projiciert.

Bezeichnet man die Centren der Kugeln durch M und M', ihre Radien durch r und r', den äußern Ähnlichkeitspunkt durch S, so hat man $SM : r = SM' : r'$. Wenn nun das Centrum der zweiten Kugel M' in unendliche Ferne entweicht, so wird $SM : r = 1$, die Kugel geht in eine SM normal schneidende Ebene über, und die Projektion wird eine stereographische.

§. 6. Tetraeder und Parallelepiped.

1. Eine aus planen Polygonen bestehende geschlossene Fläche heißt ein **Polyeder**, mit Rücksicht auf den eingeschlossenen Raum ein (geometrischer) **Körper**. Die verbundenen Polygone heißen seine **Flächen** (ἕδραι, faces). Jede Seite eines Polygons fällt mit einer Seite eines angrenzenden Polygons zusammen und wird eine **Kante** (§. 2, 5) des Polyeders genannt. Jede Kante des Polyeders ist die Kante eines **Flächenwinkels** des Polyeders. Jeder Winkel eines Polygons hat mit je einem Winkel von zwei oder mehr andern Polygonen den Scheitel gemein; diese Winkel bilden eine drei- oder mehrseitige Ecke, eine **Ecke** (§. 5, 1) des Polyeders. Dabei wird gewöhnlich vorausgesetzt, daß je zwei Eckpunkte des Polyeders, die nicht eine Kante begrenzen, durch eine aus Kanten bestehende Linie verbunden sind, und daß man aus einer Fläche, indem man durch Überschreitung einer Kante in eine angrenzende Fläche übergeht, nach und nach in jede Fläche zu gelangen vermag. Vergl. §. 7, 1. Zur Bestimmung eines Polyeders gehört die Angabe der Zahl und Art sowohl seiner Flächen als seiner Ecken.

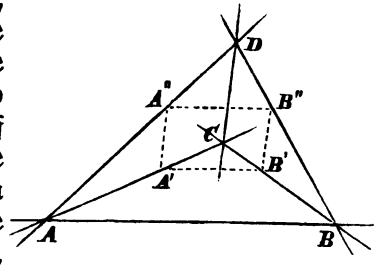
Die Ebenen, welche man durch das Centrum einer Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, parallel mit den Flächen eines Polyeders legt, schneiden die Kugel in einem System von Hauptkreisen, welches die Winkel der Kanten durch die sphärischen Abstände der Durchschnittspunkte von Hauptkreisen, die Flächenwinkel des Polyeders durch die Winkel von Hauptkreisen, die Ecken durch ihre Kugelschnitte zur Anschauung bringt (§. 5, 2).

2. Ein Körper, der von einer Ecke durch eine Ebene abgeschnitten wird, heißt eine **Pyramide**, und zwar **$n$seitig**, wenn sie ein Teil einer $n$seitigen Ecke ist. Die Oberfläche dieser Pyramide besteht aus einem $n$eck und n Dreiecken; von ihren Ecken ist eine $n$seitig, die übrigen n sind dreiseitig; die $n$seitige Pyramide hat $2n$ Kanten. Eine

mehrseitige Pyramide kann sowie jedes Polyeder durch Diagonal-Dreiecke in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden. Ein (durch eine Ebene begrenzter) Kegel kann als unendlichseitige Pyramide betrachtet werden.

Die zwischen parallelen Ebenen enthaltene Schicht eines Prisma (im weitern Sinne) heißt ein Prisma (im engern Sinne), und zwar $n$seitig, wenn es ein Teil eines $n$seitigen Prisma ist (§. 5, 4). Die Oberfläche desselben besteht aus 2 kongruenten $n$ecken und n Parallelogrammen; seine $2n$ Ecken ergänzen sich paarweise zu einem Flächenwinkel; von seinen $3n$ Kanten sind $2n$ paarweise gleich und parallel, die übrigen n sind sämtlich gleich und parallel. Ein mehrseitiges Prisma kann durch Diagonal-Parallelogramme in dreiseitige Prismen zerlegt werden. Eine Schicht eines Cylinders kann als unendlichseitiges Prisma betrachtet werden. Prisma und Cylinder heißen gerade, wenn sie durch Normalschnitte begrenzt sind.

3. Vier Ebenen, welche nicht alle einen Punkt gemein haben, teilen den Raum in 15 Räume; denn von den 8 Ecken, die durch 3 der gegebenen Ebenen gebildet werden, wird von der vierten Ebene eine nicht geteilt. Einer dieser 15 Räume $ABCD$ ist vollständig begrenzt und heißt ein Tetraeder; er kann auf 4 Arten als eine dreiseitige Pyramide betrachtet werden, von seinen Kanten liegen 3mal 2 nicht auf einer Ebene und heißen gegenüberliegend*), AB und CD, BC und AD, CA und BD. Vier andere Räume (A), (B), (C), (D) sind 3seitige Ecken, und zwar die Gegenecken der Ecken des Tetraeders. Vier andere Räume (ABC), (BCD), (CAD), (ABD) liegen außen an den Flächen des Tetraeders und werden von dem Tetraeder zu den Ecken desselben ergänzt. Die 6 übrigen Räume (AB) und (CD), (BC) und (AD), (CA) und (BD) liegen außen an den Kanten des Tetraeders.



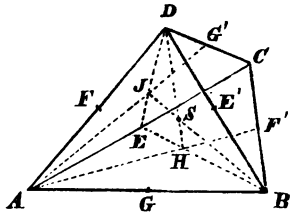
Eine Ebene, die mit zwei gegenüberliegenden Kanten AB, CD des Tetraeders parallel ist, schneidet das Tetraeder in einem Parallelogramm $A'B'B''A''$. Denn $A'B'$ und $A''B''$ sind mit AB parallel, $A'A''$ und $B'B''$ sind mit CD parallel. Vergl. §. 5, 7. Anm.

Die Winkel der Kanten eines Tetraeders, die Flächenwinkel und die Ecken stehn in demselben Zusammenhang unter einander, als die

*) Monge Corresp. sur l'Éc. polyt. I p. 440.

Seiten, Winkel, Flächen einer von 4 Hauptkreisen gebildeten sphärischen Figur (1).

4. Die Ebenen, welche je eine Kante des Tetraeders und die Mitte der gegenüberliegenden Kante enthalten; die Geraden, welche die Mitten der gegenüberliegenden Kanten verbinden; die Geraden, welche die Spitzen des Tetraeders mit den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Flächen verbinden, — gehn durch einen Punkt, den **Schwerpunkt** des Tetraeders.*) Sind E und E' die Mitten von AC und BD, F und F' die Mitten von BC und AD, G und G' die Mitten von AB und CD, so sind $EFE'F'$, $FGF'G'$, $GEG'E'$ concentrische Parallelogramme, die **Mittelschnitte** des Tetraeders. Vergl. Planim. §. 8, 3.



Die Ebenen ACE' und BDE schneiden sich in der Geraden EE', u. s. w. Die gemeinschaftliche Mitte S der Strecken EE', FF', GG' liegt auf jeder von den Ebenen ABG', CDG, . . . Die Geraden DS, BS schneiden die Dreiecke ABC, ACD in ihren Schwerpunkten H, J, weil AF' und BE Mittellinien des Dreiecks ABC sind, u. s. w. (Planim. §. 8, 4).

Dabei ist HJ parallel mit BD, und $HJ : BD = 1 : 3$, weil $EH : EB = EJ : ED = 1 : 3$; also $HS : SD = 1 : 3$, d. h. der Schwerpunkt des Tetraeders teilt die Geraden, welche die Spitzen des Tetraeders mit den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Flächen verbinden, nach dem Verhältnis 3. Die Schwerpunkte der Flächen eines Tetraeders sind die Ecken eines ähnlichen Tetraeders, welches mit dem erstern perspektivisch liegt. Vergl. unten (17) und Planim. §. 12, 8.

5. Wenn zwei Tetraeder eine Ecke und die anliegenden Kanten der Reihe nach gleich und ähnlich haben, so sind sie gleich und ähnlich, d. h. die Flächen, Kanten, Winkel, Ecken des einen sind den gleichliegenden Stücken des andern der Reihe nach gleich und ähnlich, und ihre Volume sind gleich. Die beiden Tetraeder sind aber nur dann kongruent, wenn ein Paar gleiche und ähnliche Ecken kongruent sind. In dem entgegengesetzten Falle wird die Gleichheit der Volume durch Zerlegung der inkongruenten Tetraeder in kongruente Tetraeder erkannt.**)

*) Commandinus de centro gravitatis 1565, prop. 17. 22. Aus Archimedes' Büchern über die schwimmenden Körper sieht man, wie Commandino selbst angiebt, daß Archimedes die Schwerpunkte auch von zusammengesetzteren Körpern bestimmt hat.

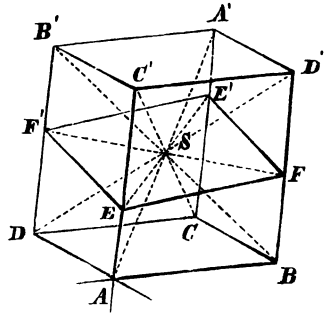
**) Diesen Beweis hat Legendre (Géom. Note 7, 2te Ausg.) aus derselben

Es seien M und M' die Centren der Kugeln $ABCD$ und $A'B'C'D'$ (§. 3, 9), N und N' die Centren der Kreise ABC und $A'B'C'$, so können die gleichen und ähnlichen Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in je 4mal 3 Tetraeder, $ABNM$, $BCNM$, $CANM$, .. und $A'B'N'M'$, .. zerlegt werden, die der Reihe nach kongruent sind, weil die Ecken N und N', .. kongruent sind.

6. Der Raum, welchen 3 zwischen parallelen Ebenen enthaltene Schichten gemein haben, heißt ein Parallelepiped (παραλληλ-επίπεδον). Dieses Polyeder kann auf 3 Arten als ein vierseitiges Prisma betrachtet werden; es hat 6 Flächen, welche Parallelogramme sind, darunter 3mal 2 kongruente und parallele; es hat 8 dreiseitige Ecken, welche in demselben Zusammenhang stehn, als die von 3 Ebenen um einen Punkt gebildeten Ecken (§. 5, 3); es hat 12 Kanten, darunter 3mal 4 gleiche und parallele.

Wenn eine Ecke drei rechte Winkel hat, so sind alle Ecken kongruent, und das Parallelepiped ist rektangulär; wenn eine Ecke drei gleiche Kanten hat, so sind alle Kanten gleich, und das Parallelepiped ist rhombisch*); wenn beide Bedingungen zugleich erfüllt sind, so heißt das Parallelepiped ein Würfel (κύβος, cubus) und ist wegen der Kongruenz seiner Ecken und Flächen (Quadrate) ein reguläres Hexaeder.

Es giebt im Parallelepiped 3mal 2 Diagonal-Parallelogramme, $ABA'B'$ und $CDC'D'$, .. und 4 Diagonalen AA', BB', CC', DD', die im Centrum des Parallelepipeds sich schneiden. Denn AA' wird von BB' halbiert im Parallelogramm $ABA'B'$, desgleichen von CC' und DD'. Jede Ebene $EFE'F'$, welche durch das Centrum S des Parallelepipeds geht, teilt das Parallelepiped in zwei gleiche und ähnliche, aber inkongruente Polyeder. Denn die Tetraeder $SEFA$ und $SE'F'A'$ sind gleich und ähnlich, aber inkongruent wie die am Centrum liegenden Ecken (5), u. s. w.

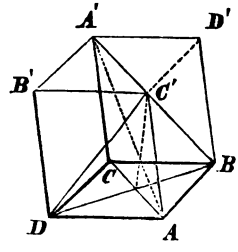


Quelle mitgeteilt, wie den Beweis der Gleichheit sphärischer Gegendreiecke. Vergl. §. 4, 4.

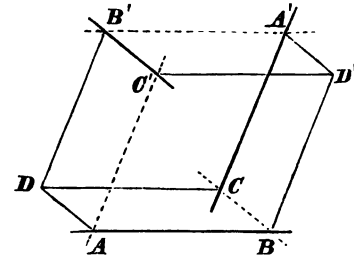
*) Wenn seine Flächen kongruente Rhomben sind, so heißt das Parallelepiped ein Rhomboeder. Vergl. unten §. 7, 5.

7. Es giebt im Parallelepiped 4mal 2 parallele und kongruente Diagonal-Dreiecke, welche von den gegenüberliegenden Ecken gleiche und ähnliche aber inkongruente Tetraeder abschneiden. Zwei parallele und kongruente Diagonal-Dreiecke werden von einer Diagonale in ihren Schwerpunkten geschnitten und teilen die Diagonale in 3 gleiche Teile, z. B. AA' und eine Mittellinie des Dreiecks $BC'D$ teilen sich nach dem Verhältnis 1 : 2 (Planim. §. 8, 2).

Die nicht parallelen Diagonal-Dreiecke des Parallelepipeds begrenzen zwei Tetraeder, $BDA'C'$ und $B'D'AC$, die dem Parallelepiped so eingeschrieben sind, daß je zwei gegenüberliegende Kanten derselben auf parallelen Flächen des Parallelepipeds liegen.*) Diese Tetraeder sind perspektivisch, gleich und ähnlich (nicht kongruent), weil die Strecken BB', DD', $A'A$, $C'C$ das Centrum des Parallelepipeds zur gemeinschaftlichen Mitte haben (5). Ihre Schwerpunkte sind im Centrum des Parallelepipeds vereint; denn die Diagonale AA' geht durch den Schwerpunkt der Fläche BDC', u. s. w. (4).



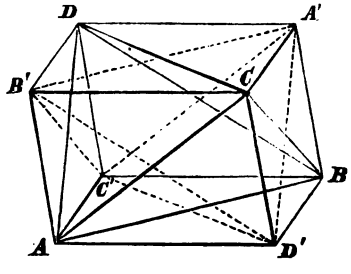
Anmerkung. Drei Gerade AB, CA', $B'C'$, von denen je zwei nicht auf einer Ebene liegen, bestimmen 3 Schichten, mithin ein Parallelepiped, von welchem AB, CA', $B'C'$ nicht folgende Kanten sind. Jede der Kanten $A'B'$, $C'A$, BC, welche mit jenen der Reihe nach parallel sind, hat mit den Geraden AB, CA', $B'C'$ je einen Punkt gemein, z. B. $A'B'$ hat mit AB den unendlich fernen Punkt derselben, mit CA' den Punkt A', mit $B'C'$ den Punkt B' gemein, u. s. w. Also liegen die Geraden $A'B'$, $C'A$, BC auf dem durch die Geraden AB, CA', $B'C'$ bestimmten geradlinigen Hyperboloid (§. 1, 8), welches mit dem Parallelepiped concentrisch ist.**)



8. Die Ebenen, welche durch die Mitten der Kanten eines Tetraeders normal zu den jedesmal gegenüberliegenden Kanten gestellt werden, haben einen Punkt gemein. Die Strecke zwischen diesem Punkt und dem Centrum der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel wird durch den Schwerpunkt des Tetraeders halbiert.***)

*) Monge Corresp. sur l'Éc. polyt. II p. 266.
**) Hachette Crelle J. 1 p. 345.
***) Monge Corresp. sur l'Éc. polyt. II p. 266.

Beweis. Die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders $ABCD$ bestimmen 3 Schichten, mithin ein Parallelepiped, welches nicht nur dem Tetraeder $ABCD$, sondern auch dem gleichen und ähnlichen Tetraeder $A'B'C'D'$ umgeschrieben ist (7). Diese Tetraeder liegen perspektivisch, so daß die Geraden AA', BB', .. den Schwerpunkt des Tetraeders $ABCD$ zur gemeinschaftlichen Mitte haben; daher liegen insbesondere die Centren der Kreise ABC und $A'B'C'$, die Centren der Kugeln $ABCD$ und $A'B'C'D'$ so, daß die zwischen ihnen enthaltenen Strecken von dem Schwerpunkt des Tetraeders halbiert werden. Die Ebene, welche AB halbiert und CD normal schneidet, halbiert die Kante $C'D'$ normal, u. s. w. Die Ebenen, welche die Kanten des Tetraeders $A'B'C'D'$ normal halbieren, gehn durch das Centrum der Kugel $A'B'C'D'$ (§. 3, 9). Also geht jede Ebene, welche eine Kante des Tetraeders $ABCD$ z. B. AB halbiert und die gegenüberliegende Kante CD normal schneidet, durch das Centrum der Kugel $A'B'C'D'$.



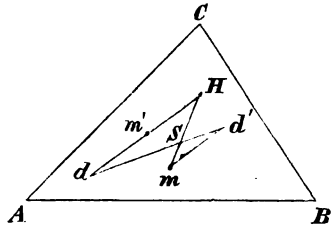
9. Die Höhen eines Tetraeders $ABCD$ — d. h. die Normalen aus den Eckpunkten A, B, .. zu den gegenüberliegenden Flächen CBD, ACD, .. — gehn im allgemeinen nicht durch einen Punkt, sondern liegen auf einem durch 3 derselben bestimmten geradlinigen Hyperboloid (§. 1, 8). Auf demselben Hyperboloid liegen die Normalen der Flächen des Tetraeders, die durch deren Höhenpunkte gehn. Das Centrum des Hyperboloids ist der gemeinschaftliche Punkt der Ebenen (8), welche durch die Mitten der Kanten des Tetraeders normal zu den jedesmal gegenüberliegenden Kanten gestellt sind.*)

Wenn H der Höhenpunkt des Dreiecks ABC ist, so sind AH, BH, CH von den durch A, B, C gehenden Höhen des Tetraeders die Normalprojektionen auf die Ebene ABC. Denn die Ebene, welche die durch A gehende Höhe projiciert, ist normal zu den Ebenen BCD und ABC, folglich zu der Geraden BC, u. s. w. Die durch H gehende Normale der Ebene ABC schneidet also die durch A, B, C gehenden Höhen des Tetraeders und hat mit der durch D gehenden Höhe den unendlich fernen Punkt gemein. U. s. w.

---

*) Steiner Crelle J. 2 p. 97 und syst. Entw. p. 316. Vergl. Hermes Borchardt J. 56 p. 241. Die Eigenschaft der Normalen zu den Flächen durch deren Höhenpunkte und die Lage des Centrum des Hyperboloid ist von Joachimsthal bemerkt worden. Grunert Archiv 32 p. 109.

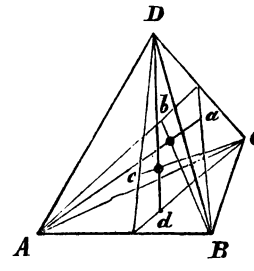
Das Centrum des Hyperboloids liegt auf der Halbierenden des Streifens, deſſen Schenkel zu den Geraden des Hyperboloids gehören (7, Anm.). Iſt nun d die Normalprojektion von D auf die Ebene ABC, m' die Mitte von dH, ſo iſt m' die Normalprojektion des Centrum des Hyperboloids. Iſt ferner S der Schwerpunkt des Dreiecks



ABC, m das Centrum des Kreiſes ABC und die Normalprojektion des Centrum der Kugel $ABCD$ auf die Ebene ABC, ſo teilt S die Strecke Hm nach dem Verhältnis 2 (Planim. §. 12, 8). Nimmt man das Tetraeder $A'B'C'D'$ hinzu, welches mit $ABCD$ demſelben Parallelepiped eingeſchrieben iſt (7), ſo teilt S die Strecke DD' nach dem Verhältnis 2, und wenn man durch d' die Normalprojektion von D' auf die Ebene ABC bezeichnet, ſo hat man auch $dS : Sd' = 2$. Daher ſind md' und dm' parallel und gleich, mm' wird von dd' halbiert, alſo iſt m' die Normalprojektion des Centrum der Kugel $A'B'C'D'$ (8). Dieſelben Bemerkungen gelten für jede Fläche des Tetraeders $ABCD$, alſo iſt das Hyperboloid mit der Kugel $A'B'C'D'$ concentriſch.

10. Wenn in einem Tetraeder eine Kante mit der gegenüberliegenden einen rechten Winkel bildet, ſo liegen die durch ihre Endpunkte gehenden Höhen des Tetraeders auf einer Ebene, und umgekehrt. Wenn in einem Tetraeder zwei folgende Kanten mit den ihnen gegenüberliegenden rechte Winkel bilden, ſo haben die Höhen des Tetraeders einen Punkt gemein, und umgekehrt.*)

Beweis. Sind Aa, Bb, Cc, Dd die Höhen des Tetraeders

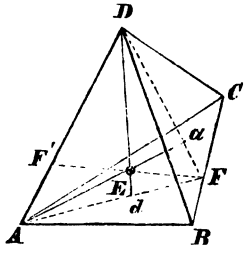


$ABCD$, und iſt CD normal zu AB, ſo ſteht die Ebene CDd normal zu AB, mithin normal zur Ebene ABD, und enthält die Höhe Cc. Ebenſo erkennt man, daß die Ebene ABb die Höhe Aa enthält. Die Ebene der Höhen Aa, Bb iſt normal zu CD, die Ebene der Höhen Cc, Dd iſt normal zu AB, alſo ſind dieſe Ebenen normal zu einander.

*) Dieſes Tetraeder kommt vor bei L'Huilier de relatione mutua p. 151. Vergl. Ferriot in Gerg. Ann. 2 p. 133. Feuerbach die dreieckige Pyramide §. 40 ff. C. F. A. Jacobi zu van Swinden p. 453 ff. Schröter Oberflächen 2ter Ordnung p. 84.

Wenn die Höhen *Cc*, *Dd* auf einer Ebene liegen, so ist diese Ebene normal zu den Ebenen *ABD*, *ABC*, mithin zu der Geraden *AB*, also ist auch *CD* normal zu *AB*.

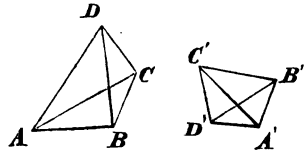
Wenn *AB* normal zu *CD*, und *BC* normal zu *AD* ist, so liegen je zwei Höhen auf einer Ebene, und alle haben einen Punkt *E* gemein (§. 1, 3). Hieraus folgt, daß auch die Kante *CA* normal zu *BD* ist. Vergl. §. 4, 15 und §. 5, 3.



Anmerkung. Die Ebenen *ADE*, *BDE*, *CDE* schneiden die Geraden *BC*, *CA*, *AB* in *F*, *G*, *H*, so daß *E* der gemeinschaftliche Höhenpunkt der Dreiecke *ADF*, *BDG*, *CDH* ist. Die Geraden *FE*, *GE*, *HE* schneiden die Geraden *AD*, *BD*, *CD* rechtwinkelig in *F'*, *G'*, *H'*. Daher gehn durch den gemeinschaftlichen Punkt der Höhen des Tetraeders, wenn ein solcher vorhanden ist, auch die gemeinschaftlichen Normalen *FF'*, *GG'*, *HH'* der gegenüberliegenden Kanten.

Zugleich sind die Produkte *AE.Ea*, *BE.Eb*, *CE.Ec*, *DE.Ed*, *FE.EF'*, *GE.EG'*, *HE.EH'* einander gleich (Planim. §. 14, 7). Daher liegt *G'* auf dem Kreis *FF'G*, *H'* auf dem Kreis *FF'H*, mithin liegen *G'* und *H'* auf der Kugel *FF'GH*. Ebenso liegen *b* und *c* auf der Kugel *ABCa*, u. s. w. Der Punkt *E* hat gleiche Potenzen in Bezug auf die 5 Kugeln *ABCa*, *BCDb*, *CADc*, *ABDa*, *FGHF'*.

11. Um zwei Tetraeder *ABCD* und *A'B'C'D'*, die durch ihre der Reihe nach gegebenen Eckpunkte bestimmt sind, hinsichtlich ihres Sinnes zu vergleichen, hat man sich zuerst in die Kante *AB* von *A* nach *B* aufwärts zu versetzen und zu beachten, ob die Bewegung von *C* nach *D* linksum oder rechtsum gehend erscheint; dann versetze man sich in die Kante *A'B'* von *A'* nach *B'* aufwärts und beachte, ob die Bewegung von *C'* nach *D'* linksum oder rechtsum gehend erscheint. Je nachdem beide Bewegungen auf den angegebenen Standpunkten dem Sinne nach übereinstimmen oder nicht, sind die Tetraeder eines Sinnes oder entgegengesetzten Sinnes. In dem ersten Falle erscheint von *A* aus die Bewegung von *B* über *C* nach *D* auf dem Perimeter *BCD* in demselben Sinne gehend, als von *A'* aus die Bewegung von *B'* über *C'* nach *D'* auf dem Perimeter *B'C'D'*; in dem zweiten Falle erscheinen die Sinne dieser Bewegungen von den angegebenen Gesichtspunkten aus einander entgegengesetzt.



Hiernach sind die Tetraeder $ABCD$ und $ABCE$ eines oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die Spitzen D und E auf derselben Seite in Bezug auf die Ebene ABC liegen oder nicht. In dem ersten Falle wird die Strecke DE von der Ebene ABC außen geteilt, in dem zweiten Falle innen.

Wenn die Formeln $ABCD$ und $A'B'C'D'$ Tetraeder eines Sinnes bezeichnen, so giebt die angezeigte Art der Vergleichung zu erkennen, daß die durch die Formeln $ABDC$ und $A'B'C'D'$, $ACBD$ und $A'B'CD'$, $BACD$ und $A'B'C'D'$ bezeichneten Tetraeder entgegengesetzten Sinnes sind. Folglich wird durch gegenseitige Vertauschung von zwei Eckpunkten in der Formel des Tetraeders jedesmal der Sinn desselben verändert.*)

12. Wenn jedem Punkt einer Raumfigur ein Punkt einer andern Raumfigur so entspricht, daß die Tetraeder $ABCD$, $ABCE$, .., welche von drei Punkten der einen Figur mit den übrigen Punkten derselben Figur gebildet werden, den entsprechenden Tetraedern der andern Figur $A'B'C'D'$, $A'B'C'E'$, .. der Reihe nach gleich und ähnlich sind, und wenn die folgenden Tetraeder $ABCE$, .. mit dem ersten $ABCD$ einerlei oder entgegengesetzten Sinn haben, je nachdem $A'B'C'E'$, .. mit $A'B'C'D'$ von einerlei oder entgegengesetztem Sinne sind: so sind die Raumfiguren $ABCDE$ .. und $A'B'C'D'E'$ .. gleich und ähnlich, d. h. alle andern Tetraeder der einen Figur sind den entsprechenden Tetraedern der andern Figur gleich und ähnlich. Die Raumfiguren sind eines oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem ein Paar entsprechende Tetraeder derselben eines oder entgegengesetzten Sinnes sind.**)

Beweis. Aus der Gleichheit und Ähnlichkeit der Tetraeder $ABCD$, $ABCE$, .. mit den entsprechenden Tetraedern schließt man, daß die Tetraeder $ABDE$, $ACDE$, .. den entsprechenden Tetraedern gleich und ähnlich sind; aus der Gleichheit und Ähnlichkeit der Tetraeder $BACD$, $BACE$, .. folgt ebenso, daß die Tetraeder $BADE$, $BCDE$, .. den entsprechenden Tetraedern gleich und ähnlich sind, u. s. f.

13. Zu zwei gleichen und ähnlichen Dreiecken von verschiedener Stellung ABC und $A'B'C'$ giebt es eine Axe s von der Art, daß sowohl die Flächenwinkel AsA', BsB', CsC', als auch die Normalprojektionen der Strecken AA', BB', CC' auf s einander gleich sind.***)

---

*) Möbius baryc. Calc. 19. Statik 63.
**) Vergl. Planim. §. 7, 1 und die daselbst citierte Abhandlung (34).
***) Vergl. §. 35 der citierten Abhandlung.

Beweis. Aus dem Centrum O einer beliebig gewählten Kugel ziehe man die Radien $O\beta$, $O\gamma$, $O\beta'$, $O\gamma'$ in den Richtungen AB, AC, $A'B'$, $A'C'$ und konstruiere den Punkt σ der Kugel, welcher so liegt, daß die sphärischen Dreiecke $\sigma\beta\gamma$ und $\sigma\beta'\gamma'$ kongruent sind (§. 4, 18). Zieht man nun AD und $A'D'$ in der Richtung des Radius $O\sigma$, so sind die an den Scheiteln A und A' gebildeten Ecken $\overline{A}BCD$ und $\overline{A'}B'C'D'$ kongruent.

Ferner lege man durch A und A' die zu AD, $A'D'$ normalen Ebenen, bilde auf denselben die Normalprojektionen EF und $E'F'$ von BC und $B'C'$, und auf der Ebene AEF die Normalprojektion $A''E''F''$ von $A'E'F'$. Dann sind die Dreiecke AEF, $A'E'F'$, $A''E''F''$ gleich und ähnlich und eines Sinnes, weil die Dreiecke AEB und $A'E'B'$, AFC und $A'F'C'$, $A'E'F'$ und $A''E''F''$ gleich und ähnlich, und die Winkel EAF und $E'A'F'$ Normalschnitte der gleichen Flächenwinkel $B\overline{AD}C$ und $B'\overline{A'D'}C'$ sind.

Konstruiert man endlich den Punkt S der Ebene AEF, welcher so liegt, daß die Figuren $SAEF$ und $SA''E''F''$ kongruent sind (Planim. §. 7, 2), und bildet man auf der Ebene $A'E'F'$ die Normalprojektion S' des Punktes S, so ist SS' die gesuchte Axe s. Denn die entsprechenden Ecken an den Scheiteln A und A' sind kongruent, die entsprechenden Kanten derselben sind gleich, also sind die Raumfiguren $AEFBC$ und $A'E'F'B'C'$ kongruent. Zugleich sind die Figuren $AEFS$ und $A'E'F'S'$ kongruent, also sind die Raumfiguren $AEFBCS$ und $A'E'F'B'C'S'$ kongruent (12), d. h. die Winkel ASE und $A'S'E'$, ASF und $A'S'F'$, ESF und $E'S'F'$ sind gleich. Hieraus erkennt man die Gleichheit der Flächenwinkel $A\overline{SS'}A'$, $B\overline{SS'}B'$, $C\overline{SS'}C'$. Wird die Gerade SS' von den Normalen aus B und B' in T und T' geschnitten, so ist $ST = S'T'$, folglich $TT' = SS'$, u. s. w.

14. Zu zwei gleichen und ähnlichen Raumfiguren eines Sinnes $ABCD\,..$ und $A'B'C'D'\,..$ giebt es eine Axe s von der Art*), daß sowohl die Flächenwinkel AsA', BsB', .., als auch die Normalprojektionen der Strecken AA', BB', .. auf s einander gleich sind (13).

Wenn die erste Figur um die Axe s rotierend den Winkel AsA' zurücklegt, so wird sie mit der andern Figur perspektivisch, die Geraden AA', BB', .. werden nach Richtung und Länge übereinstimmend,

*) Die Axe s ist von Euler bei der Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers entdeckt worden. Theoria motus corp. solid. 978 (1765). Nov. Comm. Petrop. 20 p. 199 (1776). Die augenblickliche Drehungsaxe (axe instantané) eines bewegten Körpers war von D'Alembert (Précession des équinoxes 1749 p. 83) bemerkt worden. Vergl. Euler Mém. de Berlin 1750 p. 185.

denn die Normalprojektionen beider Raumfiguren auf eine zur Axe s normale Ebene fallen zusammen. Wenn die erste Figur nun in der Richtung der Axe s fortschreitend die Strecke AA' zurücklegt, so fällt sie mit der andern Figur zusammen.

Wenn die erste Figur in der Richtung der Axe s fortschreitet, bis die Normalprojektionen von AA', BB', .. auf s verschwinden, wenn dann die erste Figur um die Axe s rotierend den Winkel $AsA' + 180^0$ zurücklegt, so kommt sie in solche Lage gegen die zweite Figur, daß in jeder durch die Axe s gehenden Ebene gleiche und ähnliche Planfiguren zu den beiden Raumfiguren gehören, welche gegen die Axe s symmetrisch liegen.

15. Zu zwei gleichen und ähnlichen Dreiecken von verschiedener Stellung ABC und $A'B'C'$ giebt es einen Diameter n von der Art, daß die Flächenwinkel AnA', BnB', CnC' einander gleich sind und daß die Normalprojektionen der Strecken AA', BB', CC' auf n eine gemeinschaftliche Mitte S haben.*)

Beweis. Aus dem Centrum O einer beliebig gewählten Kugel ziehe man die Radien $O\beta$, $O\gamma$, $O\beta'$, $O\gamma'$ in den Richtungen AB, AC, $A'B'$, $A'C'$ und konstruiere den Punkt ν der Kugel und seinen Gegenpunkt ν', welche so liegen, daß die sphärischen Dreiecke $\nu\beta\gamma$ und $\nu'\beta'\gamma'$ entgegengesetzt gleich und ähnlich sind (§. 4, 19). Zieht man nun die Geraden AH und $A'H'$ in den Richtungen der Radien $O\nu$ und $O\nu'$, so sind die an den Scheiteln A und A' gebildeten Ecken $\overline{ABCH}$ und $\overline{A'B'C'H'}$ entgegengesetzt gleich und ähnlich. Hat $A'H''$ die Richtung $O\nu$, so sind die Flächenwinkel $B\overline{AH}C$ und $B'\overline{A'H''}C'$ einander gleich.

Ferner lege man durch die Mitte von AA' die zu der Geraden AH normale Ebene, und bilde auf derselben die Normalprojektionen JKL und $J'K'L'$ der Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Die in den gleichen Flächenwinkeln $B\overline{AH}C$ und $B'\overline{A'H''}C'$ liegenden Dreiecke JKL und $J'K'L'$ sind gleich und ähnlich und eines Sinnes. Konstruiert man endlich den Punkt S der Ebene JKL, welcher so liegt, daß die Figuren $SJKL$ und $S'J'K'L'$ kongruent sind (Planim. §. 7, 3), so ist die in der Richtung AH durch S gezogene Gerade der gesuchte Diameter n. Denn die Raumfiguren $SJKLABC$ und $S'J'K'L'A'B'C'$ sind gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes, u. s. w.

16. Zu zwei gleichen und ähnlichen Raumfiguren von entgegengesetztem Sinn, $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .., giebt es einen Diameter n

*) Vergl. §. 37 der citierten Abhandlung.

von der Art, daß die Flächenwinkel AnA', BnB', .. einander gleich sind, und ein sich selbst entsprechendes Centrum S*), die gemeinschaftliche Mitte von den Normalprojektionen der Strecken AA', BB', .. auf n (15).

Wenn die erste Figur um den Diameter n rotierend den Winkel AnA' zurücklegt, so kommt sie mit der andern Figur in symmetrische Lage zu der Centralebene, deren Normale der Diameter n ist.

Wenn die erste Figur um den Diameter n rotierend den Winkel $AnA' + 180^0$ zurücklegt, so kommt sie mit der andern Figur in perspektivische Lage und die Mitten der Strecken AA', BB' vereinigen sich in dem Centrum S.

17. Wenn von zwei Tetraedern $ABCD$ und $A'B'C'D'$ die Ecken A und A' gleich und ähnlich, und die Verhältnisse der entsprechenden Kanten an diesen Ecken $AB : AC : AD$ und $A'B' : A'C' : A'D'$ der Reihe nach gleich sind, so sind die Tetraeder ähnlich, d. h. die Flächen des einen Tetraeders sind den entsprechenden Flächen des andern ähnlich, die übrigen Ecken des einen Tetraeders sind den entsprechenden Ecken des andern gleich und ähnlich. Denn zufolge der Voraussetzung sind die Dreiecke BAC und $B'A'C'$, CAD und $C'A'D'$, DAB und $D'A'B'$, DCB und $D'C'B'$ ähnlich; die Gleichheit und Ähnlichkeit der übrigen Ecken wird hiernach aus der Gleichheit ihrer Seiten erkannt.

Die Ähnlichkeit von zwei Raumfiguren $ABCDE$.. und $A'B'C'D'E'$.. ist analog wie die Gleichheit und Ähnlichkeit derselben (12) durch die Ähnlichkeit der entsprechenden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$, $ABCE$ und $A'B'C'E'$, .. bestimmt.

Zu zwei ähnlichen Raumfiguren eines Sinnes $ABCD$.. und $A'B'C'D'$.. giebt es eine Axe s und einen sich selbst entsprechenden Punkt derselben S von der Art, daß die Flächenwinkel AsA', BsB', .. gleich und die Raumfiguren $SABCD$.. und $SA'B'C'D'$.. ähnlich und eines Sinnes sind. Wenn die erste Figur um die Axe s rotierend den Winkel AsA' zurücklegt, so wird sie mit der andern Figur perspektivisch und der Punkt S wird der äußere Ähnlichkeitspunkt von beiden Figuren.

Zu zwei ähnlichen Raumfiguren entgegengesetzten Sinnes $ABCD$.. und $A'B'C'D'$.. giebt es einen Diameter n und einen sich selbst entsprechenden Punkt desselben S von der Art, daß die Flächenwinkel AnA', BnB', .. gleich und die Raumfiguren $SABCD$.. und $SA'B'C'D'$.. entgegengesetzt ähnlich sind. Wenn die erste Figur um den Diameter n

*) Magnus analyt.-geometr. Aufg. II p. 109. Vergl. die citierte Abhandlung.

rotierend den Winkel $AnA' + 180^0$ zurücklegt, so wird sie mit der andern Figur perspektivisch und der Punkt S der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Figuren.*)

§. 7. Die Polyeder.

1. Eine endliche ein einziges Stück bildende Fläche (plan, polyedrisch, krumm) ist mit einem oder mehrern Rändern (Perimetern) versehen; eine geschlossene überall in sich zurückkehrende Fläche kann als eine mit einem unendlich kleinen Rand irgendwo versehene betrachtet werden. Auf jeder Fläche können in sich zurückkehrende Schnitte gemacht werden, welche die Fläche in getrennte Stücke teilen, von denen eines ganz durch den Schnitt begrenzt ist.

Wenn die Fläche so beschaffen ist, daß jeder geschlossene Schnitt ein Stück Fläche abtrennt, welches durch den Schnitt allein vollständig begrenzt wird, so ist sie eine Fläche von einfachem Zusammenhang (connexio) und heißt **einfach zusammenhangend****), z. B. eine plane Polygonfläche, deren Perimeter sich selbst nicht schneidet, eine Kreisfläche, ein Tetraeder, eine Kugelfläche, eine Kugelzone mit einem Rand. Wenn es dagegen geschlossene Schnitte von der Art giebt, daß durch einen allein ein Stück Fläche nicht vollständig begrenzt wird, so hat die Fläche mehrfachen Zusammenhang und heißt **mehrfach zusammenhangend**, z. B. ein planer Streifen zwischen zwei geschlossenen Linien, eine Zone mit zwei Rändern, eine Ringfläche. Eine Zone mit zwei Rändern wird durch einen zwischen den Rändern sich erstreckenden geschlossenen Schnitt zwar zerstückt, aber es wird nicht jedes von beiden Stücken allein durch den Schnitt vollständig begrenzt; hingegen wird die Zone durch einen von dem einen Rand zu dem andern Rand geführten Querschnitt in eine einfach zusammenhangende Fläche aufgelöst, und ist deshalb zweifach zusammenhangend. Eine runde Ringfläche kann durch einen in sich zurückkehrenden Schnitt in eine zweifach zusammenhangende Fläche aufgelöst werden, und ist deshalb dreifach zusammenhangend. Eine Fläche ist $n$fach zusammenhangend, wenn sie nach $n-1$

---

*) Euler de centro similitudinis 1777 (Nov. Act. Petrop. 9 p. 154). Magnus analyt.-geometr. Aufgaben II p. 89 ff. Vergl. §. 50 ff. der citierten Abhandlung.

**) Diese wichtige Unterscheidung verdankt man Riemann Grundlagen 2c. 1851 (6). Lehrsätze aus der analysis situs 1857 Borchardt J. 54 p. 105. Vergl. Neumann Abelsche Integrale 1865 p. 291. Listing Census räumlicher Komplexe 1861 (Gött. Abh. Bd. 10) und Gött. Nachr. 1867 Nov. 13. Jordan Borchardt J. 66 p. 22. 68 p. 297. Dieselbe Unterscheidung ist von Möbius Theorie der Elementar-Verwandtschaft (Leipz. Berichte 1863 p. 18) gemacht worden.

succeſſiven Zerſchneidungen noch unzerſtückt aber einfach zuſammenhangend iſt. Eine mit r Rändern verſehene Fläche iſt $(r+2k)$fach zuſammenhangend, wobei k eine der Zahlen 0, 1, 2, .. bedeutet.

In den folgenden Sätzen iſt unter einem Polyeder (§. 6, 1) ein gemeines (ein-zelliges, mit nicht mehrfach zuſammenhangender Oberfläche) zu verſtehn, welches auch ein Eulerſches Polyeder (nach Heſſel) genannt wird.

2. Ein Polyeder von f Flächen und e Ecken hat $f+e-2$ Kanten.*)

Beweis 1. Nach Wegnahme eines der Polygone, aus denen das Polyeder beſteht, behält man ein offenes Polyeder von $f-1$ Flächen, e Eckpunkten und k Kanten. Nimmt man vom Rande desſelben ein Polygon weg, ſo behält man ein offenes Polyeder von $f_1 = f-2$ Flächen, $e_1 = e$ Eckpunkten und $k_1 = k-1$ Kanten. Nimmt man vom Rande desſelben wiederum ein Polygon weg, ſo behält man ein offenes Polyeder von $f_2 = f_1 - 1$ Flächen, $e_2 = e_1 - m$ Eckpunkten und $k_2 = k_1 - m - 1$ Kanten. U. ſ. w. Dabei iſt

$$f-1+e-k = f_1+e_1-k_1 = f_2+e_2-k_2 = \ldots$$

Endlich bleibt 1 Polygon mit ebenſoviel Eckpunkten als Kanten (Seiten) übrig. Alſo iſt $f-1+e-k = 1$, $f+e-k = 2$.

Beweis 2. Um von einer Ecke zu allen andern Ecken auf einer aus Kanten beſtehenden Linie überzugehn, ſind $e-1$ Kanten erforderlich und hinreichend. Nachdem das Polyeder längs dieſer Kanten zerſchnitten worden iſt, muß es, um in ſeine f Flächen zerſtückt zu werden, noch längs der übrigen Kanten zerſchnitten werden. Zu der Zerſtückung in f Teile ſind $f-1$ Zerſchneidungen an ebenſoviel Kanten erforderlich. Alſo hat das Polyeder $e-1+f-1$ Kanten.

Anmerkung. Wenn man Polyeder ſo zuſammenſtellt, daß nur zum Teil eine Fläche des einen von einer Fläche des andern, oder eine Ecke des einen von einer Ecke des andern gedeckt wird, ſo erhält

*) Dieſes Grundgeſetz der Polyedrometrie war vielleicht im Altertum bemerkt worden, weil Archimedes die Reihe der halbregulären Polyeder vollſtändig anzugeben vermocht hat, und findet ſich angedeutet in einem 1860 herausgegebenen Fragment von Descartes Oeuvres inédites de Descartes p. M. Foucher de Careil, II p. 214, vergl. den Aufſatz des Verf. im Monatsbericht der Berl. Akad. 1861 p. 1043. Entdeckt und bekannt gemacht wurde es von Euler 1752 Nov. Comm. Petrop. 4 p. 109, bewieſen p. 156. Andere Beweiſe hat man von Cauchy 1813 J. de l'Éc. polyt. Cah. 16 p. 77 und Grunert Crelle J. 2 p. 367 (Beweis 1.), Staudt 1847 Geom. d. Lage 49 und Thieme briefl. Mitteilung, Petersburg 1867 Nov. 10 (Beweis 2.), Auguſt Progr. d. köln. Realgymn. Berlin 1854 p. 4, endlich durch Betrachtung von Winkelſummen ſphäriſcher oder planer Polygone von Legendre Geom. VII, 25, L'Huilier 1812 Gerg. Ann. 3 p. 178 und Steiner Crelle J. 1 p. 364.

man ein außerordentliches Polyeder, bei welchem die Anzahlen der Flächen, Ecken und Kanten von dem obigen Zusammenhang mehr oder weniger sich entfernen.*)

Wenn man ein Polyeder durch Hinzufügung von Ecken und Flächen in eine Summe von n Polyedern zerlegt, an denen es im ganzen f, e, k verschiedene Flächen, Ecken, Kanten giebt, so ist $f+e-k=1+n$. Gesetzt, das erste unter den vereinten Polyedern hat f_1 Flächen, e_1 Ecken und k_1 Kanten; das folgende hat mit dem ersten f_2 Flächen, e_2 Ecken, k_2 Kanten nicht gemein; das folgende hat mit den vorhergehenden f_3 Flächen, e_3 Ecken, k_3 Kanten nicht gemein, u. s. w. Jedes Polyeder hat aber mit dem folgenden ein ebenes oder unebenes Polygon gemein, also ist nach dem Obigen

$$f_1+e_1-k_1=2,\quad f_2+e_2-k_2=1,\quad f_3+e_3-k_3=1$$

u. s. w. Die Addition giebt $f+e-k=1+n$. Cauchy a. a. O.

3. Die Anzahl der Polygonwinkel auf einem Polyeder ist zweimal so groß als die Anzahl der Kanten. Denn jedes Polygon hat soviel Winkel als Seiten; unter den Seiten aller Polygone kommt jede Kante zweimal vor. Die Anzahl der Polygonwinkel ist gerade, also können unter den Flächen und unter den Ecken des Polyeders Polygone von ungerader Eckenzahl und Ecken von ungerader Seitenzahl nur in gerader Anzahl vorkommen.

Bei einem Polyeder von f Flächen, e Ecken und k Kanten ist

$$6+k\leqq 3f\leqq 2k,\qquad 6+k\leqq 3e\leqq 2k,$$
$$4+e\leqq 2f\leqq 4e-8,\qquad 4+f\leqq 2e\leqq 4f-8$$

Denn es giebt $2k$ Polygonwinkel, und jede Fläche ist mindestens dreieckig, jede Ecke mindestens dreiseitig. Nun ist (2) $f=2+k-e$, $e=2+k-f$, folglich $6+3k-3e\leqq 2k$, u. s. w. Aus den ersten beiden Begrenzungen folgen die beiden letzten, indem man k durch $f+e-2$ ersetzt. Descartes und Euler a. a. O.

Wenn alle Flächen $m$eckig sind, so ist

$$mf=2k,\quad e-2=k-f=\tfrac{1}{2}f(m-2)$$

Wenn alle Ecken $n$seitig sind, so ist

$$ne=2k,\quad f-2=k-e=\tfrac{1}{2}e(n-2)$$

Unter den beiden Bedingungen ist

$$(m-2)(n-2):4=(e-2)(f-2):ef<1$$

also $m=3$, $n=3,4,5$ und $n=3$, $m=4,5$.

*) Poinsot 1810 J. de l'Éc. polyt. Cah. 10 p. 46, L'Huilier a. a. O., der die Fälle, in denen das Eulersche Gesetz nicht gilt, bereits klassificiert hat, Hessel Crelle J. 8 p. 13. Vergl. C. F. A. Jacobi zu van Swinden Geom. p. 436. Möbius Elementar-Verwandtschaft §. 22, Leipz. Berichte 1863.

Es können weder alle Flächen mehr als fünfeckig, noch alle Ecken mehr als fünfseitig sein; sonst wäre die Anzahl der Polygonwinkel mindestens $6f$ oder $6e$, also k mindestens $3f$ oder $3e$, während doch $6+k$ weder $3f$ noch $3e$ übersteigen kann.

Es giebt kein Polyeder von 7 Kanten, denn die 3fache Anzahl der Flächen oder Ecken müßte zwischen 13 und 14 liegen.

Eine Klassifikation der möglichen Polyeder von k Kanten (von f Flächen und e Ecken) ist noch nicht zustande gebracht worden.*)

4. Wenn unter den f Flächen eines Polyeders f_3 dreieckige, f_4 viereckige, .., unter den e Ecken desselben e_3 dreiseitige, e_4 vierseitige, .. sind, und das Polyeder k Kanten hat, so ist**)

$$\begin{aligned} f &= f_3+ f_4+ f_5+ .. \\ e &= e_3+ e_4+ e_5+ .. \\ 2k &= 3f_3+4f_4+5f_5+ .. \\ &= 3e_3+4e_4+5e_5+ .. \end{aligned}$$

Nun hat man (2) $2f+2e = 4+2k$, also

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad 2(f_3+f_4+..) &= 4+e_3+2e_4+3e_5+ .. \\ 2(e_3+e_4+..) &= 4+f_3+2f_4+3f_5+ .. \end{aligned}$$

Hieraus findet man durch Addition

$$\text{II.}\quad f_3+e_3 = 8+(f_5+e_5)+2(f_6+e_6)+ ..$$

Wenn man die Gleichungen (I) addiert, nachdem man die eine mit 2 multipliciert hat, so erhält man

$$\begin{aligned} \text{III.}\quad 3f_3+2f_4+f_5 &= 12+2e_4+4e_5+ .. +f_7+2f_8+ .. \\ 3e_3+2e_4+e_5 &= 12+2f_4+4f_5+ .. +e_7+2e_8+ .. \end{aligned}$$

Wenn man die Gleichungen (I) addiert, nachdem man die eine mit 3, die andere mit 2 multipliciert hat, so erhält man

$$\begin{aligned} \text{IV.}\quad 4f_3+2f_4+e_3 &= 20+2e_4+5e_5+8e_6+ .. +2f_6+4f_7+ .. \\ 4e_3+2e_4+f_3 &= 20+2f_4+5f_5+8f_6+ .. +2e_6+4e_7+ .. \end{aligned}$$

Aus (II) schließt man, daß bei keinem Polyeder dreieckige Flächen und dreiseitige Ecken zugleich fehlen können; es sind deren zusammen wenigstens 8 vorhanden.

Die Gleichungen (III) lehren:

Ein Polyeder ohne dreieckige und viereckige Flächen hat wenigstens 12 fünfeckige Flächen; ohne dreiseitige und vierseitige Ecken hat es wenigstens 12 fünfseitige Ecken.

---

*) Vergl. die Anfänge bei Euler a. a. O. Steiner 1828 Gerg. Ann. 19 p. 36, Poinsot Compt. rend. 1858a p. 65, Jordan a. a. O.

**) Diese Betrachtungen sind von Legendre (Géom. Note 8) begonnen und von Gergonne (Ann. de Math. 15 p. 157) dualistisch ausgeführt worden.

Ein Polyeder ohne dreieckige und fünfeckige Flächen hat wenigstens 6 viereckige Flächen; ohne dreiseitige und fünfseitige Ecken hat es wenigstens 6 vierseitige Ecken.

Ein Polyeder ohne viereckige und fünfeckige Flächen hat wenigstens 4 dreieckige Flächen; ohne vierseitige und fünfseitige Ecken hat es wenigstens 4 dreiseitige Ecken.

Ein Polyeder, dessen Ecken sämtlich dreiseitig sind, und unter dessen Flächen außer beliebig viel sechseckigen nur entweder dreieckige, oder viereckige, oder fünfeckige vorkommen, hat nicht mehr und nicht weniger als 4 dreieckige, 6 viereckige, 12 fünfeckige Flächen.

Ein Polyeder, dessen Flächen sämtlich dreieckig sind, und unter dessen Ecken außer beliebig viel sechsseitigen nur entweder dreiseitige, oder vierseitige, oder fünfseitige vorkommen, hat 4 dreiseitige, 6 vierseitige, 12 fünfseitige Ecken.

Die Gleichungen (IV) lehren:

Ein Polyeder ohne dreieckige und viereckige Flächen hat wenigstens 20 dreiseitige Ecken; ohne dreiseitige und vierseitige Ecken hat es wenigstens 20 dreieckige Flächen.

Ein Polyeder, dessen Flächen fünfeckig und dessen Ecken dreiseitig sind, hat 20 Ecken. Ein Polyeder, dessen Ecken fünfseitig und dessen Flächen dreieckig sind, hat 20 Flächen.

Anmerkung. Die an besondern Polyedern früher*) wahrgenommene Dualität ist durchgängig vorhanden: jedem gegebenen Polyeder läßt sich ein polares Polyeder so beiordnen, daß jeder $m$seitigen Ecke des einen eine $m$eckige Fläche des andern, jeder $n$eckigen Fläche des einen eine $n$seitige Ecke des andern entspricht, und daß beide Polyeder gleichviel Kanten haben. Man hat nur nötig, in Bezug auf eine beliebig gewählte Kugel die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ aufzusuchen, deren Pole die Eckpunkte des gegebenen Polyeders $A, B, C, \ldots$ sind (§. 5, 12).

5. Unter den Polyedern sind besonders die regulären (Platonischen) beachtet worden**), welche reguläre Flächen und reguläre Ecken von je einer Art haben.

Ein reguläres Polyeder, dessen Flächen Dreiecke sind, hat entweder dreiseitige, oder vierseitige, oder fünfseitige Ecken. In dem ersten Falle hat es 4 Dreiecke und 4 dreiseitige Ecken (4, III und II), und

*) Maurolycus 1532 (vergl. J. H. T. Müller in Grunert Archiv 34 p. 1). Keppler harm. mundi V, 1. Meister 1785 Comm. Götting. VII p. 39. Der allgemeine Satz hat seinen genauern Ausdruck durch Gergonne a. a. O. erhalten.

**) Die Entdeckung der Platonischen Polyeder (Plato Tim. p. 55 und de anima mundi p. 98) wird der Pythagoreischen Schule zugeschrieben. Von denselben handelt Euclides Elem. XIII ff.

heißt ein Tetraeder. In dem zweiten Falle hat es 8 Dreiecke und 6 vierseitige Ecken, und heißt ein Oktaeder. In dem dritten Falle hat es 20 Dreiecke und 12 fünfseitige Ecken (4, IV und III), und heißt ein Ikosaeder. Es können nicht alle Ecken sechsseitig sein (3).

Ein reguläres Polyeder, dessen Flächen Vierecke sind, kann nur dreiseitige Ecken haben, und hat deren 8 (4, II) nebst 6 Flächen (4, III), und heißt ein Hexaeder.

Ein reguläres Polyeder, dessen Flächen Fünfecke sind, kann nur dreiseitige Ecken haben und hat deren 20 (4, IV) nebst 12 Flächen (4, III), und heißt ein Dodekaeder. Es können nicht alle Flächen Sechsecke sein.

Davon bilden das Tetraeder mit sich selbst, Oktaeder und Hexaeder, Ikosaeder und Dodekaeder je ein Paar, so daß jeder $m$eckigen Fläche des einen Polyeders eine $m$seitige Ecke des andern entspricht.

6. Unter halbregulären (Archimedischen) Polyedern*) werden solche verstanden, die gleiche und ähnliche Ecken haben, eingeschlossen von regulären Flächen verschiedener Arten. Denselben zugeordnet sind solche Polyeder, die gleiche und ähnliche Flächen haben, und an jeder Fläche reguläre Ecken verschiedener Arten.

I. Wenn das Polyeder nur $m$seitige Ecken hat, so ist (3)

$$2k = me = 2e + 2f - 4$$

$$e = 2\frac{f-2}{m-2}$$

Die möglichen Fälle sind (3)

$$m = 3, \quad 2k = 3e = 6(f-2)$$
$$m = 4, \quad k = 2e = 2(f-2)$$
$$m = 5, \quad 2k = 5e = \tfrac{1}{3}0(f-2)$$

II. Wenn an jeder Ecke des Polyeders α $a$eckige, β $b$eckige, γ $c$eckige, .. Flächen liegen, so ist

$$2k = (\alpha + \beta + ..)e$$

Auf dem Polyeder giebt es αe Winkel, die den $a$eckigen Flächen angehören, und den $a$ten Teil soviel Flächen von dieser Art, u. s. w., folglich ist

$$f = \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + ..\right)e$$

*) Die von Archimedes entdeckten halbregulären Polyeder kennt man aus Pappus' Beschreibung V. Einleitung zu prop. 18. Die Oberflächen-Netze findet man bei A. Dürer Unterweisung u. s. w. 1538. Vergl. Keppler harmonice mundi II. 28. Meier Hirsch geom. Aufg. II p. 127 ff. Die halbregulären Polyeder, welche den Archimedischen polar zugeordnet sind, sind in J. H. T. Müllers Trigonometrie 1852 p. 345 erwähnt.

Vermöge der Gleichung $2f + 2e - 2k = 4$ hat man also

$$\left(\frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} + .. + 2 - \alpha - \beta - ..\right)e = 4$$

oder

$$\left(2 - \alpha\frac{a-2}{a} - \beta\frac{b-2}{b} - ..\right)e = 4^*)$$

Der Subtrahend hat seinen geringsten Wert, wenn $\alpha = \beta = .. = 1$, $a = 3$, $b = 4$, ... Nun ist aber $2 < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$; also giebt es kein Polyeder, dessen Ecken sämtlich auf gleiche Weise von mehr als dreierlei Polygonen eingeschlossen werden.

III. Wenn alle Ecken des Polyeders auf gleiche Weise von α *a*eckigen, β *b*eckigen und γ *c*eckigen Flächen eingeschlossen sind, und eine der Zahlen a, b, c, z. B. a ungerade ist, so muß eine der Zahlen $\alpha - 1$, β, γ mindestens 2 betragen.**) Vereinigt man mit der ersten, dritten, fünften, .. Seite eines *a*ecks jedesmal eine Seite eines *a*ecks, so treffen zuletzt an einer Ecke drei *a*ecke zusammen. Vereinigt man mit der ersten, dritten, fünften, .. Seite des *a*ecks jedesmal eine Seite eines *b*ecks, so treffen zuletzt an einer Ecke zwei *b*ecke zusammen. Daher kann nicht jede der Zahlen $\alpha - 1$, β, γ weniger als 2 betragen.

IV. Hiernach ergeben sich als möglich

Archimedische Polyeder mit dreiseitigen Ecken:

Jede Ecke wird von einem *a*eck und zwei *b*ecken eingeschlossen. Die Zahl b muß gerade sein (III). Man hat (II)

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{4}{b} - 1\right)e = 4$$

und erhält folgende Auflösungen

a	n	3	3	3	4	5
b	4	6	8	10	6	6
e	$2n$	12	24	60	24	60

Ein Polyeder dieser Art hat $\frac{e}{a}$ *a*eckige und $\frac{2e}{b}$ *b*eckige Flächen.

Wird jede Ecke von einem *a*eck, einem *b*eck und einem *c*eck eingeschlossen, so müssen a, b, c gerade Zahlen sein. Die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 1\right)e = 4$$

hat nur zwei Auflösungen

---

*) Meier Hirsch a. a. O. p. 171.
**) Keppler a. a. O. II, 17. Meier Hirsch a. a. O. p. 142.

a	b	c	e
4	6	8	48
4	6	10	120

Ein solches Polyeder hat $\frac{e}{a}$ $a$eckige, $\frac{e}{b}$ $b$eckige und $\frac{e}{c}$ $c$eckige Flächen.

Archimedische Polyeder mit vierseitigen Ecken:

Jede Ecke wird von drei $a$ecken und einem $b$eck eingeschlossen. Die Gleichung

$$\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}-1\right)e=2$$

hat die Auflösungen

a	b	e
3	n	$2n$
4	3	24

Ein solches Polyeder hat $\frac{3e}{a}$ $a$eckige und $\frac{e}{b}$ $b$eckige Flächen.

Wird jede Ecke von zwei $a$ecken und zwei $b$ecken eingeschlossen, so hat man die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}-1\right)e=2$$

mit den Auflösungen

a	b	e
3	4	12
3	5	30

Ein solches Polyeder hat $\frac{2e}{a}$ $a$eckige und $\frac{2e}{b}$ $b$eckige Flächen.

Wird jede Ecke von einem $a$eck, zwei $b$ecken und einem $c$eck eingeschlossen, so muß b gerade sein. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}-1\right)e=2$$

folgt nur

a	b	c	e
3	4	5	60

Dieses Polyeder hat 20 Dreiecke, 30 Vierecke und 12 Fünfecke.

Archimedische Polyeder mit fünfseitigen Ecken:

Jede Ecke wird von vier $a$ecken und einem $b$eck eingeschlossen. Die Gleichung

$$\left(\frac{8}{a}+\frac{2}{b}-3\right)e=4$$

hat die Auflösungen

a	b	e
3	4	24
3	5	60

Ein solches Polyeder hat $\frac{4e}{a}$ $a$eckige und $\frac{e}{b}$ $b$eckige Flächen.

Anmerkung. Pappus und Keppler zählen 13 Archimedische Polyeder, weil sie wegen ihrer Unbestimmtheit die $2n$eckigen Polyeder weglassen, deren Ecken entweder jede von zwei Vierecken und einem $n$eck oder jede von drei Dreiecken und einem $n$eck eingeschlossen werden.

V. Für Polyeder, welche nur $m$eckige Flächen haben, erhält man die entsprechenden Resultate durch gegenseitige Vertauschung von e und f, $a$eckigen Flächen und $a$seitigen Ecken, und findet den Archimedischen polar zugeordnete Polyeder mit dreieckigen, viereckigen, fünfeckigen Flächen. Unter diesen Polyedern sind besonders die Rhomboeder (§. 6, 6) mit mehrerlei Ecken*) betrachtet worden; das eine von 12 Rhomben hat an jeder Fläche zwei dreiseitige und zwei vierseitige Ecken, das andere von 30 Rhomben hat an jeder Fläche zwei dreiseitige und zwei fünfseitige Ecken.

7. Nach andern als den oben angegebenen Bestimmungen sind Platonische und Archimedische Polyeder nicht möglich. Die Realität eines ganz oder zum Teil regulären Polyeders, dessen Bestimmungen der Natur eines solchen nicht widersprechen, wird erkannt, indem man eine Kugelfläche durch Hauptkreise in ein sphärisches Polyeder teilt, dessen Polygone sphärisch sind und dieselbe Art, Anzahl, Reihenfolge haben als die planen Polygone des zu konstruierenden Polyeders.

Dazu ist erforderlich, daß man aus einem willkürlich gewählten Punkt O der Kugel die Bogen OA_1, OA_2, .. von gleicher Länge so zieht, daß die Winkel der Sehnen A_1OA_2, A_2OA_3, .. den Winkeln der regulären planen Polygone gleich werden, die eine Ecke des Polyeders einschließen.**) Dann enthalten die Ebenen A_1OA_2, A_2OA_3, ..

*) Keppler a. a. O. II, 27. Meier Hirsch a. a. O. p. 186.

**) Bezeichnet man den gesuchten Centriwinkel der gleichen Bogen OA_1, OA_2, .. durch η, die gesuchten Winkel der Bogen A_1OA_2, A_2OA_3, .. durch ϑ_1, ϑ_2, .., die gegebenen Winkel der Sehnen A_1OA_2, A_2OA_3, .. durch λ_1, λ_2, .., so bilden die Sehnen mit dem von O ausgehenden Radius der Kugel den Winkel $90^0-\frac{1}{2}\eta$, und man hat aus sphärisch-trigonometrischen Gründen

$$\cos\tfrac{1}{2}\eta=\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1:\sin\tfrac{1}{2}\lambda_1=\ldots,$$

reguläre plane Polygone, die der Kugel eingeschrieben sind, und deren Seiten ebenso lang sind als die gleichen Sehnen OA_1, OA_2, ... Die Eckpunkte dieser Polygone bestimmen wiederum reguläre sphärische Polygone, und zwar α $a$ecke, β $b$ecke, γ $c$ecke, die um den Punkt O in der gesuchten Weise liegen. In der That betragen $\frac{\alpha e}{a}$ solche reguläre sphärische $a$ecke, $\frac{\beta e}{b}$ $b$ecke, $\frac{\gamma e}{c}$ $c$ecke zusammen eine Kugelfläche. Sind nämlich ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 die Winkel der regulären sphärischen $a$ecke, $b$ecke, $c$ecke, so hat die Fläche des $a$ecks (§. 4, 5) den Wert $a\vartheta_1 - (a-2).180^0$, u. s. w. Es ist aber

$$\frac{\alpha e}{a}[a\vartheta_1 - (a-2).180^0] + \frac{\beta e}{b}[b\vartheta_2 - (b-2).180^0]$$

$$+ \frac{\gamma e}{c}[c\vartheta_3 - (c-2).180^0]$$

$$= [\alpha\vartheta_1 + \beta\vartheta_2 + \gamma\vartheta_3 - \left(\alpha+\beta+\gamma - \frac{2\alpha}{a} - \frac{2\beta}{b} - \frac{2\gamma}{c}\right).180^0]e$$

$$= 4.180^0 \text{ (6, II), weil } \alpha\vartheta_1 + \beta\vartheta_2 + \gamma\vartheta_3 = 2.180^0$$

Hiernach liegen alle Ecken eines Archimedischen Polyeders auf einer Kugel; die Ecken desselben, welche mit einer Ecke durch Kanten verbunden sind, liegen auf einer Ebene.

Zu einem Archimedischen Polyeder findet man das polare, indem man durch die Eckpunkte die Ebenen legt, welche die umgeschriebene Kugel berühren. Wenn mehrere Eckpunkte auf einer Ebene liegen, so gehn die dazu gehörigen Tangentenebenen durch einen Punkt (§. 3, 6). Einem regulären $a$eck entspricht daher eine reguläre $a$seitige Ecke, statt der $m$seitigen Ecken erhält man bestimmte $m$eckige Flächen. Alle Flächen des polaren Polyeders berühren eine Kugel; die Flächen desselben, welche mit einer Fläche durch Kanten verbunden sind, haben (erweitert) einen Punkt gemein.

Die Eckpunkte eines Platonischen Polyeders liegen auf einer Kugel, deren Centrum von den Flächen und von den Kanten je gleiche Abstände hat. Also werden die Flächen in ihren Mitten (den Eckpunkten eines polaren Polyeders) und die Kanten in ihren Mitten von je einer concentrischen Kugel berührt. Die Centralebene, welche eine Kante $2a$ des Polyeders enthält, schneidet die Kugeln in Hauptkreisen derselben mit

---

also

$$\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1 : \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2 : \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3 = \sin\tfrac{1}{2}\lambda_1 : \sin\tfrac{1}{2}\lambda_2 : \sin\tfrac{1}{2}\lambda_3$$

nebst $\alpha\vartheta_1 + \beta\vartheta_2 + \gamma\vartheta_3 = 360^0$. Vergl. Meier Hirsch a. a. O. p. 151 und 176.

den Radien r, r', r'', und das Polyeder in einem symmetrischen Polygon, das Tetraeder in einem Dreieck, das Oktaeder und das Hexaeder in einem Viereck, das Ikosaeder und das Dodekaeder in einem Sechseck. Nachdem man den Radius r'' und den Radius ϱ des einer Fläche des Polyeders umgeschriebenen Kreises durch a ausgedrückt hat, findet man

$$r^2 = r''^2 - a^2, \quad r'^2 = r^2 - \varrho^2 \text{*)}$$

Anmerkung. Neben dem Platonischen Ikosaeder und Dodekaeder giebt es noch ein Stern-Ikosaeder und Stern-Dodekaeder, jenes mit 12 fünfseitigen Ecken, deren Kugelschnitte reguläre sphärische Stern-Fünfecke sind, und die von regulären Dreiecken eingeschlossen werden; dieses mit 20 dreiseitigen Ecken, die von regulären Stern-Fünfecken eingeschlossen werden. Außerdem kennt man zwei außerordentliche (2, Anm.) reguläre Polyeder, beide mit 12 fünfseitigen Ecken, deren Scheitel mit denen eines Platonischen Ikosaeders zusammenfallen und deren Kugelschnitte reguläre sphärische Stern-Fünfecke bei dem einen, gemeine Fünfecke bei dem andern sind, beide mit 12 Flächen, die bei dem einen reguläre gemeine Fünfecke, bei dem andern Stern-Fünfecke sind; beide mit 30 Kanten.**)

8. Wenn das Polyeder e Ecken hat und seine Flächen Polygone sind, deren Perimeter sich selbst nicht schneiden, so beträgt die Summe der Polygonwinkel auf dem Polyeder $(2e-4).180^0$, doppelt soviel als die Summe der Winkel eines planen $e$ecks.***)

Beweis 1. Das Polyeder habe k Kanten und f Flächen, darunter eine $a$eckige, eine $b$eckige, ... Die Summe der Winkel des planen $a$ecks von der vorausgesetzten Beschaffenheit beträgt $(a-2).180^0$. Also beträgt die Summe der Winkel auf dem Polyeder $(a+b+..-2f).180^0$. Nun ist $a+b+..$ die Anzahl dieser Winkel, welche $2k$ beträgt, folglich (2)

$$a+b+..-2f = 2k-2f = 2e-4$$

Beweis 2. Eine $a$seitige Ecke des Polyeders ist von a Dreiecken umgeben, welche eine gemeinschaftliche Spitze haben und deren Basen ein

*) Amthor Brief Dresden 1871.

**) Das Stern-Dodekaeder und das außerordentliche Polyeder von Stern-Fünfecken sind von Keppler 1619 (Harm. mundi II, 26) zuerst beschrieben und gezeichnet, die beiden andern regulären Polyeder von Poinsot 1810 (J. de l'Éc. polyt. Cah. 10 p. 39). Von den möglichen Varietäten der Platonischen Polyeder handeln außer Poinsot a. a. O. noch Cauchy J. de l'Éc. polyt. Cah. 16 p. 68 und Bertrand Compt. rend. 1858 p. 79. Vergl. Cayley Philos. Mag. 1859 p. 123. Wiener Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864. Heis und Eschweiler Trigon. 1867 p. 294. Hessel Gleicheckige Polyeder, Marburg 1871. Heß Varietäten der Archimedeischen Körper, Marburger Berichte 1872.

***) Descartes und Euler a. a. O.

Polygon bilden. Wenn man diese Dreiecke von dem Polyeder abtrennt, so entsteht eine Öffnung, die man mit $a-2$ Dreiecken bedecken kann. Von dem Polyeder mit e Ecken, dessen Flächen aus d Dreiecken bestanden, behält man demnach ein Polyeder mit $e-k$ Ecken, dessen Flächen aus $d-2k$ Dreiecken bestehn. Bei 4 Ecken giebt es 4 Dreiecke, also ist

$$d-2(e-4) = 4, \quad d = 2e-4$$

9. Wenn das Polyeder f Flächen hat und seine Ecken Kugelschnitte haben, deren Perimeter sich selbst nicht schneiden, so beträgt die doppelte Summe seiner Flächenwinkel weniger die Summe seiner Ecken $(2f-4).180^0$, doppelt soviel als die Summe der Winkel eines planen $f$ecks.*)

Beweis. Das Polyeder habe k Kanten und e Ecken, darunter eine $a$seitige, eine $b$seitige, ... Die Winkel der $a$seitigen Ecke haben die Summe α, u. s. w. Dann beträgt die $a$seitige Ecke $\alpha-(a-2).180^0$. Vergl. §. 4, 5 und §. 5, 2. Also hat die Summe v der Ecken des Polyeders den Wert $\alpha+\beta+\ldots-(a+b+\ldots-2e).180^0$. Nun ist $\alpha+\beta+\ldots$ die doppelte Summe $2u$ der Flächenwinkel des Polyeders, $a+b+\ldots$ die doppelte Anzahl $2k$ der Polygonwinkel des Polyeders, folglich

$$v = 2u-(2k-2e).180^0 = 2u-(2f-4).180^0$$

Anmerkung. Bezeichnet man die Summe der Polygonwinkel des Polyeders durch t, so ist

$$t = (2e-4).180^0$$
$$2u-v = (2f-4).180^0$$

folglich

$$t+2u-v = (2k-4).180^0$$

doppelt soviel als die Summe der Winkel eines planen $k$ecks.

§. 8. Kubatur der Prismen und Pyramiden.

1. Wenn zwei Prismen (Cylinder) kongruente Normalschnitte und gleiche Längenkanten haben, so haben sie gleiche Volume.**)

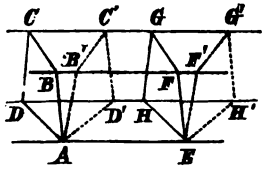
Beweis. Die unbegrenzten Prismen, deren Segmente in Betracht

---

*) Français Gerg. Ann. 3 p. 189. Grunert Crelle J. 5 p. 41. Brianchon J. de l'Éc. polyt. Cah. 25 p. 317. Den entsprechenden Satz für das Tetraeder hatte De Gua bemerkt Mém. de Paris 1783 p. 369.

**) Dieser Satz kommt bei Eucl. XI, 28 in dem Beweise vor. Den gebührenden Rang hat er bei den Neuern erhalten, z. B. Bretschneider Geom. §. 466, J. H. T. Müller Stereom. p. 93.

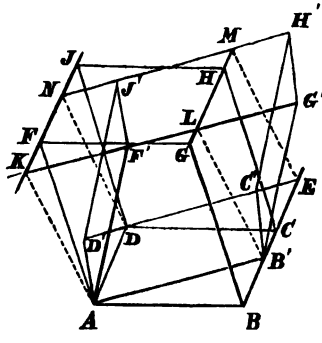
kommen, lassen sich wegen der Kongruenz ihrer Normalschnitte (§. 5, 4) so vereinigen, daß ein Paar gleiche Längenkanten z. B. in AE zusammenfallen. Die Vergleichung der Volume $ABCDEFGH$ und $AB'C'D'EF'G'H'$ beruht nun auf der Vergleichung der Polyeder $ABCDB'C'D'$ und $EFGHF'G'H'$. Die Flächen $ABCD$ und $EFGH$ sind kongruent, ebenso die Ecken A und E, B und F, C und G, D und H, dazu sind die Kanten BB' und FF', CC' und GG', DD' und HH' gleich, also sind die Polyeder $ABCDB'C'D'$ und $EFGHF'G'H'$ kongruent. Nach der Subtraktion dieser Polyeder von dem Polyeder $ABCDEF'G'H'$ behält man die gleichen Prismen $ABCDEFGH$ und $AB'C'D'EF'G'H'$.



Anmerkung. Ein dreiseitiges Prisma ist halb so groß an Volum als ein Parallelepiped, das mit ihm eine Ecke und die anliegenden Kanten gemein hat. Denn das Parallelepiped wird durch ein Diagonalparallelogramm in zwei dreiseitige Prismen geteilt, welche kongruente Normalschnitte und gleiche Längenkanten, mithin gleiche Volume haben. Vergl. §. 6, 6.

2. Wenn zwei Parallelepipede gleiche Basen und gleiche Höhen haben, so sind sie gleich an Volum.*)

Beweis. Die gleichen Basen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ der beiden Parallelepipede p und p' können, wenn z. B. $A'B' > AB$ ist, so auf eine Ebene gelegt werden, daß A' auf A und B' auf BC fällt. Dann geht die Gerade $C'D'$ durch den Punkt D, weil das Dreieck $AB'D$ halb so groß ist als das Parallelogramm $ABCD$, mithin auch halb so groß als das Parallelogramm $A'B'C'D'$. Die den Basen gegenüberliegenden Flächen $FGHJ$ und $F'G'H'J'$ der Parallelepipede liegen auf einer Ebene, weil die Parallelepipede gleiche Höhen haben. Die Kanten FJ und $F'G'$ schneiden sich in K. Die Vergleichung der Parallelepipede p und p' beruht nun auf ihrer Vergleichung mit dem Parallelepiped q, dessen Basis $AB'ED$ und dessen gegenüberliegende



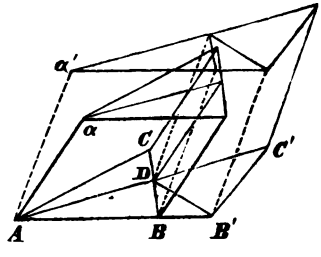
*) Eucl. XI, 31. Die den Beweis wesentlich vereinfachende Zusammenlegung der Basen ist von J. H. T. Müller (Stereom. p. 96) angegeben worden.

Fläche $KLMN$ ist. Die Parallelepipede p und q sind Prismen von gleichem Volum (1), weil ihre Längenkanten gleich AD und ihre Normalschnitte kongruent sind als Normalschnitte des vierseitigen Prisma, dessen Kanten AD, BE, GM und KJ. Ebenso sind die Parallelepipede p' und q Prismen von gleichem Volum, weil ihre Längenkanten gleich AB' und ihre Normalschnitte kongruent sind als Normalschnitte des vierseitigen Prisma, dessen Kanten AB', $D'E$, NH', KG'. Aus den Gleichungen $p = q$ und $p' = q$ folgt $p = p'$.

Anmerkung. Wenn zwei dreiseitige Prismen gleiche Basen und gleiche Höhen haben, so sind sie gleich an Volum. Z. B. die dreiseitigen Prismen von gleichen Höhen, deren Basen die gleichen Dreiecke ABC und $AB'C'$ sind, haben gleiche Volume, weil sie halb so groß sind als die gleichen Parallelepipede p und p' (1, Anm.).

3. Wenn zwei Prismen (Cylinder) gleiche Höhen haben, so ist das Verhältnis ihrer Volume dem Verhältnis ihrer Basen gleich. Eucl. XI, 32.

Beweis. Die zu vergleichenden Prismen p und q werden durch Diagonalparallelogramme in dreiseitige Prismen von gleichen Höhen zerlegt, zu deren Basen z. B. die Dreiecke ABC und $AB'C'$ gehören. Die Gerade BC wird von der Geraden AC' in D geschnitten. Auf der Basis ABD konstruiere man sowohl das Prisma, dessen Kanten mit den Kanten des auf ABC stehenden Prisma die Richtung und Länge $A\alpha$ gemein haben, als auch das Prisma, dessen Kanten mit den Kanten des auf $AB'C'$ stehenden Prisma die Richtung und Länge $A\alpha'$ gemein haben; diese Prismen, welche durch $ABD\alpha$ und $ABD\alpha'$ bezeichnet werden, sind gleich an Volum (2, Anm.).



Um zunächst das Verhältnis der Volume der Prismen $ABC\alpha$ und $ABD\alpha$ zu finden, legt man durch die Kante $A\alpha$ Diagonalparallelogramme von beliebiger Anzahl, deren je zwei folgende auf der Geraden BC gleiche Teile, folglich auf der Basis ABC gleiche Dreiecke, und von dem Prisma $ABC\alpha$ gleiche Prismen (2, Anm.) abschneiden. Daher sind die Verhältnisse $BC : BD$, $ABC : ABD$, $ABC\alpha : ABD\alpha$ gleich, indem sie entweder denselben rationalen Wert haben oder zwischen denselben beliebig nahen Grenzen liegen (Algebra §. 1, 2). Aus der Proportion $ABC\alpha : ABD\alpha = ABC : ABD$ und den auf gleiche Weise sich ergebenden Proportionen $ABD\alpha' : AB'D\alpha' = ABD : AB'D$,

$AB'D\alpha' : AB'C'\alpha = AB'D : AB'C'$, in denen $ABD\alpha'$ und $ABD\alpha$ nicht verschieden sind, schließt man durch Multiplikation $ABC\alpha : AB'C'\alpha' = ABC : AB'C'$.

Bestehn nun die Prismen p und q aus den dreiseitigen Prismen $p_1, p_2, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots$, ihre Basen a und b aus den Dreiecken $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$, so hat man

$$p_1 : q_1 = a_1 : b_1$$
$$p_2 : q_1 = a_2 : b_1$$

u. s. w., also durch Addition $p : q_1 = a : b_1$. Endlich ist

$$q_1 : p = b_1 : a$$
$$q_2 : p = b_2 : a$$

u. s. w., also durch Addition $q : p = b : a$.

Anmerkung. Wenn zwei Prismen gleiche Höhen haben, so ist ihre Summe oder Differenz einem Prisma von derselben Höhe gleich, dessen Basis die Summe oder Differenz der Basen der gegebenen Prismen ist.

4. Wenn zwei Prismen (Cylinder) gleiche Basen haben, so ist das Verhältnis ihrer Volume dem Verhältnis ihrer Höhen gleich. Eucl. XI, 25.

Beweis. Nachdem man die Basen der Prismen auf eine Ebene gelegt hat, konstruiert man Ebenen in beliebiger Anzahl parallel mit der Ebene der Basen, deren je zwei folgende von den Höhen der Prismen gleiche Teile, folglich von den Prismen gleiche Prismen abschneiden, weil alle Teile der Prismen außer den gleichen Höhen gleiche Basen besitzen (3). Nun erhalten das Verhältnis der Höhen und das Verhältnis der Volume der Prismen entweder denselben rationalen Wert, oder sie werden beide zwischen denselben beliebig nahen Grenzen gefunden, also sind sie gleich.

5. Das Verhältnis der Volume von zwei Prismen (Cylindern) ist das Produkt der Verhältnisse ihrer Basen und ihrer Höhen.

Beweis. Die Prismen p und p' haben die Basen b und b', und die Höhen h und h'. Man konstruiere ein Prisma q auf der Basis b' mit der Höhe h. Dann hat man

$$p : q = b : b' \ (3), \quad q : p' = h : h' \ (4)$$

folglich durch Multiplikation (Algebra §. 1, 3)

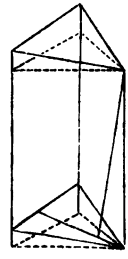
$$p : p' = (b : b')(h : h')$$

Anmerkung. Wenn die Verhältnisse der Basen und der Höhen von zwei Prismen reciprok sind, so haben die Prismen gleiche Volume. Eucl. XI, 34.

6. Das Volum eines Körpers wird durch sein Verhältnis zur Volumeinheit angegeben. Als Volumeinheit wird gewöhnlich eine Kubikeinheit gebraucht, d. h. ein Kubus, dessen Kanten Längeneinheiten und dessen Flächen demnach Quadrateinheiten sind. Denn ein Kubus ist durch eine Kante bestimmt, und gehört zu den Prismen, deren Volum-Verhältnisse nach (5) gefunden werden. Die Angabe des Volums eines Körpers heißt deshalb die Kubatur desselben.

Wenn man abkürzend Größe für ihr Verhältnis zur Einheit sagt (vergl. Planim. §. 10, 4), also Höhe für ihr Verhältnis zur Längeneinheit, Basis für ihr Verhältnis zur Quadrateinheit, Körper für sein Verhältnis zur Kubikeinheit, so hat man (5)

$$\text{Prisma} = \text{Basis} \times \text{Höhe}$$
$$\text{Parallelepiped} = \text{Länge} \times \text{Breite} \times \text{Höhe}$$
$$\text{Kubus} = (\text{Kante})^3$$



Wenn man durch die Endpunkte einer Längenkante eines Prisma Normalschnitte konstruiert, so erhält man zwischen denselben ein Prisma, welches mit dem gegebenen Prisma von gleichem Volum ist (1). Daher ist auch

$$\text{Prisma} = \text{Normalschnitt} \times \text{Längenkante}$$

folglich durch Vergleichung beider Kubaturen

$$\text{Normalschnitt} : \text{Basis} = \text{Höhe} : \text{Längenkante}^*)$$

7. Ein Körper von beliebiger Oberfläche werde durch parallele Ebenen von beliebiger Stellung und Anzahl in Schichten von gleicher Höhe zerschnitten. Man konstruiere in den einzelnen Schichten Prismen, indem man durch parallele Gerade jeden Querschnitt des Körpers auf die Ebene des folgenden Querschnitts projiciert. Bei hinreichend kleiner Höhe der einzelnen Schichten ist die Differenz des gegebenen Körpers und der Summe aller Prismen beliebig klein; der Körper ist von der Summe der Prismen bei unendlich kleiner Höhe derselben nicht verschieden.**)

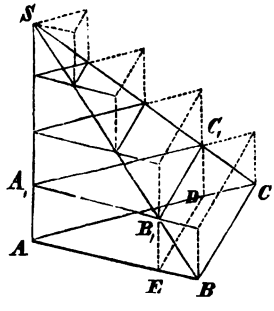
---

*) Vergl. unten Trigon. §. 6, 3.

**) Nachdem der Platonischen Schule die Quadratur des Kreises und die Kubatur der Pyramide gelungen war, hat Archimedes Flächen und Körper überhaupt durch Summen von Parallelogrammen und Prismen begrenzt, d. h. als „bestimmte Integrale" aufgefaßt, die er in vielen Fällen zu berechnen vermochte (vergl. §. 9). Die hieraus fließende Berechtigung, eine Fläche oder einen Körper als Summe von unendlich vielen unendlich schmalen Parallelogrammen oder Prismen zu betrachten, wurde im 17ten Jahrhundert durch Keppler (Stereometria doliorum 1615), Cavalieri (Geometria indivisibilibus continuorum promota 1635. Vergl. Klügel math. W. I p. 416), Fermat u. A. mehr und mehr anerkannt, und hat bei der Erfindung der Analysis des Unendlichen den angemessenen Ausdruck erhalten.

Beweis. Der Abstand der ersten und der letzten Ebene werde durch die übrigen parallelen Ebenen in n gleiche Teile δ geteilt, so daß δ bei hinreichend großem n beliebig klein wird. Die Zone der zwischen zwei folgenden Querschnitten u, u' enthaltenen Körperschicht werde durch parallele Gerade auf die Ebene u' projiciert: die Projektion der Zone ist ein Ring, dessen Breite überall verschwindet, wenn die Höhe δ verschwindet. Gewisse Projicierende der Zone bilden ein Prisma (Cylinder), das von der Körperschicht ganz eingeschlossen wird, andre bilden ein Prisma, von dem die Körperschicht ganz eingeschlossen wird, so daß die Basis u der Körperschicht nicht kleiner ist als die Basis des innern Prisma und nicht größer als die Basis des äußern Prisma. Die Differenz zwischen der Schicht des Körpers und dem in derselben Schicht die Basis u projicierenden Prisma ist kleiner als die Differenz zwischen dem äußern und innern Prisma d. i. kleiner als ein Prisma, das die Projektion der Zone zur Basis hat. Daher ist die Summe der Differenzen zwischen den einzelnen Körperschichten und den in denselben konstruierten Prismen kleiner als ein Prisma von der Höhe δ, dessen Basis aus den Projektionen der Zonen aller Körperschichten besteht und eine endliche Größe hat. Das Volum dieses Prisma verschwindet, wenn die Höhe δ verschwindet. Also ist die Differenz zwischen der Summe der auf den einzelnen Querschnitten konstruierten Prismen und dem gegebenen Körper bei unendlich großer Menge der Querschnitte von Null nicht verschieden.

Z. B. Bei der dreiseitigen Pyramide $ABCS$ sind die einzelnen Querschnitte parallel mit der Basis ABC, und durch Parallelen mit der Kante AS auf die folgenden Ebenen projiciert. Die Differenz zwischen der ersten Schicht der Pyramide und dem in derselben Schicht stehenden Prisma ist kleiner als das Prisma von derselben Höhe δ, dessen Basis die Projektion $BCDE$ der Zone BCC_1B_1 auf die Ebene eines Querschnitts ist. U. s. w. Die Summe der Differenzen zwischen den einzelnen Schichten der Pyramide und den in denselben konstruierten Prismen ist folglich kleiner als ein Prisma von der Höhe δ, dessen Basis die Projektion der Fläche BCS auf die Ebene eines Querschnitts ist. Dieses Prisma ist von dem auf der Basis stehenden Prisma nicht verschieden, und verschwindet zugleich mit seiner Höhe δ.

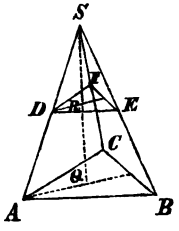


8. Wenn zwei Körper auf einer Ebene stehn und bis an dieselbe parallele Ebene reichen, und wenn auf diesen wie auf allen dazwischen liegenden parallelen Ebenen die Querschnitte beider Körper dasselbe Verhältnis m haben, so haben auch die Volume der Körper das Verhältnis m.*)

Beweis. Man teile die Schicht zwischen der ersten und letzten Ebene in Schichten von gleicher Höhe, und konstruiere in allen Schichten auf den Querschnitten der beiden Körper Prismen, wie (7) angegeben worden. Die Prismen des ersten Körpers haben der Reihe nach zu den Prismen des zweiten Körpers das Verhältnis m, weil nach der Voraussetzung ihre Basen dieses Verhältnis haben, und nach der Konstruktion ihre Höhen gleich sind (3). Also hat auch die Summe der Prismen des ersten Körpers zu der Summe der Prismen des zweiten Körpers das Verhältnis m. Bei unendlicher Anzahl der Schichten unterscheiden sich aber die Summen der Prismen nicht von den Körpern (7).

9. Wenn zwei Pyramiden (Kegel) gleiche Höhen haben, so ist das Verhältnis ihrer Volume dem Verhältnis ihrer Basen gleich. Eucl. XII, 5.**)

Beweis. Die Pyramide $ABCS$, deren Höhe QS, wird durch eine mit der Basis parallele Ebene geschnitten, deren Abstand von der Spitze RS. Der Querschnitt DEF ist der Basis ABC ähnlich (§. 5, 1), also hat man $DEF : ABC = (DE : AB)^2 = (DS : AS)^2 = (RS : QS)^2$. Bei der zweiten Pyramide, deren entsprechende Stücke durch dieselben accentuierten Buchstaben bezeichnet werden, hat man ebenso



$$D'E'F' : A'B'C' = (R'S' : Q'S')^2$$

Wenn nun $QS = Q'S'$, $RS = R'S'$, so ist $DEF : ABC = D'E'F' : A'B'C'$ oder $DEF : D'E'F' = ABC : A'B'C'$, folglich (8) das Verhältnis der Pyramiden $= ABC : A'B'C'$.

10. Eine Pyramide (Kegel) ist der dritte Teil eines Prisma (Cylinder), das mit ihr gleiche Basis und gleiche Höhe hat***), so daß (6)

$$\text{Pyramide} = \tfrac{1}{3}\text{Basis} \times \text{Höhe}$$

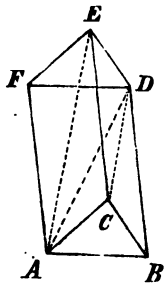
---

*) Cavalieri geometria indivisibilibus continuorum promota. II, 4.

**) Es ist auf keine Weise gelungen, zwei Pyramiden von gleichen Basen und Höhen so zu zerlegen, daß die Gleichheit der Volume aus der Kongruenz der Teile ersichtlich wäre.

***) Eucl. XII, 7. Die Kubatur der Pyramide ist von Eudoxus, Zeitgenossen

Beweis. Das dreiseitige Prisma *ABCDEF* wird durch die Diagonaldreiecke *ACD* und *ADE* in die dreiseitigen Pyramiden *ABCD*, *DAEC* und *ADEF* zerlegt. Nun ist die Pyramide *ABCD* sowohl der Pyramide *AEDC*, als auch der Pyramide *ADEF* an Volum gleich, weil die erste und zweite die gleichen Basen *BCD* und *EDC* und gleiche Höhen, die erste und dritte die gleichen Basen *ABC* und *DEF* und gleiche Höhen haben (9). Also ist die Pyramide *ABCD* der dritte Teil des Prisma *ABCDEF*.



Daß eine mehrseitige Pyramide der dritte Teil eines Prisma ist, welches mit ihr die Basis und die Höhe gemein hat, erkennt man durch Zerlegung der gegebenen Pyramide in dreiseitige Pyramiden.

11. Das Verhältnis von zwei Pyramiden wird ebenso berechnet, wie das Verhältnis der dreimal so großen Prismen, welche mit ihnen gleiche Basen und gleiche Höhen haben; man multipliciert das Verhältnis der Basen mit dem Verhältnis der Höhen (5).

Wenn die Pyramiden ähnlich sind (§. 6, 17), so sind die Basen ähnliche Planfiguren und die Höhen entsprechende Strecken. Das Verhältnis der Basen ist das Quadrat des Verhältnisses entsprechender Strecken; also ist das Verhältnis der Volume von ähnlichen Pyramiden der Kubus des Verhältnisses von entsprechenden Strecken. Eucl. XII, 8.

Überhaupt ist das Verhältnis der Volume ähnlicher Körper der Kubus des Verhältnisses entsprechender Strecken, weil ähnliche Körper aus Tetraedern, von denen die entsprechenden ähnlich sind, zusammengesetzt werden.

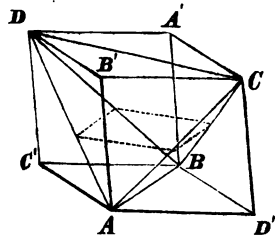
12. Ein Tetraeder ist der dritte Teil des ihm so umgeschriebenen Parallelepipeds (§. 6, 7), daß die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders auf den gegenüberliegenden Flächen des Parallelepipeds liegen.*) Denn jede Fläche des Tetraeders schneidet von dem Parallelepiped eine Pyramide ab, die den dritten Teil des halben Parallelepipeds beträgt, z. B. $ABCD' = \frac{1}{3}ABD'B'CA' = \frac{1}{6}AD'BC'B'CA'D$.

Das Volum eines Tetraeders bleibt unverändert, so lange als von zwei gegenüberliegenden Kanten die Längen, die Richtungen und der Abstand unverändert bleiben.

Platos, vollbracht worden, wie Archimedes berichtet in der Einleitung des ersten Buchs von der Kugel und dem Cylinder.

*) Monge Corresp. sur l'Éc. polyt. I p. 441.

Der Abstand der gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders AB und CD ist die Höhe des Parallelepipeds, wenn man das Parallelogramm $AD'BC'$ zur Basis nimmt. Nun ist der Mittelschnitt des Tetraeders, dessen Ebene mit AB und CD parallel ist und die zwischen ihnen enthaltene Schicht halbiert, halb so groß als das Parallelogramm $AD'BC'$, weil die Hälfte von jenem und der vierte Teil von diesem kongruent sind. Also ist das Tetraeder $\frac{1}{2}$ des Produkts aus dem Abstand von zwei gegenüberliegenden Kanten und dem mit ihnen parallelen Mittelschnitt des Tetraeders.*)



13. Wenn zwei Tetraeder $ABCP$, $ABCQ$ die Basis gemein haben, so wird die Strecke PQ von der Ebene ABC in R nach dem Verhältnis der Tetraeder geteilt. Denn $PR : QR$ ist dem Verhältnis der Höhen der Tetraeder und dieses dem Verhältnis der Volume gleich.

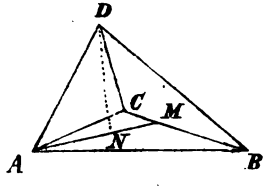
Eine Kante des Tetraeders wird von der Ebene, die den gegenüberliegenden Flächenwinkel halbiert, nach dem Verhältnis der Flächen geteilt, welche den Flächenwinkel einschließen.**) Die Ebene, welche den Flächenwinkel $BADC$ halbiert, schneide die Kante BC in M, dann hat M von den Ebenen BAD und DAC gleiche Abstände, während BM und CM sich verhalten wie die Abstände der Punkte B und C von der Ebene DAM. Daher ist

$$BM : MC = DABM : DAMC = BAD : DAC$$

Wenn die Fläche ABC von der Axe des Rotationskegels, welcher der gegenüberliegenden Ecke eingeschrieben ist (§. 5, 3), in N geschnitten wird, so ist

$$ABN : BCN : CAN = ABD : BCD : CAD$$

Denn die Dreiecke ABN, .. verhalten sich wie die gleichhohen Tetraeder $ABND$, .., während N von den Flächen ABD, BCD, CAD gleiche Abstände hat.



14. Wenn AB, AC, AD die von einer Ecke ausgehenden Kanten eines Parallelepipeds sind, wenn von derselben Ecke die Diagonale AF

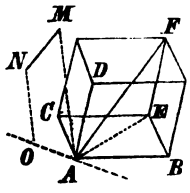
*) Vergl. unten Trigon. §. 6, 17.
**) Gergonne Ann. 3 p. 317.

ausgeht, und eine beliebige Strecke durch MN bezeichnet wird, so gilt die Gleichung der Tetraeder

$$MNAF = MNAB + MNAC + MNAD$$

allgemein, wenn man die Tetraeder eines Sinnes (§. 6, 11) mit gleichen Zeichen, und die Tetraeder entgegengesetzten Sinnes mit den entgegengesetzten Zeichen nimmt.*)

Beweis. Zieht man durch N die mit MA parallele Gerade, welche die Ebene ABC in O schneidet, und die Diagonale AE des Parallelogramms $CABE$, so hat man nach Varignons Lehrsatz (Planim. §. 9, 8)



$$OAB + OAC = OAE$$

folglich für die Pyramiden von gleicher Höhe

$$MOAB + MOAC = MOAE$$

deren Zeichen nach den Zeichen der Dreiecke OAB, OAC, OAE bestimmt werden. Nun ist $MOA = MNA$, u. s. w., also auch

$$MNAB + MNAC = MNAE$$

Ebenso hat man in Bezug auf das Parallelogramm $DAEF$

$$MNAE + MNAD = MNAF$$

daher durch Addition

$$MNAB + MNAC + MNAD = MNAF$$

15. Für die durch 5 Punkte bestimmten Tetraeder, welche ihrem Sinn gemäß positiv oder negativ sind (14), gilt die Gleichung**)

$$ABCD = ABCO + BADO + ACDO + CBDO$$

Beweis. Die 15 Räume, in deren einem der Punkt O liegt, werden nach der in §. 6, 3 angegebenen Weise durch vier, drei, zwei, einen der Buchstaben A, B, C, D bezeichnet, die absoluten Werte der obigen Tetraeder der Reihe nach durch τ, δ, γ, β, α. Wenn nun O in dem Raum $(ABCD)$ liegt, so sind alle Tetraeder eines Sinnes, und man hat der Anschauung gemäß $\tau = \delta + \gamma + \beta + \alpha$. Geht O in den Raum (ABC) über, so wechselt das Tetraeder $ABCO$ sein Zeichen, und man hat in Übereinstimmung mit der Anschauung $\tau = -\delta + \gamma + \beta + \alpha$. Geht O aus (ABC) in den Raum (AB) über, so wechselt $BADO$ das Zeichen, und man hat der Anschauung gemäß $\tau = -\delta - \gamma + \beta + \alpha$. Geht O aus (AB) in den Raum (A) über, so wechselt $ACDO$ das Zeichen und man hat $\tau = -\delta - \gamma - \beta + \alpha$,

*) Möbius Statik §. 63.
**) Möbius baryc. Calc. 20. Vergl. Monge J. de l'Éc. polyt. Cah. 15 p. 68.

so daß die aufgestellte Gleichung in allen Fällen mit der Anschauung in Übereinstimmung bleibt.

Anmerkung. Wenn insbesondere der Punkt O das Centrum der dem Tetraeder $ABCD$ eingeschriebenen Kugel ist (§. 3, 12), wenn der Radius dieser Kugel r Längeneinheiten, und die den Spitzen A, B, C, D gegenüberliegenden Flächen des Tetraeders a, b, c, d Quadrateinheiten haben, so ist*)

$$r = \tfrac{1}{3}(a+b+c+d)r$$

Wenn man durch r_1, r_2, r_3, r_4 die Radien der den Räumen (CBD), (ACD), (BAD), (ABC) eingeschriebenen Kugeln bezeichnet, so erhält man auf dieselbe Weise

$$r = \tfrac{1}{3}(-a+b+c+d)r_1, \text{ u. s. w.}$$

Wenn dem Raum (AB) eine Kugel sich einschreiben läßt, deren Radius durch r_5 bezeichnet wird, so ist

$$r = \tfrac{1}{3}(a+b-c-d)r_5$$

u. s. w. Aus diesen Formeln findet man

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}, \text{ u. s. w.}^{**})$$

16. Wie man bei einem planen Polygon die rechte und linke (helle und dunkle) Seite seines Perimeters unterscheidet (Planim. §. 9, 10), so hat man bei einem Polyeder die äußere und innere Seite seiner Oberfläche zu unterscheiden. Um die Anschauung zu unterstützen, überziehe man eine Seite der Oberfläche (die Außenseite) ganz mit heller Farbe, indem man von einer Fläche des Polygons auf eine folgende über die gemeinschaftliche Kante fortschreitet, und lasse die andre Seite der Oberfläche (die Innenseite) dunkel. Wenn eine Fläche des Polyeders aus Zellen von verschiedenen Zeichen besteht, so trete man beim Übergang aus einer gefärbten Zelle in eine entgegengesetzt bezeichnete zugleich auf die andre Seite der Fläche über und setze daselbst die Färbung fort. Unter den Polyedern, welche sich selbst schneiden, giebt es jedoch auch außerordentliche (von Möbius entdeckte), bei denen die äußern und innern Seiten ihrer Oberflächen sich nicht unterscheiden, dergestalt daß nach Vollendung der vorgeschriebenen Färbung ein solches Polyeder auf beiden Seiten gefärbt ist.***)

Bei jedem Polyeder, das nicht zu den Möbiusschen gehört, können

*) Lagrange sur le pyr. 24 (Mém. de Berlin 1773).

**) Steiner in Gerg. Ann. 19 p. 93 und Crelle J. 2 p. 97.

***) Möbius hat in den Berichten der Sächs. Ges. d. W. 1865 p. 31 diese Entdeckung mitgeteilt und die folgenden Sätze bewiesen.

die einzelnen Flächen durch ihre Perimeter so ausgedrückt werden, daß jede Kante als Seite von zwei folgenden Flächen entgegengesetzte Ausdrücke erhält (Gesetz der Kanten). Dazu ist es erforderlich und genügend, daß bei allen Flächen die Umdrehungen, welche durch die Ausdrücke der Perimeter angezeigt werden, für auf einerlei Seiten der Flächen stehende Betrachter eines Sinnes sind. Wenn z. B. ein Tetraeder die Ecken A, B, C, D hat und eine Fläche desselben durch ABC ausgedrückt wird, so muß die durch die Punkte A, B, D bestimmte Fläche den Ausdruck BAD (nicht ABD) erhalten, damit die Umdrehungen ABC, BAD für außen auf den Flächen stehende Betrachter einerlei Sinnes sind; den übrigen Flächen gebühren die Ausdrücke ACD, CBD. In der That hat die durch A und B begrenzte Kante als Seite der Fläche ABC den Ausdruck AB, als Seite der Fläche BAD den entgegengesetzten Ausdruck BA, u. s. w., so daß dem Gesetz der Kanten genügt ist. Die Flächen eines durch die gleichen und parallelen Kanten AA', BB', CC' bestimmten Prisma haben die dem Gesetz der Kanten entsprechenden Ausdrücke ABC, $ACC'A'$, $CBB'C'$, $BAA'B'$, $C'B'A'$. U. s. w.

Die Pyramide, deren Basis eine Fläche des Polyeders und deren Spitze ein beliebiger Punkt des Raumes ist, habe einen positiven oder einen negativen Wert, je nachdem die Spitze auf der innern (dunkeln) oder auf der äußern (hellen, gefärbten) Seite der Fläche liegt. Unter dieser Voraussetzung ist die Summe der Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Spitze haben, und deren Basen die Flächen eines Polyeders sind, von dem Ort der Spitze unabhängig.

Beweis. Man bezeichne die Pyramiden, deren Basen die Flächen a, b, .. des Polyeders und deren Spitzen die beliebigen Punkte O, P sind, durch Oa, Ob, .., Pa, Pb, .., und die Flächen durch ihre Perimeter z. B. a durch ABC .. so, daß dem Gesetz der Kanten genügt wird. Wenn die Differenz $Oa - Pa$ nicht verschwindet, wenn also die Ebene der Fläche a von der Geraden OP in Q geschnitten wird, so ist $a = QAB + QBC +$ .. (Planim. §. 9, 10), und nach Multiplikation mit dem 3ten Teil der Höhe der Pyramide

$$Oa = OQAB + OQBC + ..$$
$$Pa = PQAB + PQBC + ..$$

Nun ist $OQ - PQ = OP$, $OQA - PQA = OPA$, $OQAB - PQAB = OPAB$, folglich

$$Oa - Pa = OPAB + OPBC + ..$$

Die Summe aller Differenzen $Oa - Pa + Ob - Pb +$ .. ist demnach der Summe der Tetraeder gleich, welche zu gegenüberliegenden Kanten die gemeinschaftliche Kante OP und je eine Seite der Polygone

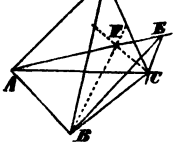
haben, welche die Flächen des Polyeders sind. Nach dem Gesetz der Kanten kommt aber in dieser Summe neben jedem Tetraeder wie $OPAB$ auch das entgegengesetzte $OPBA$ vor. Also verschwindet die Summe der Differenzen, und die Summe der Pyramiden $Pa + Pb + ..$ ist der Summe $Oa + Ob + ..$ gleich.

Anmerkung. Wenn das Polyeder zu den außerordentlichen (Möbiusschen) gehört, so kommt in der Summe $Oa + Ob + ..$ jede Pyramide zweimal vor, einmal positiv, das andremal negativ, und die Summe verschwindet identisch.

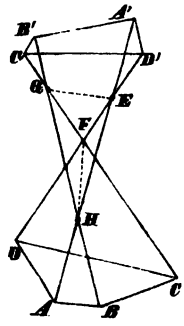
17. Die von dem Ort der Spitze O unabhängige Summe Σ von Pyramiden $Oa + Ob + ..$ (16) ist bei einem Polyeder, dessen Oberfläche sich selbst nicht schneidet, dem Volum des Polyeders gleich.

Beweis. Eine Gerade schneidet im allgemeinen eine gerade Anzahl Flächen eines Polyeders, dessen Oberfläche sich selbst nicht schneidet, z. B. der Reihe nach die Flächen f_1, f_2, f_3, .. in G_1, G_2, G_3, ... Wählt man die Spitze O auf derselben Geraden so, daß Of_1 eine negative Pyramide der Summe Σ ist, so ist Of_2 positiv, Of_3 negativ, u. s. w. Ein unendlich kleiner Raum auf der äußern Strecke OG_1 gehört zu allen Pyramiden Of_1, Of_2, .., deren es eine gerade Anzahl giebt, und kommt demnach in der Summe Σ nicht vor. Ein unendlich kleiner Raum auf der innern Strecke G_1G_2 gehört zu allen Pyramiden Of_2, Of_3, .., deren es eine ungerade Anzahl giebt, und ist demnach ein einfach positiver Bestandteil der Summe Σ; u. s. w. Also umfaßt die Summe Σ alle Teile des innern Raumes (und nur diese) einfach positiv.

Das Volum eines mehrzelligen Polyeders, dessen Oberfläche sich selbst schneidet, wird durch die angegebene Summe von Pyramiden definiert. Z. B. für das von den Dreiecken ABD, BCD, CAD, CBE, BAE, ACE gebildete fünfeckige Hexaeder findet man das Volum $ABCD + ACBE = ABCD - ABCE$, indem man die Spitze der Pyramiden in A annimmt; oder $FABD + FCAD + FCBE = AFDB + ADFC - FBCE$, wenn man die Spitze der Pyramiden in den Durchschnitt F der Kante AE und der Fläche BCD verlegt.



Für das achteckige Hexaeder, welches von den hohlen Vierecken $ABCD$, $D'C'B'A'$, und von den Vierecken $ADD'A'$, $DCC'D'$, $CBB'C'$, $BAA'B'$ mit sich selbst in E, F, G, H schneidenden Perimetern gebildet wird, findet man das Volum



$$
\begin{aligned}
&OABCD && + OD'C'B'A\\
&+ OADFH + OHFE && + OED'A'\\
&+ ODCF + OFGE && + OEGC'D'\\
&+ OCBHF + OFHG && + OGB'C'\\
&+ OBAH + OHEG && + OGEA'B'
\end{aligned}
$$

d. i. die Summe der beiden äußern Zellen vermindert um die zwischenliegende Zelle.

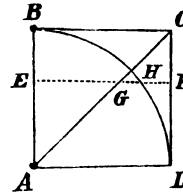
Anmerkung. Wenn die planen Polygone a, b, c, . . (zerstreut oder verbunden) gegeben sind, und jedes derselben auf einer Seite bezeichnet ist, so daß eine Pyramide, deren Basis das Polygon ist, einen positiven oder einen negativen Wert hat, je nachdem der Spitze die nichtbezeichnete oder die bezeichnete Seite der Ebene zugekehrt ist, so hat die Summe der Pyramiden $Oa + Ob + Oc + \ldots$ entweder einen von dem Ort der Spitze O unabhängigen Wert, oder sie erhält einen solchen nach Hinzufügung einer bestimmten Pyramide Op. In dem letztern Falle bleibt die in Betracht gezogene Summe $Oa + Ob + Oc + \ldots$ unverändert, wenn die Spitze O auf einer Ebene von bestimmter Stellung (parallel mit p) sich bewegt.*)

§. 9. Kubatur der Kugel und anderer Körper.

1. Das Volum einer Kugel beträgt $\frac{2}{3}$ des umgeschriebenen Cylinders, dessen Basis ein Hauptkreis und dessen Höhe ein Diameter ist. Daher **)

$$\text{Volum der Kugel} = \tfrac{2}{3}\ \text{Hauptkreisfläche} \times \text{Diameter} = \tfrac{4}{3}\pi\ \text{Kubikradien}.$$

Beweis. Wenn das Quadrat $ABCD$ um die Axe AB rotiert, so beschreibt die Seite CD einen Rotationscylinder, die Diagonale AC einen Rotationskegel, der eingeschriebene Kreisquadrant BD eine Halbkugel. Irgend eine Ebene, welche die Axe AB normal in E schneidet, schneidet die drei Flächen in concentrischen Kreisen, deren Radien EF, EG, EH sind. Nun sind die Winkel CAB, BCA, EGA gleich, also $EG = AE$; daher $EG^2 + EH^2 = AE^2 + EH^2 = AH^2 = AD^2 = EF^2$ nach dem Pythagoreischen Satz; folglich die Summe des Kegelschnitts ($\pi \cdot EG^2$) und des Kugelschnitts ($\pi \cdot EH^2$) gleich dem Cylinder-



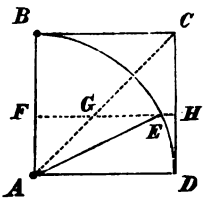
*) Möbius Statik 56. Vergl. Planim. §. 9, 11 und §. 10, 8.
**) Die Ausmessung des Volums der Kugel und ihrer Oberfläche (Ausdruck der-

schnitt ($\pi . EF^2$). Vergl. Planim. §. 13. Aus der für alle Querschnitte der drei Körper, des Kegels, der Halbkugel und des Cylinders geltenden Gleichung schließt man nach §. 8, 8, daß die Summe des Kegels und der Halbkugel dem Cylinder gleich ist. Nun beträgt der Kegel $\frac{1}{3}$ des Cylinders (§. 8, 10), also die Halbkugel $\frac{2}{3}$ desselben, u. s. w.

2. Das Stück einer Fläche, welches durch eine Ebene begrenzt wird, heißt eine Zone (ζώνη, calotte). Der Raum, welcher von einer Zone und von der sie begrenzenden Ebene eingeschlossen wird, heißt ein Körpersegment. Unter einem Kugelsektor wird der Teil des Kugelvolums verstanden, welchen die Kugel von einem concentrischen Rotationskegel abschneidet. Sagitte eines Kreis-Bogens heißt (nach dem Gebrauch der Araber) die Strecke zwischen den Mitten des Bogens und seiner Sehne. Ebenso wird unter der Sagitte einer Kugelzone oder eines Kugelsegments oder eines Kugelsektors die Strecke zwischen dem sphärischen und planen Centrum des Kreises verstanden, welchen die Kugel mit der Ebene oder mit dem Rotationskegel gemein hat. Stücke von Flächen und Körpern, die zwischen zwei Flächen, insbesondere zwischen zwei parallelen Ebenen enthalten sind, werden ebenfalls Zonen und Segmente genannt. Apothem (ἀπόθεμα?) des Bogens und der Chorde ist die Differenz des Radius und der Sagitte genannt worden.

Ein Kugelsektor beträgt $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Basis ein Hauptkreis und dessen Höhe die Sagitte des Kugelsektors ist.*)

Beweis. Man ergänze den Kreissektor ABE zu dem Quadranten ABD, konstruiere das umgeschriebene Quadrat $ABCD$ mit der Diagonale AC, und ziehe zu AB die Normale EF, welche AC in G, CD in H schneidet. Der durch Rotation des Kreissektors ABE um die Axe AB beschriebene Kugelsektor, dessen Sagitte BF ist, werde durch (ABE) bezeichnet. Ebenso bezeichne man das durch Rotation des Kreissegments FBE um die Axe FB beschriebene Kugelsegment durch (FBE), u. s. w. Aus der in (1) aufgestellten Gleichung für die Querschnitte der drei Körper (ABD), (ABC), $(ABCD)$ schließt



selben durch die Fläche eines Hauptkreises) gehört zu den glänzenden Leistungen von Archimedes, und ist enthalten in dessen Schrift über Kugel und Cylinder I, 37. Kugel und Cylinder waren deshalb auf Archimedes' Grabmal zu Syrakus gesetzt; an diesen Kennzeichen hat Cicero dasselbe wieder aufgefunden (Tusc. Qu. V, 23). Die neuere Formulierung des Beweises kommt vor bei Segner Anfangsgr. d. Math. §. 581 d. 2ten Aufl. 1773.

*) Archimedes Kugel und Cyl. I, 50.

man nach §. 8, 8 die Gleichung der Volume $(FBE)+(FBCG) = (FBCH)$, folglich ist

$$(FBE) = (FBCH)-(ABC)+(AFG)$$

Wegen des Zusammenhangs ihrer Basen hat man ferner die Gleichung der Kegel $(AFE) = (AFH)-(AFG)$, und durch Addition

$$\begin{aligned}(ABE) &= (FBCH)-(ABC)+(AFH)\\ &= (FBCH)-(FBC) = \tfrac{2}{3}(FBCH)\end{aligned}$$

Denn die Kegel (ABC) und (AFH) haben gleiche Basen; der Kegel (FBC) hat mit dem Cylinder $(FBCH)$ die Basis und die Höhe gemein.

Anmerkung. Wenn der Radius r, die Sagitte s Längeneinheiten hat, so hat der Kugelsektor $\frac{2}{3}\pi r^2 s$ Kubikeinheiten, auch in dem Falle daß die Sagitte den Radius übertrifft. Dann ist nämlich der Kugelsektor die Differenz des Kugelvolums und des Kugelsektors, dessen Sagitte die gegebene Sagitte zu einem Diameter ergänzt. In der That ist $\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^2(2r-s) = \frac{2}{3}\pi r^2 s$. Wenn die Sagitte ein Diameter wird, so geht der Kugelsektor in die Kugel, und $\frac{2}{3}\pi r^2 s$ in $\frac{4}{3}\pi r^3$ über.

3. Wenn der Radius der Kugel r, die Sagitte s Längeneinheiten hat, so beträgt das Kugelsegment $\pi r s^2-\frac{1}{3}\pi s^3$ Kubikeinheiten. Archimedes Kugel und Cyl. II, 3. Die in (2) aufgestellte Gleichung

$$(FBE) = (FBCH)-(ABC)+(AFG)$$

giebt sofort für das gesuchte Volum $\pi r^2 s-\frac{1}{3}\pi r^3+\frac{1}{3}\pi(r-s)^3$ d. i. $\pi r s^2-\frac{1}{3}\pi s^3$ Kubikeinheiten. Wenn die Sagitte den Radius übertrifft, so ist das Segment die Differenz des Kugelvolums und des Segments der Sagitte $2r-s$, und

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3-\pi r(2r-s)^2+\tfrac{1}{3}\pi(2r-s)^3 = \pi r s^2-\tfrac{1}{3}\pi s^3$$

Anmerkung. Auf dem angegebenen Wege bietet sich auch die Gleichung dar $(AFED) = (AFHD)-(AFG)$, aus der man unmittelbar für das zwischen einem Hauptkreis und einem Parallelkreis enthaltene Segment $\pi r^2 h-\frac{1}{3}\pi h^3$ Kubikeinheiten findet, wenn die Centren der Kreise einen Abstand von h Längeneinheiten haben.

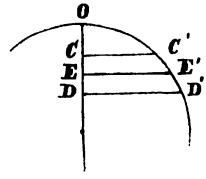
Der Kreis, den die Ebene und die Kugel gemein haben, hat die Fläche $\pi[r^2-(r-s)^2] = \pi s(2r-s)$. Der Kegel, dessen Basis dieser Kreis, und dessen Höhe die Sagitte, hat das Volum $\frac{1}{3}\pi s^2(2r-s)$. Das Verhältnis des obigen Kugelsegments zu diesem Kegel

$$\frac{\frac{1}{3}\pi s^2(3r-s)}{\frac{1}{3}\pi s^2(2r-s)} = \frac{3r-s}{2r-s} = \tfrac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2}s}{2r-s}$$

steigt bei steigender s. Archimedes a. a. O. II, 8.

4. Das zwischen irgend zwei Kreisen enthaltene Segment einer Kugel ist die Differenz von zwei Kugelsegmenten, die nach (3) berechnet werden. Wenn die Sagitten der letztern s und t Längeneinheiten haben, so hat das Kugelsegment $\pi r(t^2-s^2)-\frac{1}{3}\pi(t^3-s^3)$ Kubikeinheiten.

Wenn statt der Sagitten OC und OD deren Differenz $t-s=h$ und die Radien $CC'=a$, $DD'=b$ der Kreise gegeben sind, zwischen denen das Kugelsegment enthalten ist, so hat man



$$t^2-s^2 = (t+s)h$$
$$t^3-s^3 = h^3+3tsh$$
$$r(t^2-s^2)-\tfrac{1}{3}(t^3-s^3) = r(t+s)h-tsh-\tfrac{1}{3}h^3$$

Nun ist nach dem Pythagoreischen Satze

$$2rs = OC'^2 = a^2+s^2, \quad 2rt = OD'^2 = b^2+t^2$$

folglich

$$2r(t+s)-2ts = a^2+b^2+h^2$$

und das Kugelsegment

$$\pi r(t^2-s^2)-\tfrac{1}{3}\pi(t^3-s^3) = \tfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2)h+\tfrac{1}{6}\pi h^3$$

Ist OE das arithmetische Mittel der Sagitten OC und OD, und EE' normal zu OE bis an die Oberfläche gezogen, so soll der Kreis der Kugel, dessen Centrum E und dessen Radius $EE'=\varrho$ ist, seiner Lage wegen der Mittelkreis des Kugelsegments genannt werden. Nun ist $OE.2r = OE'^2 = OE^2+EE'^2$, also

$$r(t+s) = \varrho^2+\tfrac{1}{4}(t+s)^2$$
$$r(t+s)-ts = \varrho^2+\tfrac{1}{4}h^2$$

und das Kugelsegment

$$\pi r(t^2-s^2)-\tfrac{1}{3}\pi(t^3-s^3) = \pi\varrho^2h-\tfrac{1}{12}\pi h^3$$

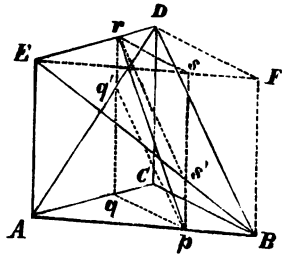
Winkhaus Crelle J. 44 p. 375.

Die letzte Formel lehrt, daß Segmente verschiedener Kugeln gleiche Volume haben, wenn ihre Mittelkreise und ihre Sagittendifferenzen gleich sind.

5. Das zwischen parallelen Ebenen enthaltene Segment einer beliebigen geradlinigen Fläche kann durch zwei Cylinder und einen Kegel ausgedrückt werden. Zwischen den parallelen Ebenen konstruiere man sowohl die Cylinder, deren Basen die auf den parallelen Ebenen liegenden Flächen des Segments sind, als auch den der geradlinigen Fläche beigeordneten Kegel, dessen Spitze auf einer der parallelen

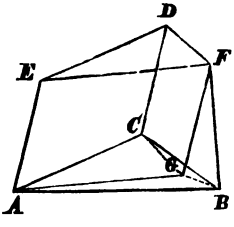
Ebenen liegt, und deſſen Kanten der Reihe nach mit den Geraden der geradlinigen Fläche parallel liegen. Das doppelte Körperſegment iſt die Summe der beiden Cylinder vermindert um den beigeordneten Kegel.*)

Beweis. Ein Körperſegment ſei begrenzt von den Dreiecken *ABC* und *CBD*, von dem Parallelogramm *ACDE* und von dem paraboloidiſchen Viereck *BAED*, deſſen Gerade mit der Ebene *BCD* parallel ſind (§. 1, 8).



Ergänzt man dasſelbe zu dem Prisma mit den parallelen Kanten *CD*, *AE*, *BF*, ſo erſcheinen die Geraden des paraboloidiſchen Vierecks als Diagonalen von Parallelogrammen, wie *pqrs*, in denen das Prisma durch Ebenen geſchnitten wird, die mit *BCDF* parallel ſind. Aus der Halbierung dieſer parallelen Prismenſchnitte durch ihre Diagonalen ſchließt man nach §. 8, 8, daß das Prisma durch das paraboloidiſche Viereck *BAED* halbiert wird. Bezeichnet man den Abſtand der Geraden *DE* von der Ebene *ABC* durch *h*, ſo iſt das Prisma $= ABC.h$, folglich das gegebene Körperſegment $= \frac{1}{2}ABC.h$.**)

Ein anderes Körperſegment ſei von dem Parallelogramm *ACDE*, den paraboloidiſchen Vierecken *CBFD* und *BAEF*, endlich von den parallelen Dreiecken *ABC* und *DFE* eingeſchloſſen.



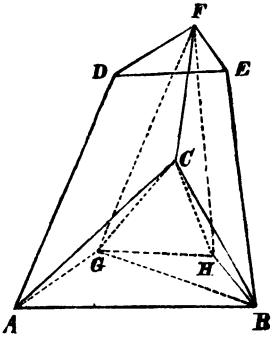
Vollendet man das Prisma mit den parallelen Kanten *CD*, *AE*, *GF*, deſſen Höhe *h* iſt, ſo wird das gegebene Körperſegment in Teile von bekannter Art zerlegt, und man erhält ſein Volum $= \frac{1}{2}ABG.h + \frac{1}{2}BCG.h + \frac{1}{2}CAG.h + \frac{1}{2}DEF.h$. Nun iſt $ABG + BCG + CAG = ABC$ (Planim. §. 9, 9). Alſo iſt das Körperſegment $= \frac{1}{2}(ABC + DEF)h$.

---

*) Die Kubatur beſonderer Polyeder, die hierher gehören, iſt von Meier Hirſch 1806 (geom. Aufg. II, 102. 155. 189) durch Rechnung vollbracht worden. Eine geometriſche Bedeutung und Ableitung der gewonnenen Formeln wurde von Koppe 1838 gefunden (Crelle J. 18 p. 275 und Neuer Lehrſatz der Stereometrie, Eſſen 1843. Vergl. Grunert Archiv 9 p. 82). Eine andere Kubatur der oben betrachteten Körperſegmente iſt von Steiner 1842 gegeben worden Crelle J. 23 p. 275. Vergl. Brix Crelle J. 25 p. 129, Auguſt Borchardt J. 60 p. 377, und den Schluß dieſes Paragraphen.

**) Dieſes Körperſegment iſt von Tinſeau 1780 (Mém. de Math. et Phys. prés. t. 9 p. 612) durch Integralrechnung, von Meier Hirſch a. a. O. 181 elementar kubiert worden. Man erkennt auf dem angezeigten Wege, daß ein Tetraeder durch ein paraboloidiſches Viereck halbiert wird, welches gegenüberliegende Kanten des Tetraeders zu gegenüberliegenden Seiten hat. Z. B. das Tetraeder *ABDE* wird durch das paraboloidiſche Viereck *ABDE* halbiert, weil ſeine Schnitte wie *pq'rs'*, die

Wenn nun ein Körpersegment von den paraboloidischen Vierecken *ACFD*, *CBEF*, *BADE* und den parallelen Dreiecken *ABC* und *DFE* eingeschlossen wird, deren Abstand h ist, so ziehe man durch *F* parallel mit *DA* und *EB* Gerade, welche die Ebene *ABC* in *G* und *H* schneiden, und konstruiere das paraboloidische Viereck *FGFE*, dessen Gerade mit der Ebene *FGH* parallel sind. Das von den paraboloidischen Vierecken *CBEF* und *BGFE* und von den Dreiecken *GCF* und *GBC* eingeschlossene Körpersegment ist $= \frac{1}{2}GBH \cdot h + \frac{1}{2}BCH \cdot h + \frac{1}{2}CGH \cdot h - \frac{1}{6}CGH \cdot h = \frac{1}{2}BCG \cdot h - \frac{1}{6}CGH \cdot h$. Ferner ist das von dem Parallelogramm *GADF*, dem paraboloidischen Viereck *ACFD* und den Dreiecken *CGF* und *CAG* eingeschlossene Körpersegment $= \frac{1}{2}CAG \cdot h$. Endlich ist das von dem Parallelogramm *AGFD*, den paraboloidischen Vierecken *GBEF* und *BADE*, und von den Dreiecken *ABG* und *DFE* begrenzte Körpersegment nach dem obigen $= \frac{1}{2}(ABG + DEF)h$. Durch Addition findet man das gegebene Körpersegment $= \frac{1}{2}(ABC + DEF)h - \frac{1}{6}CGH \cdot h$. Hierbei ist *CGH* die Basis des der paraboloidischen Oberfläche beigeordneten Kegels (Pyramide). Denn die Geraden, welche durch *F* auf den Seiten *GFH*, *HFC* und *CFG* der in *F* gebildeten Ecke gezogen werden können, sind der Reihe nach parallel mit den Geraden, durch welche die Flächen der gegebenen paraboloidischen Vierecke konstruiert werden.

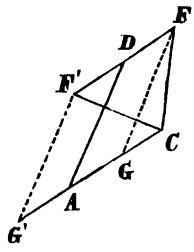


Jedes Körpersegment, welches den Bedingungen des aufgestellten Lehrsatzes genügt, läßt sich aus endlichen oder aus unendlich kleinen Körpersegmenten von der zuletzt betrachteten Art zusammensetzen.

6. Das einfachste Körpersegment, welches zu der Klasse der im vorstehenden kubierten Körpersegmente gehört, ist der Pyramidenstumpf (tronc), das Segment einer Ecke zwischen parallelen Ebenen, und der ebenso zu betrachtende Kegelstumpf. Die parallelen Schnitte, zwischen denen das Körpersegment enthalten ist, und die Basis des beigeordneten Kegels, die durch *a*, *b*, *d* bezeichnet werden, sind in diesem Falle ähnliche Figuren, so daß entsprechende Strecken derselben

---

mit den Kanten *BD* und *EA* parallel sind, von ihren Diagonalen halbiert werden. Möbius baryc. Calc. p. 238 und Steiner a. a. O. p. 280.



$AC : DF : GC$ wie $1 : m : 1-m$

sich verhalten, und

$$a : b : d = 1 : m^2 : (1-m)^2$$

Dadurch erhält die Formel $\frac{1}{2}(a+b)h - \frac{1}{6}dh$ für das Volum des Pyramidenstumpfs (5) den Wert

$$\tfrac{1}{2}[1+m^2-\tfrac{1}{3}(1-m)^2]ah = \tfrac{1}{3}(1+m+m^2)ah$$
$$= \tfrac{1}{3}(a+\sqrt{ab}+b)h^*)$$

Wenn die Kanten der Pyramide (des Kegels) innerhalb der von den parallelen Ebenen eingeschlossenen Schicht sich schneiden, z. B. AD und CF', so hat man m mit $-m$ zu vertauschen, wie die Figur zeigt.

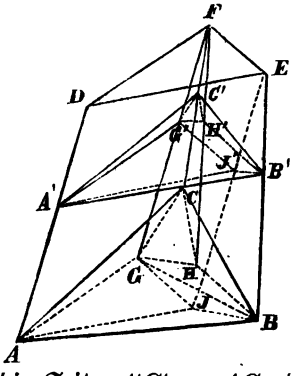
Dieselbe Kubatur des Pyramidenstumpfs ergiebt sich unmittelbar, wenn man den Stumpf als Differenz (Summe) der Pyramiden betrachtet, deren Basen a und b, und deren Höhen $h \mp x$ und x sind, so daß

$$h \mp x : x : h = \sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

Dann ist

$$\tfrac{1}{3}a(h \mp x) \pm \tfrac{1}{3}bx = \tfrac{1}{3}\frac{a\sqrt{a} \pm b\sqrt{b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}h = \tfrac{1}{3}(a \pm \sqrt{ab} + b)h$$

7. Ein normal zur Höhe geführter Querschnitt des in (5) kubierten Körpersegments kann aus den beiden parallelen Grenzflächen und der Basis des beigeordneten Kegels berechnet werden. Die Ebene des Querschnitts $A'B'C'$ sei parallel mit den Ebenen ABC und DEF, und teile die von DEF bis ABC reichende Schicht so, daß $A'D = v \,.\, AD$, u. s. w. Das paraboloidische Viereck $ACFD$ wird von der Ebene $A'B'C'$, mit welcher AC und FD parallel sind, in der Geraden $C'A'$ geschnitten (§. 1, 8).



Der Querschnitt $A'B'C'$ enthält nun im Vergleich zur Basis ABC statt des Dreiecks CAG das Dreieck $C'A'G'$, dessen Verhältnis zu CAG den Wert v hat, weil die Seite $A'G' = AG$, der Winkel $A'G'C' = AGC$ und die Seite $G'C' = v \,.\, GC$ ist.

---

*) Mitgeteilt von Leonardo Pisano practica geometriae fol. 113, Commandino de centro gravitatis prop. 23. Für $\frac{1}{3}(1+m+m^2)$ kann gesetzt werden $\frac{1}{4}(1+m)^2 + \frac{1}{12}(1-m)^2$.

Der Querschnitt $A'B'C'$ enthält statt des Dreiecks CGH das ähnliche Dreieck $C'G'H'$, dessen Verhältnis zu CGH den Wert v^2 hat.

Der Querschnitt $A'B'C'$ enthält statt des Dreiecks ABG das Dreieck $A'B'G' = G'A'J' + A'B'J' + B'G'J'$, wenn die Ebenen ABC und $A'B'C'$ von der durch E parallel mit DA gezogenen Geraden in J und J' geschnitten werden. Davon ist das Dreieck $G'A'J' = GAJ = DEF$, $A'B'J' = v.ABJ$, u. s. w., folglich $A'B'G' = v.ABJ + v.BGJ + GAJ = v.ABG + (1-v)DEF$.

Ebenso ist $B'C'G' = v.BCH + v^2.CGH + v.GBH = v.BCG - v(1-v)CGH$, daher endlich

$$A'B'C' = v.CAG + v.ABG + v.BCG + (1-v)DEF - v(1-v)CGH$$
$$= v.ABC + (1-v)DEF - v(1-v)CGH$$

Bezeichnet man die untere und die obere Grenzfläche durch a und b, die Basis des Kegels durch d, den Querschnitt des Körpersegments durch f, so erhält man*)

$$f = av + b(1-v) - dv(1-v) = b - (b+d-a)v + dv^2$$

Diese Formel lehrt, daß der Querschnitt verschwinden kann (Planim. §. 9, 10), wenn nämlich $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{d}$ zu einander sich nicht verhalten wie die Seiten eines Dreiecks, und daß unter allen Querschnitten es einen kleinsten giebt, wenn d positiv ist. Vergl. Algebra §. 6, 5.

Die gefundene Formel giebt den Mittelschnitt c des Körpersegments, wenn $v = \frac{1}{2}$, nämlich

$$c = \tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{4}d$$

Durch Benutzung dieses Wertes erhält man für das Volum des kubierten Körpersegments statt $\frac{1}{2}(a+b)h - \frac{1}{8}dh$ die Formel

$$\tfrac{1}{6}(a+b+4c)h \text{ oder } ch + \tfrac{1}{12}dh^{**})$$

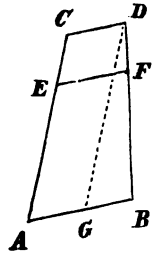
8. Wenn die geradlinige Fläche, deren Segmente und Querschnitte in vorstehendem betrachtet wurden, abwickelbar (développable) ist d. h. aus planen endlichen oder unendlich kleinen Teilen besteht, so kann auch der Perimeter eines beliebigen Querschnitts der Fläche

*) Diese Formel für den Querschnitt eines sogenannten Obelisken ist von Tinseau, Koppe und von Brix durch Rechnung gefunden worden, ohne die geometrische Bedeutung von d. Mit dem Namen Obelisk bezeichnen nämlich Brix a. a. O. und Koppe in der angeführten Schrift ein Polyeder, das zwischen zwei parallelen planen Polygonen enthalten, übrigens von planen Vierecken oder Dreiecken begrenzt ist, und das früher unter dem Namen Prismoid vorkommt.

**) Geometrisch wurde die erste dieser Formeln von Steiner a. a. O. bewiesen, die letztere für den Obelisken von Koppe in der angeführten Schrift.

und des ihr beigeordneten Kegels durch die Perimeter von zwei parallelen Querschnitten der Fläche ausgedrückt werden.

Drei parallele Ebenen schneiden den zwischen den Geraden AC und BD enthaltenen planen Teil der abwickelbaren Fläche in den parallelen Strecken AB, CD, EF, so daß $EC : AC = v$. Dann ist (Planim. §. 8, 4)



$$EF = v \cdot AB + (1-v)CD$$

Vollendet man das Parallelogramm $ACDG$, so ist $GB = AB - CD$. Für die Perimeter der drei parallelen Querschnitte und der Basis des beigeordneten Kegels, von denen AB, CD, EF, GB Teile sind, und die der Reihe nach durch α, β, φ, δ bezeichnet werden, findet man demnach durch Addition

$$\varphi = v\alpha + (1-v)\beta, \quad \delta = \alpha - \beta$$

Bei $v = \frac{1}{2}$ erhält man den von Steiner a. a. O. angegebenen Perimeter des Mittelschnitts $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$.

9. Irgend ein zwischen parallelen Ebenen enthaltenes Körpersegment kann kubiert werden, wenn seine mit denselben Ebenen parallelen Querschnitte gegeben sind. Wenn der Querschnitt in dem Abstand x von der Basis des Segments eine gegebene Funktion von x ist, die durch $f(x)$ bezeichnet wird, so hat das Prisma, dessen Basis der Querschnitt $f(x)$ und dessen Höhe der $n$te Teil der Höhe h des ganzen Segments ist, das Volum $\frac{h}{n} f(x)$. Die Summe der gleichhohen Prismen

$$\frac{h}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}h\right) + f\left(\frac{2}{n}h\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}h\right)\right]$$

ist nach §. 8, 7 dem gesuchten Volum des Körpersegments gleich, wenn n unendlich groß wird. Die Berechnung (Begrenzung) dieser Summe ist eine Aufgabe der Integralrechnung, die sich elementar lösen läßt, wenn $f(x)$ eine ganze Funktion von x ist, z. B.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$$

Dann ist

$$f(0) = a_0$$

$$f\left(\frac{1}{n}h\right) = a_0 + \frac{1}{n}ha_1 + \frac{1}{n^2}h^2 a_2 + \ldots$$

$$f\left(\frac{2}{n}h\right) = a_0 + \frac{2}{n}ha_1 + \frac{2^2}{n^2}h^2 a_2 + \ldots$$

u. ſ. w. Nach Addition der Kolonnen und Multiplikation mit $\frac{h}{n}$ findet man die zu bildende Summe

$$= ha_0 + \frac{1+2+..+(n-1)}{n^2} h^2 a_1 + \frac{1^2+2^2+..+(n-1)^2}{n^3} h^3 a_2 + \frac{1^3+2^3+..+(n-1)^3}{n^4} h^4 a_3 + ...$$

Nun hat (Allg. Arithm. §. 12, 6) bei unendlichem n

$$\frac{1^r+2^r+..+(n-1)^r}{n^{r+1}} \text{ den Wert } \frac{1}{r+1}$$

Alſo hat die geſuchte Summe d. i. das Körperſegment den Wert

$$ha_0 + \tfrac{1}{2}h^2 a_1 + \tfrac{1}{3}h^3 a_2 + .. + \frac{1}{k+1} h^{k+1} a_k$$

Beiſpiel. Eine Pyramide auf der Baſis b und von der Höhe h wird durch eine mit der Baſis parallele Ebene, von der die Spitze den Abſtand x hat, in einer der Baſis ähnlichen Figur geſchnitten. Man hat alſo für dieſen Querſchnitt

$$f(x) = \frac{bx^2}{h^2}$$

und findet durch die Subſtitution $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{b}{h^2}$ in der allgemeinen Formel das Volum der Pyramide

$$\tfrac{1}{3}\frac{bh^3}{h^2} = \frac{bh}{3}$$

wie früher §. 8, 10.

10. Newton*) hat gezeigt, wie man ein Körperſegment aus mehrern ſeiner parallelen Schnitte (eine plane Fläche aus mehrern parallelen Sehnen derſelben) annäherungsweiſe berechnen kann, und daß man insbeſondere aus 3 Querſchnitten, die in gleichen Abſtänden folgen, das eingeſchloſſene Segment annäherungsweiſe findet, wenn

*) Methodus differentialis prop. 6, weiter ausgeführt von Cotes (über Newtons meth. diff. in den nachgelaſſenen Werken 1722), verfeinert von Gauß (Meth. nova integralium valores etc. 1814, Comm. Götting. t. 3). Vergl. darüber die Lehrbücher der Analyſis z. B. Minding I p. 230. Die beſondere Regel war von Torricelli gegeben worden, wie Perelli berichtet im Anhang zu Guido Grandi Instituzioni delle sezioni coniche, Firenze 1744.

man die äußern Querschnitte und den vierfachen Mittelschnitt addiert und die Summe mit dem sechsten Teil des Abstandes der äußern Querschnitte multipliciert. Zu den Newtonschen Formeln hat Maclaurin 1742 (Fluxions no. 848) Ergänzungsglieder hinzugefügt, welche sofort erkennen lassen, daß die angeführte besondere Regel das gesuchte Segment genau giebt, wenn der oben durch $f(x)$ bezeichnete Querschnitt eine ganze Funktion der Länge x ist, die den dritten Grad nicht übersteigt.*) Segmente, die durch dieselbe Regel genau gefunden werden, sind von Torricelli, Th. Simpson**) und besonders von Steiner a. a. O. angezeigt worden.

Um die Tragweite der obigen Regel zu prüfen, bemerke man, daß das Segment zwischen $f(0)$ und $f(4)$ die Summe der Segmente zwischen $f(0)$ und $f(2)$ und zwischen $f(2)$ und $f(4)$ ist. Wenn nun $f(x)$ eine solche Funktion von x ist, daß das Volum des Segments nach der obigen Regel genau gefunden wird, so hat man identisch

$$\begin{aligned} &\tfrac{4}{6}[f(0)+4f(2)+f(4)] \\ =\ &\tfrac{2}{6}[f(0)+4f(1)+f(2)]+\tfrac{2}{6}[f(2)+4f(3)+f(4)] \\ &f(0)-4f(1)+6f(2)-4f(3)+f(4)=0 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+..$ ist aber

$$\begin{aligned} &f(0)-4f(1)+6f(2)-4f(3)+f(4) \\ = \quad & a_0 \\ & -4a_0-4a_1-4a_2-4a_3-4a_4-.. \\ & +6a_0+12a_1+24a_2+48a_3+96a_4+.. \\ & -4a_0-12a_1-36a_2-108a_3-324a_4-.. \\ & +a_0+4a_1+16a_2+64a_3+256a_4+.. \end{aligned}$$

$=24a_4+..$ und verschwindet identisch, wenn $a_4, a_5, ..$ verschwinden, mithin $f(x)$ den dritten Grad nicht übersteigt. In der That findet man unter dieser Bedingung

$$\begin{aligned} f(0)+4f(\tfrac{1}{2}h)+f(h) &= a_0 \\ &\quad +4a_0+2ha_1+h^2a_2+\tfrac{1}{2}h^3a_3 \\ &\quad +a_0+ha_1+h^2a_2+h^3a_3 \\ &= 6a_0+3ha_1+2h^2a_2+\tfrac{3}{2}h^3a_3 \end{aligned}$$

$$\frac{h}{6}[f(0)+4f(\tfrac{1}{2}h)+f(h)] = ha_0+\tfrac{1}{2}h^2a_1+\tfrac{1}{3}h^3a_2+\tfrac{1}{4}h^4a_3$$

*) Brunacci compendio del calcolo sublime, Milano 1811, II p. 67. August Progr. des Cöln. Realgymn. Berlin 1849 p. 28 und Crelle J. 45 p. 239.

**) Math. dissertations 1743 p. 109. Die Newtonsche Regel wird deshalb auch nach Th. Simpson benannt. Richtiger nennt man Simpsonsche Regel eine andere Regel, welche Th. Simpson a. a. O. aus jener zur annähernden Berechnung des Segments einer Fläche oder eines Körpers aus einer Mehrzahl von Querschnitten abgeleitet hat (Klügel math. W. 4 p. 150).

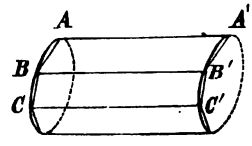
übereinstimmend mit der Formel, welche oben (9) für das zwischen $f(0)$ und $f(h)$ enthaltene Körpersegment angegeben wurde.

Bei den in (5) kubierten Segmenten ist $f(x)$ vom zweiten Grade (7); also wird nach der sonst nur annäherungsweise gültigen Regel das Volum eines solchen Segments genau gefunden, wie Steiner geometrisch direkt bewiesen hat.

§. 10. Oberfläche des Cylinders, des Kegels und der Kugel.

1. Die Zone eines Cylinders zwischen parallelen Ebenen ist einem Parallelogramm gleich, dessen Breite der Perimeter eines Normalschnittes, und dessen Länge die Kante der Zone ist.*)

Beweis. Sind AA', BB', CC', .. Kanten der Cylinderzone, so besteht die Zone eines dem Cylinder eingeschriebenen Prisma aus den Parallelogrammen $ABB'A'$, $BCC'B'$, ... Diese Parallelogramme sind sämtlich von gleicher Länge (AA'), ihre Breiten sind die Seiten des Normalschnitts des Prisma; also ist die Summe der Parallelogramme ein Parallelogramm von derselben Länge, dessen Breite der Perimeter des Normalschnitts des Prisma ist. Das eingeschriebene Prisma fällt mit dem Cylinder zusammen, wenn es mit ihm alle Kanten gemein hat.



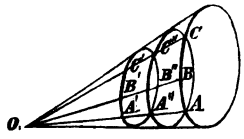
Der Normalschnitt eines Rotationscylinders ist ein Kreis. Bei andern Cylindern sind die Normalschnitte andere Figuren, deren Perimeter durch Integralrechnung ermittelt werden.

2. Die Zone eines Kegels, welche durch eine concentrische Kugel begrenzt wird, ist einem Kreissektor gleich, dessen Radius die Kante der Zone und dessen Bogen so lang ist als der Perimeter des Kugelschnitts.

Beweis. Sind OA, OB, OC, .. Kanten der Kegelzone, und durch eine um das Centrum O beschriebene Kugel begrenzt, so besteht die Zone einer dem Kegel eingeschriebenen sphärischen Pyramide aus den Kreissektoren OAB, OBC, ... Durch Addition dieser Sektoren erhält man einen Kreissektor, dessen Radius OA und dessen Bogen

*) Die Zonen von Rotationscylindern und von Rotationskegeln sind von Archimedes Kugel und Cyl. I, 14—17 berechnet worden. Zonen andrer Kegel haben Varignon Misc. Berol. t. 3 p. 280, Euler 1747 Nov. Comm. Petrop. t. 1 p. 3 und in der aus dem Nachlaß edierten Abhandlung Nova Acta Petrop. t. 3 p. 69 als Integrale ausgedrückt.

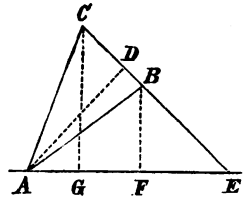
der Perimeter des sphärischen Polygons $ABC\ldots$ ist. Wenn nun die eingeschriebene sphärische Pyramide alle Kanten mit dem Kegel gemein hat, so fällt ihre Zone mit der Zone des Kegels und der Perimeter ihrer sphärischen Basis mit dem Perimeter des Kugelschnitts zusammen, welcher die Kegelzone begrenzt.



Der Kugelschnitt eines Rotationskegels ist ein Kreis. Andere Kegel haben andere Kugelschnitte, deren Perimeter durch Integralrechnung bestimmbar sind.

Anmerkung. Die zwischen zwei Kugelschnitten des Kegels, $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ enthaltene Zone ist einem Parallelogramm gleich, dessen Breite die Kante der Zone AA' und dessen Länge der Perimeter des Kugelschnitts $A''B''C''\ldots$ ist, auf dem die Mitten der Kanten AA', BB', .. liegen. Denn diese Zone ist die Differenz von zwei concentrischen Kreissektoren mit einem gemeinschaftlichen Centriwinkel, also auch von zwei gleichschenkeligen Dreiecken mit einem gemeinschaftlichen Winkel an der Spitze, mithin ein Parallelogramm, dessen Breite die Kante der Zone AA' und dessen Länge das arithmetische Mittel der Perimeter $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ ist. Wenn aber der Kugelradius OA'' das arithmetische Mittel der Radien OA und OA' ist, so ist der Perimeter des Kugelschnitts $A''B''C''\ldots$ das arithmetische Mittel der Perimeter der Kugelschnitte $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$, welche die Zone des Kegels begrenzen.

3. Die Ausmessung der Fläche, welche auf einer krummen Fläche von einem gegebenen Perimeter eingeschlossen wird, ist im allgemeinen eine Aufgabe von größerer Schwierigkeit, als die Quadratur einer Planfigur, und heißt die Komplanation der unebenen Flächenfigur. Die Komplanation der Kugel und ihrer Zonen läßt sich auf die Kubatur des Kugelvolums und des Kugelsektors zurückführen mit Hilfe des folgenden Satzes.



Wenn das geradlinige Dreieck ABC um die auf seiner Ebene durch die Spitze A gezogene Axe AE rotiert, so ist das Volum des beschriebenen Rotationskörpers einem Kegel gleich, dessen Höhe der Abstand der Spitze A von der Seite BC ist, und dessen Basis die von BC beschriebene Kegelzone ist.*)

*) Archimedes Kugel und Cyl. I, 20.

Beweis. Die Axe werde von BC in E geschnitten, DA sei normal zu BC, FB normal zu AE gezogen. Das von dem Dreieck AEB durch Rotation um AE beschriebene Volum ist als Summe von zwei Kegeln

$$\tfrac{1}{3}\pi . FB^2 . AE = \tfrac{1}{3}\pi . FB . 2AEB = \tfrac{1}{3}\pi . FB . EB . DA$$

Die von der Strecke EB durch dieselbe Rotation beschriebene Kegelzone ist (2) $\pi . FB . EB$. Wenn man dieselbe durch (EB) bezeichnet, so hat das von AEB beschriebene Volum den Wert $\frac{1}{3}(EB) . DA$. Ebenso hat das von AEC beschriebene Volum den Wert $\frac{1}{3}(EC) . DA$, also findet man durch Subtraktion für das von ABC beschriebene Volum den Wert $\frac{1}{3}(BC) . DA$.

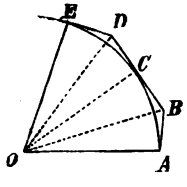
Wenn BC mit der Axe parallel ist, so erhält man für das von ABC beschriebene Volum denselben Ausdruck, indem man GC normal zur Axe zieht, und von der Gleichung

$$ABC = GFBC + AGC - AFB$$

ausgehend einen Cylinder und zwei Kegel berechnet.

4. Ein Kugelsektor ist einem Kegel gleich, dessen Basis die Kugelzone und dessen Höhe der Kugelradius ist. Das Volum der Kugel ist einem Kegel gleich, dessen Basis die Kugelfläche und dessen Höhe der Kugelradius ist.*) Eine sphärische Pyramide ist einem Kegel gleich, dessen Basis die sphärische Figur ist, welche die sphärische Pyramide begrenzt, und dessen Höhe der Kugelradius ist.

Beweis. Der Kugelsektor sei durch Rotation des Kreissektors OAE um den Radius OA beschrieben. Konstruiert man an dem Bogen AE die Tangenten AB, BC, CD, DE, so beschreibt die Figur $OABCDE$ durch Rotation um die Axe OA einen Körper, der an Volum einem Kegel gleichkommt, dessen Höhe der Radius OA und dessen Basis die Summe der von AB, BC, CD, DE beschriebenen Kegelzonen ist (3). Wenn nun die aus Tangenten zusammengesetzte gebrochene Linie den Bogen AE in allen Punkten berührt, so fällt die Figur $OABCDE$ mit dem Kreissektor OAE, der durch Rotation beschriebene Körper mit dem Kugelsektor, die Summe der von AB, BC, .. beschriebenen Kegelzonen mit der von dem Bogen AE beschriebenen Kugelzone zusammen.



Der Kugelsektor umfaßt das Volum der ganzen Kugel, wenn der Bogen AE ein Halbkreis ist. Dabei gelten die vorigen Betrachtungen.

*) Archimedes a. a. O. 50 und 36.

Der von zwei das Centrum der Kugel enthaltenden Ebenen und einem sphärischen Winkel (Zweieck) eingeschlossene Körper hat zum Volum der Kugel dasselbe Verhältnis, als der sphärische Winkel zur Kugelfläche. Hiernach schließt man (§. 4, 5), daß auch eine dreiseitige sphärische Pyramide zum Volum der Kugel dasselbe Verhältnis hat, als das sphärische Dreieck, auf dem sie steht, zur Kugelfläche. U. s. w.

5. Die Kugelfläche ist viermal so groß als die Fläche eines ihrer Hauptkreise. Eine Kugelzone ist einem Parallelogramm gleich, dessen Basis so lang als ein Hauptkreis und dessen Höhe die Sagitte oder die Differenz der Sagitten ist.*)

Beweis. Das Volum der Kugel ist sowohl das Produkt $\frac{1}{3}$ Kugelfläche $\times$ Radius (4), als auch $\frac{4}{3}\pi$ Quadratradien $\times$ Radius (§. 9, 1). Daher

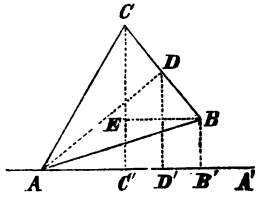
$$\text{Kugelfläche} = 4\pi \text{ Quadratradien}$$

und gleich der Zone des umgeschriebenen Cylinders (1). Das Volum des Kugelsektors ist sowohl das Produkt $\frac{1}{3}$ Kugelzone $\times$ Radius, als auch $\frac{2}{3}\pi$ Quadratradien $\times$ Sagitte (§. 9, 2). Daher

$$\text{Kugelzone} = 2\pi \text{ Radien} \times \text{Sagitte}$$

d. i. gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius das geometrische Mittel zwischen dem Kugeldiameter und der Sagitte ist. Eine von zwei Kreisen eingeschlossene Kugelzone ist die Differenz von zwei Kugelzonen, die von je einem Kreis eingeschlossen sind, folglich u. s. w.

Anmerkung. Zonen derselben Kugel sind gleich, wenn ihre Sagitten oder Sagitten-Differenzen (Höhen) gleich sind. Die Fläche eines sphärischen Winkels hat zur Halbkugelfläche dasselbe Verhältnis, als der Winkel der beiden Hauptkreise zu 180^0. Die Fläche eines sphärischen Dreiecks hat zur Halbkugelfläche dasselbe Verhältnis, als sein Exceß zu 360^0. U. s. w. Vergl. §. 4, 5.



6. Unabhängig von der Kubatur des Kugelvolums wird die Komplanation der Kugelfläche durch folgenden Satz begründet.

Wenn das gleichschenkelige Dreieck ABC um die auf seiner Ebene durch die Spitze A gezogene Axe AA' rotiert, so ist die von der Basis BC beschriebene Kegelzone, einem Parallelogramm gleich, dessen Breite der Perimeter des Kreises ist, welcher

*) Archimedes a. a. O. 35. 48.

zum Radius den Abstand DA der Spitze A von der Basis BC hat, und dessen Länge die Normalprojektion $B'C'$ der Basis BC auf die Axe AA' ist. Pappus V, 21.

Beweis. Zieht man BB', CC', DD' normal zur Axe, so ist DD' das arithmetische Mittel von BB' und CC', weil $BD = DC$. Die von BC durch Rotation um die Axe AA' beschriebene Kegelzone ist aber $= 2\pi . DD' . BC$ (2, Anm.). Zieht man BE parallel mit $B'C'$, so ist das rechtwinkelige Dreieck BCE dem Dreieck DAD' ähnlich, weil die Winkel ECB und $D'AD$ gleich sind. Daher ist $BC : BE = DA : DD'$, $DD' . BC = DA . BE$, also

$$2\pi . DD' . BC = 2\pi . DA . B'C'$$

Anmerkung. Mit Hilfe dieses Ausdrucks der von BC beschriebenen Kegelzone erhält man nach (3) für das Volum des von ABC beschriebenen Rotationskörpers den Ausdruck $\frac{2}{3}\pi . AD^2 . B'C'$ d. i. $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Basis die Fläche eines mit dem Radius AD beschriebenen Kreises, und dessen Höhe die Normalprojektion $B'C'$ ist.

7. Wenn ein aus den kongruenten gleichschenkeligen Dreiecken ABC, ACD, ADE, .. zusammengesetztes planes Polygon um die Axe AB rotiert, so ist die Summe der von den Seiten BC, CD, DE, .. beschriebenen Kegelzonen einem Parallelogramm gleich, dessen Länge die Normalprojektion der aus den Strecken BC, CD, DE, .. bestehenden gebrochenen Linie auf die Axe AB ist, und dessen Breite der Perimeter des der gebrochenen Linie eingeschriebenen Kreises ist (6). Bei unendlicher Anzahl der Berührungspunkte fällt die gebrochene Linie mit dem Kreise, die Summe der Kegelzonen mit einer Kugelzone (mit der Kugelfläche), die Projektion der gebrochenen Linie mit der Sagitte (mit dem Diameter) zusammen.

Ebenso gewinnt man die §. 9 gegebenen Kubaturen der Kugel und des Kugelsektors aus dem in (6) angemerkten Ausdruck des Körpers, welchen das reguläre Polygon $ABCDE$ .. durch Rotation um die Axe AB beschreibt.

§. 11. Von den Schwerpunkten der Figuren.

1. Werden die Seiten eines geschlossenen planen Polygons auf eine beliebige Gerade seiner Ebene durch Parallelen einer beliebigen Richtung projiciert, so ist die Summe der Projektionen null. Sind z. B. B_1, B_2, .., B_n die auf einer Geraden liegenden Projektionen

der Eckpunkte des Polygons $A_1A_2 \ldots A_n$, mithin B_1B_2, $B_2B_3, \ldots$, B_nB_1 die Projektionen der Seiten, so hat man mit Rücksicht auf die Zeichen ihrer Werte (Planim. §. 14, 1)

$$B_1B_2 + B_2B_3 + \ldots + B_nB_1 = 0$$

und die Projektion einer Seite ist der Summe der Projektionen der übrigen Seiten entgegengesetzt gleich.

Wenn man die auf einer Ebene der Lage und Größe nach zerstreut gegebenen Strecken A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$, A_nB_n auf eine beliebige Gerade derselben Ebene durch Parallelen von beliebiger Richtung projiciert, so hängt die Summe der Projektionen im allgemeinen von der Wahl der Richtungen ab. Zieht man nämlich von einem beliebigen Anfang C die Strecken CC_1, $C_1C_2, \ldots$, $C_{n-1}C_n$ von gleicher Richtung und Größe mit den gegebenen Strecken, so fällt der Endpunkt C_n mit dem Anfang C im allgemeinen nicht zusammen. Werden nun die gleichen und gleichgerichteten Strecken A_1B_1 und CC_1 durch Parallelen auf dieselbe Gerade projiciert, so sind auch die Projektionen derselben gleich und gleichgerichtet. Also ist auf einer Geraden bei beliebiger Richtung der Projicierenden die Summe der Projektionen von A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$, A_nB_n gleich der Summe der Projektionen von CC_1, $C_1C_2, \ldots$, $C_{n-1}C_n$ d. i. gleich der Projektion der Strecke CC_n. Fällt aber C_n mit C zusammen, so verschwindet die Summe der Projektionen von A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$, A_nB_n auf jede Gerade bei jeder Richtung der parallelen Projicierenden, weil $CC_n = 0$ ist.

Die auf einer Ebene gegebenen Strecken A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$, A_nB_n werden mehrmal auf verschiedene Weise durch Parallelen von beliebiger Richtung auf eine beliebige Gerade projiciert und jedesmal die Summe der Projektionen gebildet: wenn bei zwei verschiedenen Richtungen der Projicierenden die Summe der Projektionen verschwindet, so verschwindet sie auch bei jeder andern Richtung der Projicierenden, weil jedes aus den gegebenen Strecken durch parallele Verschiebung zusammengesetzte Polygon $CC_1C_2 \ldots C_n$ ein geschlossenes ist. Fiele nämlich C_n mit C nicht zusammen, so würde die Projektion von CC_n nur dann verschwinden, wenn die Projicierenden mit CC_n parallel wären. Dies streitet gegen die Voraussetzung, daß bei zwei verschiedenen Richtungen der Projicierenden die Summe der Projektionen der gegebenen Strecken, mithin die Projektion von CC_n verschwindet.*)

Ebenso schließt man in Bezug auf die im Raume der Lage und Größe nach gegebenen Strecken A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$, welche mehrmal in

*) Möbius Statik 47.

verschiedener Weise auf eine beliebige Gerade durch parallele Ebenen von beliebiger Stellung projiciert werden: wenn bei drei verschiedenen Stellungen der projicierenden Ebenen, die keine gemeinschaftliche Richtung enthalten, die Summe der Projektionen verschwindet, so verschwindet sie auch bei jeder andern Stellung der projicierenden Ebenen, weil jedes durch parallele Verschiebung der Strecken zusammengesetzte Polygon ein geschlossenes ist.

2. Wenn im Raume die Punkte A, B, C, .. mit den dazu gehörigen Coefficienten (Massen, Gewichten) α, β, γ, .. gegeben sind und die Summe $\alpha+\beta+\gamma+..$ nicht verschwindet, so kann ein Punkt S von solcher Lage konstruiert werden, daß für jeden beliebigen Punkt O die Strecke $(\alpha+\beta+\gamma+..)OS$ aus den Strecken $\alpha.OA$, $\beta.OB$, $\gamma.OC$, .. durch parallele Verschiebung zusammengesetzt d. h. ein aus den Strecken $\alpha.OA$, $\beta.OB$, .., $(\alpha+\beta+\gamma+..)SO$ durch parallele Verschiebung zusammengesetztes Polygon ein geschlossenes ist. Zieht man durch die Punkte A, B, C, .., S parallele Gerade von beliebiger Richtung, welche eine beliebige Ebene in A', B', C', .., S' schneiden, so besteht die Gleichung

$$(\alpha+\beta+\gamma+..)SS' = \alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+..$$

Der so durch die Punkte A, B, C, .. und die Proportion der Coefficienten $\alpha:\beta:\gamma:..$ bestimmte Punkt S heißt der **Schwerpunkt der Punkte** $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ...*)

Beweis. Durch den Punkt O ziehe man beliebig die nicht auf einer Ebene liegenden Geraden OX, OY, OZ und projiciere die gegebenen Punkte A, B, C, .. auf OX, OY, OZ durch Ebenen, welche der Reihe nach mit den Ebenen OYZ, OZX, OXY parallel sind. Die Projektionen von A werden durch A_x, A_y, A_z bezeichnet, u. s. w. Man bestimme nun auf OX, OY, OZ die Punkte S_x, S_y, S_z durch die Gleichungen

$$OS_x = \frac{\alpha.OA_x+\beta.OB_x+\gamma.OC_x+..}{\alpha+\beta+\gamma+..}$$

$$OS_y = \frac{\alpha.OA_y+\beta.OB_y+\gamma.OC_y+..}{\alpha+\beta+\gamma+..}$$

$$OS_z = \frac{\alpha.OA_z+\beta.OB_z+\gamma.OC_z+..}{\alpha+\beta+\gamma+..}$$

*) Die Schwerpunkte sowohl von physischen Körpern (massiven Figuren), als auch von geometrischen Figuren sind zuerst von Archimedes untersucht und in der Geometrie verwendet worden (die Quadratur der Parabel, und vom Gleichgewicht der Ebenen und von den schwimmenden Körpern, je zwei Bücher). Geometrische

und konstruiere den Punkt S, dessen Projektionen S_x, S_y, S_z sind, in welchem sich demnach drei bestimmte projicierende Ebenen schneiden. Die drei Gleichungen, wenn sie auf Null reduciert sind, geben zu erkennen, daß jedes aus den Strecken $\alpha . OA$, $\beta . OB$, $\gamma . OC$, .., $(\alpha+\beta+\gamma+..)SO$ durch parallele Verschiebung zusammenzusetzende Polygon ein geschlossenes ist (1). Wenn man daher die Punkte A, B, C, .., S, O durch parallele Ebenen von beliebiger Stellung auf eine beliebige Gerade p projiciert, so verschwindet die Summe der Projektionen von $\alpha . OA$, $\beta . OB$, $\gamma . OC$, .., $(\alpha+\beta+\gamma+..)SO$. Die Projektionen von OA, OB, OC, .., SO sind aber der Reihe nach gleich und gleichgerichtet mit $A'A$, $B'B$, $C'C$, .., SS', wenn diese Geraden parallel mit der Geraden p gezogen und von der den Punkt O projicierenden Ebene, in A', B', C', .., S' geschnitten werden. Also ist auch

$$0 = \alpha . A'A+\beta . B'B+\gamma . C'C+..+(\alpha+\beta+\gamma+..)SS'$$

oder

$$(\alpha+\beta+\gamma+..)SS' = \alpha . AA'+\beta . BB'+\gamma . CC'+..$$

Zusatz. Demnach schließt man: Wenn bei 3 nicht in einer Stellung enthaltenen Richtungen der Parallelen SS', AA', BB', .., die von einer beliebigen Ebene begrenzt werden, die Gleichung

$$(\alpha+\beta+\gamma+..)SS' = \alpha . AA'+\beta . BB'+\gamma . CC'+..$$

stattfindet, ohne daß die Summe $\alpha+\beta+\gamma+..$ verschwindet, so ist die Gleichung bei jeder Richtung der Parallelen gültig, und der Punkt S ist der Schwerpunkt der Punkte $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, ...

Oder: Wenn $MNOP..$ ein beliebiges Polygon, S ein beliebiger Punkt ist, und die Strecken $\alpha . SA$, $\beta . SB$, $\gamma . SC$, .. der Reihe nach gleich und gleichgerichtet mit den Seiten MN, NO, OP, .. gezogen werden, so ist S der Schwerpunkt von $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$ ...*) Zieht man nämlich durch die Punkte S, A, B, .. parallele Gerade von beliebiger Richtung, welche zwei parallele Ebenen von beliebiger Stellung in S und S', A'' und A', B'' und B', .. schneiden, so hat man aus den obigen Gründen

$$0 = \alpha . AA''+\beta . BB''+\gamma . CC''+..$$

Anwendungen des Schwerpunktes wurden gemacht von Pappus (Guldin s. unten 13) in neuerer Zeit von L'Huilier (polygonométrie 1789), Carnot (géom. de position 1803), umfassend von Möbius (Barycentr. Calcul. 1827), Steiner die Krümmungs-Schwerpunkte 1838 Crelle J. 21 p. 36. Die in den Archimedischen Gesetzen enthaltene den Schwerpunkt charakterisierende Gleichung (Gleichung der Momente) steht an der Spitze von Commandinos Schrift de centro gravitatis 1565. Über dieselbe vergl. Baryc. Calc. 8 und Meier Hirsch geom. Aufg. II p. 330.

*) L'Huilier polyg. p. 86 und Carnot géom. de pos. 269 in dem Fall $\alpha = \beta = \gamma = ...$

Zugleich ist $SS' = A''A' = B''B' = ..$, also identisch

$$(\alpha+\beta+\gamma+..)SS' = \alpha.A''A'+\beta.B''B'+\gamma.C''C'+..$$

folglich durch Addition

$$(\alpha+\beta+\gamma+..)SS' = \alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+..$$

3. Das System der Punkte $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, .. hat nicht mehr als einen Schwerpunkt S. Wäre ein anderer Punkt T Schwerpunkt der gegebenen Punkte, so ziehe man durch die Punkte S, T, A, B, C, .. parallele Gerade von beliebiger Richtung, die von einer Ebene, welche den Punkt T, aber nicht zugleich den Punkt S enthält, in S', T', A', B', C', .. geschnitten werden. Dann hätte man (2), weil TT' verschwindet,

$$0 = \alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+..$$

Nach den Voraussetzungen verschwindet aber weder $\alpha+\beta+\gamma+..$, noch SS', also ist $(\alpha+\beta+..)SS'$ von $\alpha.AA'+\beta.BB'+..$ verschieden, d. h. S ist nicht Schwerpunkt des gegebenen Systems, gegen die Voraussetzung.

Wenn die gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen, so liegt ihr Schwerpunkt auf derselben Geraden. Läge der Schwerpunkt S neben der Geraden AB, so ziehe man durch S, A, B, .. parallele Gerade von beliebiger Richtung und schneide dieselben durch eine Gerade, die mit AB parallel ist und den Punkt S enthält, in S, A', B', ... Weil $SS = 0$ und $AA' = BB' = ..$, so findet man $0 = \alpha+\beta+\gamma+..$, gegen die Voraussetzung.

Wenn die gegebenen Punkte auf einer Ebene liegen, so liegt ihr Schwerpunkt auf derselben Ebene. Läge der Schwerpunkt S außer der Ebene ABC, so ziehe man durch S, A, B, .. parallele Gerade von beliebiger Richtung und schneide dieselben durch eine Ebene, die mit ABC parallel ist und den Punkt S enthält, in S, A', B', ... Weil $SS = 0$ und $AA' = BB' = ..$, so findet man $0 = \alpha+\beta+..$, gegen die Voraussetzung.

4. Der Schwerpunkt P von $\alpha.A$ und $\beta.B$ teilt die Strecke AB nach dem Verhältnis $\beta:\alpha$ innen oder außen, je nachdem β mit α dasselbe Zeichen hat oder nicht. Denn aus der Proportion $AP:PB = \beta:\alpha$ folgt die Gleichung

$$\alpha.AA'+\beta.BB' = (\alpha+\beta)PP'$$

für jede Richtung der Parallelen AA', BB', PP' und jede Gerade, welche dieselben in A', B', P' schneidet (Planim. §. 8, 4).

Der Schwerpunkt Q von $\alpha.A$, $\beta.B$ und $\gamma.C$ ist der Schwerpunkt

von $(\alpha+\beta)P$ und $\gamma . C$, und teilt die Strecke PC nach dem Verhältnis $\gamma : \alpha+\beta$. Denn aus der Proportion $PQ : QC = \gamma : \alpha+\beta$ fließt die Gleichung

$$(\alpha+\beta)PP' + \gamma . CC' = (\alpha+\beta+\gamma)QQ'$$

also auch

$$\alpha . AA' + \beta . BB' + \gamma . CC' = (\alpha+\beta+\gamma)QQ'$$

für jede Richtung der Parallelen und jede Ebene, welche dieselben in A', B', C', P', Q' schneidet. U. s. w.

Überhaupt können bei der Bestimmung des Schwerpunkts von $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, .. zwei oder mehr Punkte des Systems durch ihren besondern Schwerpunkt ersetzt werden, dem als Coefficient die Summe der Coefficienten der zu ersetzenden Punkte gegeben wird.

Wenn einige unter den Coefficienten negativ sind, so kann man zuerst den Schwerpunkt M der Punkte bestimmen, welche positive Coefficienten haben, dann den Schwerpunkt N der Punkte mit negativen Coefficienten, endlich den Schwerpunkt S der Punkte $\mu . M$ und $-\nu . N$, nachdem man durch μ und $-\nu$ die Summen der positiven und der negativen Coefficienten bezeichnet hat. Dann ist S der gesuchte Schwerpunkt des gegebenen Systems.

5. Der Schwerpunkt Q der Punkte $\alpha . A$, $\beta . B$ und $\gamma . C$, welche nicht auf einer Geraden liegen, teilt die Fläche des Dreiecks ABC nach der Proportion*)

$$BCQ : CAQ : ABQ : ABC = \alpha : \beta : \gamma : \alpha+\beta+\gamma$$

Ist nämlich C_1 der Schwerpunkt von $\alpha . A$ und $\beta . B$, so ist

$$ABQ : ABC = C_1Q : C_1C = \gamma : \alpha+\beta+\gamma$$

weil $C_1Q : QC = \gamma : \alpha+\beta$ (4). U. s. w.

Der Schwerpunkt R der Punkte $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$ und $\delta . D$, welche nicht auf einer Ebene liegen, teilt das Volum des Tetraeders $ABCD$ nach der Proportion

$$CBDR : ACDR : BADR : ABCR : ABCD = \alpha : \beta : \gamma : \delta : \alpha+\beta+\gamma+\delta$$

Wenn man nämlich durch A_1 den Schwerpunkt von $\beta . B$, $\gamma . C$ und $\delta . D$ bezeichnet, so ist

$$CBDR : ABCD = CBDR : CBDA = A_1R : A_1A = \alpha : \alpha+\beta+\gamma+\delta$$

weil $A_1R : RA = \alpha : \beta+\gamma+\delta$ (4). U. s. w.

Bei diesen Sätzen ist zu beachten, daß $ABC = BCA = CAB$, $ABC + ACB = 0$ (Planim. §. 9), $ABCD = BCAD = ..$, $ABCD + ABDC = 0$ (§. 8, 15).

*) Möbius Baryc. Calc. 24 ff.

Man kann jeden Punkt der Geraden AB als Schwerpunkt von $\alpha.A$ und $\beta.B$, jeden Punkt der Ebene ABC als Schwerpunkt von $\alpha.A$, $\beta.B$ und $\gamma.C$, jeden Punkt des Raumes als Schwerpunkt von $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$ und dem außer der Ebene ABC liegenden Punkt $\delta.D$ darstellen, indem man den Verhältnissen $\alpha:\beta$, $\alpha:\beta:\gamma$, $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ die geeigneten Werte erteilt (der barycentrische Calcul).

6. Wenn die Summe der Coefficienten $\alpha+\beta+\gamma+..$ verschwindet, so hat das System der Punkte $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, .. im allgemeinen einen in einer bestimmten Richtung unendlich fernen Schwerpunkt, und die Summe

$$\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+..$$

verschwindet bei jeder Richtung der Parallelen AA', BB', .. unter der Bedingung, daß die in A', B', .. sie schneidende Ebene den Schwerpunkt enthält, d. h. mit einer Geraden parallel ist, in deren Richtung der Schwerpunkt des Systems liegt.*) Es sei R der Schwerpunkt von $\beta.B$, $\gamma.C$, .., der in endlichem Bereich liegt, weil $\beta+\gamma+..$ nicht verschwindet, sondern den Wert $-\alpha$ hat. Der Schwerpunkt des gegebenen Systems ist nun der Schwerpunkt von $\alpha.A$ und $-\alpha.R$, er teilt also die Strecke AR nach dem Verhältnis $-\alpha:\alpha=-1$ und liegt auf der Geraden AR unendlich fern. Zieht man durch R, A, B, C, .. parallele Gerade von beliebiger Richtung, welche von einer beliebigen Ebene in R', A', B', C', .. geschnitten werden, so hat man (2)

$$\beta.BB'+\gamma.CC'+..=(\beta+\gamma+..)RR'=-\alpha.RR'$$

Folglich hat $\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+..$ den Wert $\alpha(AA'-RR')$, und verschwindet, wenn die schneidende Ebene mit der Geraden AR parallel ist. Bezeichnet man ferner durch Q den Schwerpunkt von $\alpha.A$, $\gamma.C$, .., so findet man für $\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+..$ den Wert $\beta(BB'-QQ')$, der nur dann verschwindet, wenn die schneidende Ebene mit BQ parallel ist. Also muß BQ mit AR parallel sein, u. s. w.

In dem besondern Falle, daß zugleich ein Punkt des Systems der Schwerpunkt der übrigen Punkte ist, ist jeder Punkt des Systems der Schwerpunkt der übrigen Punkte; das System aller Punkte hat keinen Schwerpunkt und die Summe $\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+..$ verschwindet bei jeder Richtung der Parallelen und jeder Stellung der schneidenden Ebene. Es sei z. B. A der Schwerpunkt von $\beta.B$, $\gamma.C$, ... Dann hat man für jede Richtung der Parallelen und jede Stellung der schneidenden Ebene

*) Möbius Baryc. Calc. §. 9 und 10.

$$\beta . BB' + \gamma . CC' + \ldots = (\beta + \gamma + \ldots) AA'$$

Nun ist $\beta + \gamma + \ldots = -\alpha$, folglich u. s. w.

Ein solches System ohne Schwerpunkt wird erhalten, indem man zu dem System $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C, \ldots$ seinen Schwerpunkt S mit dem Coefficienten $-(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$ hinzusetzt.

7. Wenn der Schwerpunkt der Punkte $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C, \ldots$ durch S, und ein beliebiger Punkt durch O bezeichnet wird, so ist*)

$$\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + \ldots - (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) OS^2 = \frac{\alpha\beta . AB^2 + \alpha\gamma . AC^2 + \ldots + \beta\gamma . BC^2 + \ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}$$

Beweis. Durch den Punkt O ziehe man wie oben (2) die Geraden OX, OY, OZ, jedoch so, daß sie Kanten einer dreirechtwinkeligen Ecke sind. Nun projiciere man die Strecken OS, OA, OB, $OC, \ldots$ auf OX, OY, OZ durch Ebenen, die der Reihe nach mit den Ebenen OYZ, OZX, OXY parallel sind, und bezeichne die Projektionen auf OX durch x, x_1, x_2, x_3, .., auf OY durch y, y_1, y_2, y_3, .., auf OZ durch z, z_1, z_2, z_3, ... Dann ist (2)

$$(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \ldots$$

u. s. w. Hieraus folgt

$$(\alpha + \beta + \ldots)(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 x^2 = (\alpha + \beta + \ldots)(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 \ldots) - (\alpha x_1 + \beta x_2 + \ldots)^2$$

Nach Entwickelung der letztern Formel bleiben keine Glieder mit den Coefficienten α^2, $\beta^2, \ldots$ übrig. Der Coefficient $\alpha\beta$ kommt in 3 Gliedern vor, deren Verein

$$\alpha\beta(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = \alpha\beta(x_1 - x_2)^2$$

ist. U. s. w. Daher findet man

$$(\alpha + \beta + \ldots)(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 x^2 = \alpha\beta(x_1 - x_2)^2 + \alpha\gamma(x_1 - x_3)^2 + \ldots + \beta\gamma(x_2 - x_3)^2 + \ldots$$

Ebenso ergeben sich die Gleichungen

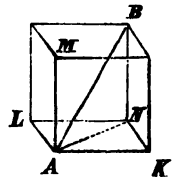
$$(\alpha + \beta + \ldots)(\alpha y_1^2 + \beta y_2^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 y^2 = \alpha\beta(y_1 - y_2)^2 + \alpha\gamma(y_1 - y_3)^2 + \ldots + \beta\gamma(y_2 - y_3)^2 + \ldots$$

$$(\alpha + \beta + \ldots)(\alpha z_1^2 + \beta z_2^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 z^2 = \alpha\beta(z_1 - z_2)^2 + \alpha\gamma(z_1 - z_3)^2 + \ldots + \beta\gamma(z_2 - z_3)^2 + \ldots$$

Die Differenzen $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ sind aber zufolge der Konstruktion die Normalprojektionen der Strecke BA auf die Geraden

*) Lagrange's Satz (Mém. de Berlin 1783 p. 290).

OX, OY, OZ, aus denen die Strecke selbst berechnet werden kann. Man ziehe durch A die Geraden AK, AL, AM parallel mit OX, OY, OZ, und lege durch B Ebenen parallel mit den Ebenen ALM, AMK, AKL, welche die Geraden AK, AL, AM in den Punkten K, L, M schneiden. Hierdurch entsteht ein rechtwinkeliges Parallelepiped, dessen Kanten AK, $AL = KN$, $AM = NB$ die Normalprojektionen der Diagonale AB auf Gerade der Richtungen OX, OY, OZ sind. Nun ist nach dem Pythagoreischen Satze



$$AK^2 + KN^2 = AN^2, \quad AN^2 + NB^2 = AB^2 .$$

folglich

$$AK^2 + AL^2 + AM^2 = AB^2$$

oder

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = AB^2$$

u. s. w. Ebenso ist

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = OA^2, \text{ u. s. w.}$$

Demnach findet man durch Addition der 3 obigen Gleichungen

$$(\alpha + \beta + ..)(\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + ..) - (\alpha + \beta + ..)^2 OS^2$$
$$= \alpha\beta . AB^2 + \alpha\gamma . AC^2 + .. + \beta\gamma . BC^2 + ..$$

woraus die zu beweisende Gleichung sich ergiebt, nachdem man noch durch $\alpha + \beta + ..$ dividiert hat.

Anmerkung. Wenn der willkürliche Punkt O mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt, so verschwindet OS, und man behält die Gleichung*)

$$\alpha . SA^2 + \beta . SB^2 + .. = \frac{\alpha\beta . AB^2 + \alpha\gamma . AC^2 + .. + \beta\gamma . BC^2 + ..}{\alpha + \beta + \gamma + ..}$$

8. Die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + ..$ behält für verschiedene Punkte O einen und denselben Wert, wenn OS unverändert bleibt. Wenn demnach $A, B, C, ..$ gegebene Punkte, $\alpha, \beta, \gamma, ..$ gegebene Zahlen sind, deren Summe nicht verschwindet, so liegen die Punkte O, für welche die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + ..$ einen und denselben Wert hat, auf einer Kugel, deren Centrum der Schwerpunkt von $\alpha . A, \beta . B, \gamma . C, ..$ ist.**)

Überhaupt hat zufolge der aufgestellten Gleichung die Summe

*) Lagrange a. a. O., und Carnot géom. de pos. 280 für den Fall $\alpha = \beta = \gamma = ...$

**) Vergl. Planim. §. 14, 22. Carnot a. a. O. Meier Hirsch geom. Aufg. II p. 336 ff.

$\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \ldots$ einen kleinsten oder einen größten Wert, je nachdem $\alpha + \beta + \ldots$ positiv oder negativ ist. Ihren kleinsten oder größten Wert erreicht die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \ldots$, indem der beliebige Punkt O mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt. Sollte die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \ldots$ einen unveränderlichen Wert haben, der den Wert $\alpha . SA^2 + \beta . SB^2 + \ldots$ in dem einen Falle nicht erreichte, in dem andern Falle überstiege, so würden die Punkte O auf einer imaginären Kugel liegen, die zwar ein reales Centrum S, aber einen imaginären Radius hat.

Wenn $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ verschwindet, so liegen die Punkte O, für welche die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \ldots$ einen und denselben Wert hat, im allgemeinen auf einer bestimmten Kugel, deren Centrum der unendlich ferne Schwerpunkt des Systems $\alpha . A$, $\beta . B$, .. ist (6), d. h. auf einer bestimmten Ebene, die zu der Richtung normal steht, in welcher der unendlich ferne Schwerpunkt liegt. Es sei R der Schwerpunkt von $\beta . B$, $\gamma . C$, ... Dann ist für jeden beliebigen Punkt O (7)

$$\beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + \ldots - (\beta + \gamma + \ldots) OR^2 = \frac{\beta\gamma . BC^2 + \ldots}{\beta + \gamma + \ldots}$$

folglich, weil $\beta + \gamma + \ldots = -\alpha$,

$$\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 = \alpha (OA^2 - OR^2) + \frac{\beta\gamma . BC^2 + \ldots}{\beta + \gamma + \ldots}$$

Demnach bleibt die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + \ldots$ unverändert, wenn die Differenz $OA^2 - OR^2$ ihren Wert nicht verändert, d. h. wenn O auf einer bestimmten Ebene liegt, deren Normale AR ist (Planim. §. 14, 2).

In dem besondern Falle, daß die gegebenen Punkte $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, .. keinen Schwerpunkt haben, d. h. jeder dieser Punkte der Schwerpunkt der übrigen ist (6), hat die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + \ldots$ für jeden beliebigen Punkt O denselben Wert*), der auf verschiedene Weise sich ausdrücken läßt, z. B. durch

$$\frac{\beta\gamma . BC^2 + \ldots}{\beta + \gamma + \ldots}$$

indem $OA^2 - OR^2$ verschwindet, oder durch $\beta . AB^2 + \gamma . AC^2 + \ldots$, indem OA verschwindet, u. s. w.

9. Eine Figur (Linie, Fläche, Raum) heißt homogen, wenn alle ihre Punkte mit gleichen Coefficienten behaftet sind. Geometrische Figuren

*) Möbius Crelle J. 26 p. 28.

werden als homogen genommen, so lange nicht das Gegenteil ausdrücklich vorausgesetzt ist.

Der Schwerpunkt einer Strecke, eines Parallelogramms, eines Parallelepipeds liegt im Centrum dieser Figuren. Denn jedem Punkt X einer solchen Figur entspricht ein Punkt X' derselben Figur dergestalt, daß das Centrum die Mitte der Strecke XX' ist und daß folglich der Schwerpunkt von X und X' im Centrum liegt. Ebendaselbst liegt der Schwerpunkt der Figur d. i. der Schwerpunkt von allen Paaren wie X und X'.

Der Schwerpunkt einer Figur, welche eine Axe oder eine Ebene besitzt, durch die sie in zwei gegen die Axe oder Ebene symmetrisch liegende Teile getrennt wird, liegt auf der erwähnten Axe oder Ebene. Denn jedem Punkt X einer solchen Figur entspricht ein Punkt X' derselben Figur dergestalt, daß die Strecke XX' von der Axe oder Ebene normal halbiert wird, und daß der Schwerpunkt von X und X' auf der Axe oder Ebene liegt. Der Schwerpunkt der Figur liegt aber auf der Geraden oder auf der Ebene, welche die Schwerpunkte von allen Paaren wie X und X' enthält (4 und 3).

Wenn ein planes Viereck 2 parallele Seiten hat, so liegt der Schwerpunkt seiner Fläche auf der Geraden, welche die Mitten der parallelen Seiten enthält. Und wenn ein Prisma durch 2 nicht parallele Ebenen begrenzt ist, so liegt der Schwerpunkt seines Volums auf der Ebene, welche die Mitten der parallelen Kanten enthält.

Ebenso schließt man von einer Figur, die ein Centrum besitzt, insbesondere von jeder regulären Figur, daß ihr Schwerpunkt von ihrem Centrum nicht verschieden ist.

10. Der Schwerpunkt der Dreiecksfläche ABC ist der Schwerpunkt der Punkte A, B und C, und teilt den Abstand der Mitte einer Seite von der gegenüberliegenden Spitze innen nach dem Verhältnis $1:2$. Man ziehe nach der Mitte C_1 von AB die Gerade CC_1, welche die Fläche ABC halbiert. Jedem Punkt X der einen Hälfte entspricht ein Punkt X' der andern Hälfte dergestalt, daß die Strecke XX' mit AB parallel ist und von CC_1 halbiert wird. Die Schwerpunkte von allen Paaren wie X und X' liegen auf der Geraden CC_1, also liegt der Schwerpunkt der Fläche ABC auf derselben Geraden. Ebenso schließt man, daß der Schwerpunkt der Fläche ABC auf der Geraden von A nach der Mitte von BC und auf der Geraden von B nach der Mitte von CA liegt. Der gesuchte Schwerpunkt ist also der gemeinschaftliche Punkt dieser Geraden, mithin der Schwerpunkt der Punkte A, B und C. Planim. §. 8, 3.

Der Schwerpunkt des Tetraedervolums $ABCD$ ist der Schwerpunkt der Punkte A, B, C und D, und teilt den Abstand des Schwerpunkts einer Fläche von der gegenüberliegenden Spitze nach dem Verhältnis 1 : 3. Man lege durch die Mitte C_1 von AB die Ebene C_1CD, welche das Volum $ABCD$ halbiert. Jedem Punkt X der einen Hälfte entspricht ein Punkt X' der andern Hälfte dergestalt, daß die Strecke XX' mit AB parallel ist und von der Ebene C_1CD halbiert wird. Hieraus folgt, daß der Schwerpunkt des Volums $ABCD$ auf der Ebene liegt, welche eine Kante des Tetraeders und die Mitte der gegenüberliegenden Kante enthält, und daß er mit dem Schwerpunkt der Punkte A, B, C, D zusammenfällt (§. 6, 4).

Der Schwerpunkt eines Pyramidenvolums teilt den Abstand des Schwerpunkts der Basis von der Spitze nach dem Verhältnis 1 : 3. Denn dieser Punkt erscheint als Schwerpunkt der Schwerpunkte von allen Querschnitten der Pyramide, die mit der Basis parallel sind, wenn die Coefficienten der Schwerpunkte sich verhalten wie die Querschnitte, zu denen sie gehören. Die Querschnitte sind ähnlich und perspektivisch, daher liegen ihre Schwerpunkte nebst dem Schwerpunkt der Pyramide auf der Geraden, welche den Schwerpunkt der Basis mit der Spitze verbindet. Der Schwerpunkt der Pyramide ist aber auch der Schwerpunkt für die Schwerpunkte der Tetraeder, in welche man die Pyramide durch Diagonaldreiecke zerlegen kann. Diese Schwerpunkte liegen auf der Ebene, welche mit der Basis parallel ist und den Abstand der Basis von der Spitze nach dem Verhältnis 1 : 3 teilt. Auf derselben Ebene liegt der Schwerpunkt der Pyramide, folglich u. s. w.

Der Schwerpunkt eines Prismenvolums ist der Schwerpunkt der Fläche des Mittelschnitts, welcher die parallelen und gleichen Kanten des Prisma halbiert. Denn die Schwerpunkte von allen Strecken, die mit den Kanten des Prisma parallel und von den parallelen Flächen des Prisma begrenzt sind, liegen auf der Fläche des Mittelschnitts. Der Schwerpunkt des Prismenvolums ist der Schwerpunkt dieser mit gleichen Coefficienten behafteten Schwerpunkte d. h. der Fläche des Mittelschnitts, in Betracht daß alle Strecken, die durch ihre Schwerpunkte ersetzt werden, gleich sind.

Der Schwerpunkt des dreiseitigen Prismenvolums $ABCA'B'C'$, dessen Mittelschnitt $A''B''C''$ ist, fällt mit dem Schwerpunkt der Punkte A'', B'' und C'', also auch mit dem Schwerpunkt der Punkte A, B, C, A', B' und C' zusammen.

11. Der Schwerpunkt eines Systems von Strecken, Dreiecksflächen, Tetraedervolumen ist der Schwerpunkt von $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, ...,

wenn die Schwerpunkte der gegebenen Elemente (Strecken, u. s. w.) durch A, B, C, .. bezeichnet werden, und die Coefficienten $\alpha : \beta : \gamma : \ldots$ der Reihe nach wie die gegebenen Elemente sich verhalten (4). Hiernach läßt sich für den Perimeter eines Polygons, für die Fläche eines planen Polygons, für die Oberfläche eines Polyeders und für das Volum desselben der Schwerpunkt bestimmen. Bei einer krummen Linie oder Fläche nimmt man ein eingeschriebenes Polygon oder Polyeder zu Hilfe, das mit der Linie oder Fläche beliebig viel Punkte gemein hat, sucht für den Perimeter oder die Fläche des Polygons, für die Oberfläche oder das Volum des Polyeders den Schwerpunkt, und bestimmt dessen Lage in dem Falle, daß das Polygon mit der Linie, das Polyeder mit der Fläche alle Punkte gemein hat. Dieser letzte Prozeß erfordert in der Regel Integralrechnung.

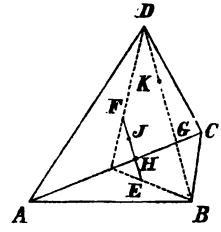
Der Schwerpunkt für den Perimeter des Dreiecks ABC ist das Centrum des Kreises, der dem Dreieck $A'B'C'$ eingeschrieben ist, dessen Eckpunkte A', B', C' die Mitten der Seiten BC, CA, AB sind.*) Denn die Schwerpunkte der Strecken BC, CA, AB sind A', B', C' (9). Der Schwerpunkt für den Perimeter ABC ist also der Schwerpunkt von $BC.A'$, $CA.B'$ und $AB.C'$. Der Schwerpunkt von $BC.A'$ und $CA.B'$ teilt die Strecke $A'B'$ nach dem Verhältnis $CA : BC = C'A' : B'C'$ (4), und liegt auf der Halbierenden des Winkels $A'C'B'$ (Planim. §. 8, 6). U. s. w.

Der Schwerpunkt für die Oberfläche des Tetraeders $ABCD$ ist das Centrum der Kugel, die dem Tetraeder $A'B'C'D'$ eingeschrieben ist, dessen Eckpunkte A', B', C', D' die Schwerpunkte der Flächen CBD, ACD, BAD, ABC sind.**) Denn der Schwerpunkt für die gegebene Oberfläche ist der Schwerpunkt von $CBD.A'$, $ACD.B'$, $BAD.C'$ und $ABC.D'$. Der Schwerpunkt von $CBD.A'$ und $ACD.B'$ teilt die Strecke $A'B'$ nach dem Verhältnis $ACD : CBD = A'C'D' : C'B'D'$, und liegt auf der den Flächenwinkel $A'\overline{C'D'}B'$ halbierenden Ebene (§. 8, 13). U. s. w.

Um den Schwerpunkt für die Fläche des planen Vierecks $ABCD$ zu konstruieren***), konstruiere man die Schwerpunkte E und F der Dreiecksflächen ABC und ACD, und bestimme den Schwerpunkt von $ABC.E$ und $ACD.F$. Wird BD von AC in G geschnitten, so ist $ABC : ACD = BG : GD$. Also ist der gesuchte Punkt der Schwer-

*) Poinsot Statik 150.
**) Gerono Gerg. Ann. 17 p. 330.
***) Quart. Journ. 1864 t. 6 p. 127. Dieser Schwerpunkt war im 16. Jahrh. bekannt. S. Stevin Statica II prop. 6. Horner 1827 Astron. Nachr. V p. 281. Möbius Statik 113.

punkt von $BG.E$ und $GD.F$ d. i. von $BG.A$, $BG.B$, $BG.C$ und $GD.A$, $GD.C$, $GD.D$. Für $BG.A$ und $GD.A$ kann $BD.A$, für $BG.C$ und $GD.C$ kann $BD.C$, für $BG.B$ und $GD.D$ kann $BD.K$ gesetzt werden, nachdem man $BK = GD$ auf der Diagonale BD gemacht hat (4). Demnach ist der gesuchte Punkt der Schwerpunkt von A, C, K.



Die Strecke EF ist mit BD parallel, und wird von AC in H so geschnitten, daß $EH : HF = BG : GD$. Also liegt der gesuchte Punkt J auf EF, so daß $EJ = HF$.

Dabei ist

$$ACJ + CFJ + FAJ = ACF$$

$$CFJ = CHE, \quad FAJ = HAE, \quad CHE + HAE = AEC$$

$$ACJ + AEC = ACF$$

folglich

$$ACJ = ACF - AEC = \tfrac{1}{3}(ACD - ABC)$$

Wenn insbesondere CD parallel mit AB ist, so liegt der Schwerpunkt J auch auf der Geraden, welche die Mitten von AB und CD verbindet (9), u. s. w.

Über den Schwerpunkt einer sphärischen Figur s. Trigon. §. 6, 2.

12. Für irgend ein zwischen parallelen Ebenen enthaltenes Körpersegment kann der Abstand seines Schwerpunkts von der Basis des Segments berechnet werden, wenn der mit der Basis parallele Querschnitt des Körpers in dem beliebigen Abstand x von der Basis eine gegebene Funktion von x ist, die durch $f(x)$ bezeichnet wird. Das Prisma, dessen Basis der Querschnitt $f(x)$ und dessen Höhe der $n$te Teil der Höhe h des gegebenen Segments ist, hat das Volum $\frac{h}{n} f(x)$. Sein Schwerpunkt hat den Abstand $x + \frac{h}{2n}$ von der Basis des Segments (10) und den Coefficienten $\frac{h}{n} f(x)$. Wenn nun der Schwerpunkt des gegebenen Körpersegments den Abstand u von der Basis hat, so bilde man einerseits das Produkt von u mit der Summe A der Werte, welche die Formel $\frac{h}{n} f(x)$ bei den Werten von x

$$0, \quad \frac{1}{n}h, \quad \frac{2}{n}h, \ldots, \quad \frac{n-1}{n}h$$

erhält; und andererseits die Summe B der Werte, welche die Formel $\left(x+\frac{h}{2n}\right)\frac{h}{n}f(x)$ bei den angegebenen Werten von x annimmt. Das Produkt uA wird der Summe B gleich (2), wenn die willkürliche Zahl n ins Unendliche wächst.

Die Summe A drückt, wenn n unendlich wird, das Volum des gegebenen Körpersegments aus (§. 8, 7). Die Summe B besteht aus der Summe C der Glieder, welche aus der Formel $\frac{h}{n}xf(x)$ entspringen, und aus der Summe D der Glieder, welche die Formel $\frac{h}{2n}\frac{h}{n}f(x)$ darbietet. Die Summe D hat aber den Wert $\frac{h}{2n}A$ und verschwindet, wenn n unendlich groß wird. Also behält man zur Bestimmung von u die Gleichung $uA = C$.

Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion von x ist, die den zweiten Grad nicht übersteigt, so ist die Formel $xf(x)$, die durch $g(x)$ bezeichnet wird, eine Funktion von x von höchstens drittem Grade. Also hat man (§. 9, 10)

$$A = \tfrac{1}{6}h[f(0)+4f(\tfrac{1}{2}h)+f(h)]$$
$$C = \tfrac{1}{6}h[g(0)+4g(\tfrac{1}{2}h)+g(h)]$$

Nun ist $g(0) = 0$, $g(\frac{1}{2}h) = \frac{1}{2}hf(\frac{1}{2}h)$, $g(h) = hf(h)$, folglich*)

$$\frac{u}{h} = \frac{2f(\frac{1}{2}h)+f(h)}{f(0)+4f(\frac{1}{2}h)+f(h)}$$

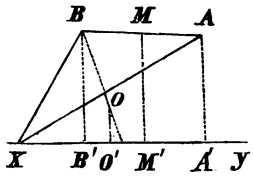
Anmerkung. Der einfachste Körper, für welchen die Höhe seines Schwerpunkts nach dieser Formel sich berechnen läßt, ist der Pyramidenstumpf. Auf dem obigen Wege wird auch für ein planes Flächensegment zwischen parallelen Sehnen der Abstand seines Schwerpunkts von der als Basis des Segments angenommenen Sehne gefunden, wenn der parallele Querschnitt des Segments eine gegebene Funktion seines Abstands von der Basis ist.

13. Wenn eine gegebene Planfigur um eine gegebene Gerade ihrer Ebene rotiert, so ist die von ihrem Perimeter beschriebene Rotationsfläche das Produkt des Perimeters mit der Bahn seines Schwerpunkts, und der von der Fläche der Planfigur beschriebene Rotationskörper ist das Produkt der Fläche mit der Bahn ihres Schwerpunkts.**)

*) Brix und August. Vergl. §. 9, 10.

**) Dieser Doppelsatz ist unter dem Namen Guldinsche Regel bekannt. Untersuchungen über Rotationsgebilde wurden zuerst von Archimedes (Sphäroide und Konoide) angestellt, fortgesetzt von Keppler in der stereometria doliorum 1615,

Beweis. Ein planes Polygon, von welchem eine Seite AB die Mitte M hat, rotiere um die auf der Ebene des Polygons liegende Axe XY. Die Seite AB beschreibt die Kegelzone $AB \cdot 2\pi \cdot MM'$ (§. 10, 2. Anm.), wenn MM' der Abstand der Mitte M von der Axe ist. Der Schwerpunkt N des ganzen Perimeters ist der Schwerpunkt von den Schwerpunkten (Mitten) der Seiten, deren Coefficienten die Seiten sind. Indem man jede Seite mit dem Abstand ihres Schwerpunkts von der Axe multipliciert und die Produkte addiert, erhält man das Produkt des Perimeters mit dem Abstand NN' seines Schwerpunkts von der Axe (2). Also ist die Summe der von den Seiten beschriebenen Kegelzonen das Produkt des Perimeters mit $2\pi \cdot NN'$ d. i. mit der von dem Schwerpunkt N zurückgelegten Bahn.



Zieht man AA' und BB' normal zur Axe XY, so ist das Viereck $ABXB'$ sowohl die Summe der Dreiecke $XAB + XB'A$, als auch die Summe $XB'B + BB'A = XB'B + BB'A'$ d. i. $XA'B$, folglich $XAB = XA'B - XB'A$.

Der von dem Dreieck $XA'B$ beschriebene Rotationskörper ist $\frac{1}{3}\pi \cdot BB'^2 \cdot XA'$ oder $XA'B \cdot \frac{2}{3}\pi \cdot BB'$. Bezeichnet man durch O den Schwerpunkt der Fläche $XA'B$ und zieht OO' normal zur Axe, so ist $OO' = \frac{1}{3}BB'$, folglich der von $XA'B$ beschriebene Rotationskörper $= XA'B \cdot 2\pi \cdot OO'$. Ebenso findet man den von $XB'A$ beschriebenen Rotationskörper $= XB'A \cdot 2\pi \cdot PP'$, wenn P der Schwerpunkt der Fläche $XB'A$ und PP' normal zur Axe ist. Bezeichnet man ferner den Schwerpunkt der Fläche XAB d. i. $XA'B - XB'A$ durch Q und zieht QQ' normal zur Axe, so ist Q der Schwerpunkt von $XA'B \cdot O$ und $-XB'A \cdot P$, d. h.

$$XA'B \cdot OO' - XB'A \cdot PP' = XAB \cdot QQ'$$

Daher hat der von XAB beschriebene Rotationskörper das Volum $XAB \cdot 2\pi \cdot QQ'$.

Die Fläche der gegebenen Planfigur ist die Summe der Dreiecke, deren Basen die Teile des Perimeters sind und deren gemeinschaftliche Spitze in X liegt (Planim. §. 9, 10). Der Schwerpunkt R der Fläche ist der Schwerpunkt von den Schwerpunkten der einzelnen Dreiecksflächen, wenn diese Flächen ihren Schwerpunkten als Coefficienten

---

worin auch einzelne Fälle der Guldinschen Regel bereits vorkommen (theor. 18 ff.). Diese Regel ist von Pappus erfunden und mitgeteilt worden am Ende der Einleitung zum 7. Buch der collect. math., in der neuern Zeit wurde sie von Guldin in der zweiten Abteilung seines Werks Centrobaryca 1640 an vielen Beispielen erläutert aber noch nicht allgemein bewiesen. Von der Guldinschen Regel handeln ausführlich Meier Hirsch geom. Aufg. II, 160 ff., 192 f., Zehme Geom. d. Körper. 1859.

beigegeben werden. Das Produkt der ganzen Fläche mit dem Abstand RR' ihres Schwerpunkts von der Axe ist die Summe der Produkte der einzelnen Dreiecksflächen mit den Abständen ihrer Schwerpunkte von der Axe (2). Also ist der von der gegebenen Planfigur beschriebene Rotationskörper das Produkt der bewegten Fläche mit $2\pi . RR'$ d. i. mit der von dem Schwerpunkt R zurückgelegten Bahn.

Wenn das Polygon $AB\ldots$ einer Kurve eingeschrieben ist und mit ihr bei unendlicher Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte zusammenfällt, so fallen die Schwerpunkte für den Perimeter und die Fläche des Polygons mit den entsprechenden Schwerpunkten der Kurve zusammen, u. s. w.

14. Wenn ein Kreis um eine Axe seiner Ebene rotiert, so wird die beschriebene Ringfläche und das Ringvolum nach der Guldinschen Regel (13) gefunden. Bezeichnet man den Perimeter des Kreises durch p, die Fläche durch f, den Abstand des Centrums von der Axe durch a, so ist

$$\text{die Ringfläche} = p . 2\pi a$$
$$\text{das Ringvolum} = f . 2\pi a$$

weil der Schwerpunkt für den Perimeter und für die Fläche mit dem Centrum zusammenfällt.

Wenn überhaupt eine mit einer Axe versehene Planfigur um eine Gerade ihrer Ebene rotiert, die mit der Axe der Figur parallel ist, so beschreiben die beiden Hälften des Perimeters p und der Fläche f Ringflächen und Ringvolume, deren halbe Differenzen der Fläche und dem Volum gleich sind, welche eine Hälfte der Planfigur durch Rotation um ihre eigene Axe beschreibt.*) Haben die Schwerpunkte des Perimeters und seiner beiden Hälften die Abstände b, b', b'' von der Rotationsaxe, und die Abstände 0, c, $-c$ von der Axe der Figur, so ist $b' = b + c$, $b'' = b - c$, folglich

$$\text{die ganze Ringfläche} = p . 2\pi b$$
$$\text{„ äußere „} = \tfrac{1}{2}p . 2\pi b' = \tfrac{1}{2}p . 2\pi b + \tfrac{1}{2}p . 2\pi c$$
$$\text{„ innere „} = \tfrac{1}{2}p . 2\pi b'' = \tfrac{1}{2}p . 2\pi b - \tfrac{1}{2}p . 2\pi c$$

folglich die halbe Differenz der äußern und innern Ringfläche $= \frac{1}{2}p . 2\pi c$. Ebenso findet man die entsprechenden Ausdrücke für die Ringvolume.

Wenn die rotierende Planfigur keine Axe, aber ein Centrum besitzt, und durch den mit der Rotationsaxe parallelen Diameter geteilt wird, so ergeben sich dieselben Resultate wie vorhin.

Kennt man das von einer Planfigur (Linie oder Fläche) durch Rotation um eine Gerade ihrer Ebene beschriebene Gebilde (Fläche oder Volum), so kann man ohne weiteres auch das von der Planfigur durch

*) Meier Hirsch geom. Aufg. II, 173.

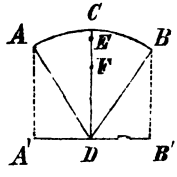
Rotation um eine andere Gerade der Ebene beschriebene Gebilde berechnen, wenn die beiden Rotationsaxen parallel sind. Ist A der Schwerpunkt der rotierenden Figur q, und wird die erste Rotationsaxe in B, die andere in C von der durch A gehenden Normale getroffen, so erhält man für die Differenz der beiden Rotationsgebilde den Ausdruck

$$q \,.\, 2\pi \,.\, AC - q \,.\, 2\pi \,.\, AB = q \,.\, 2\pi \,.\, BC$$

worin BC, der Abstand der beiden Rotationsaxen, positiv oder negativ ist, je nachdem die andere Axe von dem Schwerpunkt eine größere oder kleinere Entfernung hat, als die erste Axe.

15. Wenn die Fläche und das Volum eines Rotationsgebildes gegeben ist, so können nach der Guldinschen Regel die Schwerpunkte für den Perimeter und die Fläche der Meridianfigur bestimmt werden.*)

Z. B. der Schwerpunkt E des Kreisbogens AB und der Schwerpunkt F des Kreissektors DAB liegen auf dem Radius DC, welcher den Bogen und den Sektor halbiert (9). Wenn der Bogen und der Sektor um die normal zu DC durch D gelegte Axe rotieren, so hat man für die von dem Bogen beschriebene Fläche



$$AB \,.\, 2\pi \,.\, DE = A'B' \,.\, 2\pi \,.\, DC \quad (\S.\ 10,\ 7)$$

wobei die Normalprojektion $A'B'$ des Bogens AB auf die Rotationsaxe der Sehne des Bogens gleich ist; und für das von dem Sektor beschriebene Volum

$$DAB \,.\, 2\pi \,.\, DF = A'B' \,.\, \tfrac{2}{3}\pi \,.\, DC^2 \quad (\S.\ 10,\ 7)$$

Nun ist der Sektor $DAB = \frac{1}{2} AB \,.\, DC$, folglich

$$\frac{DE}{DC} = \frac{A'B'}{AB}, \quad DF = \tfrac{2}{3}\frac{A'B'}{AB} DC = \tfrac{1}{3} DE$$

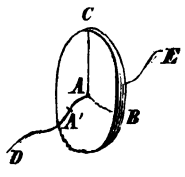
16. Die Guldinsche Regel dient auch dann zur Berechnung der Oberfläche und des Volums, welche eine bewegte Planfigur beschreibt, wenn die Punkte der Planfigur nicht auf parallelen Kreisen, sondern auf beliebigen andern parallelen Kurven normal zur Ebene der Planfigur fortschreiten.**)

Die Planfigur ABC werde so bewegt, daß der Punkt A auf einer gegebenen Kurve DE fortschreitet, daß die Ebene ABC die Kurve DE immer normal schneidet, und daß die Gerade AB, welche die bewegte Planfigur einmal mit der Ebene der Kurve DE gemein hat, immer auf

*) Meier Hirsch geom. Aufg. II, 192.

**) Diese Bemerkung ist zum Teil von Leibniz gemacht worden. Acta Erud. 1695 p. 493. Euler hat in der Abhandlung „über krumme Cylinder" 1778 (Nov. Act. Petrop. 12 p. 91) die nähern Bedingungen festgestellt. Vergl. Meier Hirsch geom. Aufg. II, §. 174 ff. (davon einiges ungenau) und Poisson Mécan. 84.

der Ebene der Kurve DE bleibt. Während der Punkt A den Bogen AA' zurücklegt, beschreibt der Perimeter der Planfigur ein Stück Ringfläche und die Fläche der Planfigur ein Stück Ringvolum, die nach der Guldinschen Regel desto genauer gefunden werden, je kleiner der Bogen AA' ist. Man kann nämlich das beschriebene Stück Ringfläche oder Ringvolum durch ein Stück der Ringfläche oder des Ringvolums ersetzen, welche die Planfigur ABC beschreibt, wenn sie um die Axe zu rotieren beginnt, die auf der Ebene ABC normal zu AB durch das Krümmungscentrum des Bogens AA' geht. Die Summe aller Stücke ist das Produkt von dem Perimeter oder der Fläche der Planfigur mit der Summe aller Bahnen des zugehörigen Schwerpunkts. Die Bahn des Schwerpunkts ist von der parallelen Bahn des Punktes A der Länge nach nicht geschieden.

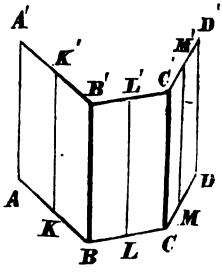


Die Kurve DE kann auch uneben sein. Dann hat man unter ihrer Ebene in dem Punkt A diejenige zu verstehen, welche den verschwindenden Bogen AA' und dessen Krümmungscentrum enthält. U. s. w.

17. Unter einem **Prismenhuf** (ungula, onglet) wird der Teil eines Prisma verstanden, welchen zwei nicht parallele Ebenen begrenzen. Man konstruiere einen Normalschnitt des Prisma, bestimme den Schwerpunkt seines Perimeters und ziehe durch diesen Punkt die Gerade, welche mit den Kanten des Prisma parallel ist. Das Stück dieser Geraden, welches zwischen den nicht parallelen Ebenen enthalten ist, die den Huf begrenzen, heißt die **Schwerkante** (barycentrische Kante) **für die Perimeter der Normalschnitte.**

Die prismatische (cylindrische) Hufffläche ist das Produkt des Perimeters ihres Normalschnitts mit der zugehörigen Schwerkante.*

Beweis. $ABCD\ldots$ ist ein Normalschnitt des Prisma, $K, L, M, \ldots$ sind die Mitten von $AB, BC, CD, \ldots$. Der Schwerpunkt S des Perimeters $ABCD\ldots$ ist der Schwerpunkt von $AB.K, BC.L, CD.M, \ldots$ Werden nun die durch $A, B, C, \ldots$ gehenden Kanten und die durch $S, K, L, M, \ldots$ gehenden Parallelen von einer beliebigen Ebene in $A', B', C', \ldots$ und $S', K', L', M', \ldots$ geschnitten, so hat man (2)



*) Die Cylinderhufe sind zuerst von Gregorius a St. Vincentio (opus geom. 1647) ohne barycentrische Betrachtungen komplaniert und kubiert worden. Meier Hirsch (geom. Aufg. II, 163) hat den obigen umfassenden Satz nicht ganz korrekt dargestellt, wie von Steiner u. a. erinnert worden ist.

$$AB.KK' + BC.LL' + CD.MM' + .. = (AB + BC + ..)SS'$$

Ebenso ist, wenn eine andere Ebene dieselben Geraden schneidet,

$$AB.KK'' + BC.LL'' + CD.MM'' + .. = (AB + BC + ..)SS''$$

folglich durch Subtraktion

$$AB.K'K'' + BC.L'L'' + .. = (AB + BC + ..)S'S''$$

Nun ist der auf der Ebene $ABB'A'$ liegende Teil der Hufffläche $= AB.K'K''$, u. s. w., $S'S''$ die Schwerkante für die Perimeter der Normalschnitte, also u. s. w.

Anmerkung. Zwei Hufe eines Prisma (Cylinder) haben gleiche Flächen (Zonen), wenn ihre Schwerkanten in Bezug auf die Perimeter der Normalschnitte des Prisma von gleicher Länge sind.

18. Die Schwerpunkte der Flächen von allen Schnitten eines Prisma liegen auf einer Geraden, die mit den Kanten des Prisma parallel ist.*)

Beweis. Die Flächen der Dreiecke ABC, ACD, .., aus denen ein Schnitt $ABCD$ .. des Prisma besteht, haben die Schwerpunkte K, L, .., die Fläche des Schnitts $ABCD$ .. hat den Schwerpunkt S. Zieht man durch die Punkte S, K, L, .. parallel mit den Kanten des Prisma Gerade, welche die Ebene eines andern Schnitts $A'B'C'D'$ .. des Prisma in S', K', L', .. schneiden, so ist

$$AA' + BB' + CC' = 3KK', \quad AA' + CC' + DD' = 3LL', \ldots,$$
$$ABC.KK' + ACD.LL' + .. = (ABCD\ ..)SS'$$

Zieht man ferner durch die Punkte A', B', .. Parallelen von beliebiger Richtung, welche die Ebene ABC in A'', B'', .. schneiden, so sind die Ebenen $AA'A''$, $BB'B''$, .. parallel und die auf denselben liegenden Dreiecke ähnlich, also

$$A''A' : B''B' : .. = AA' : BB' : ..$$

Daher ist $A''A' + B''B' + C''C' = 3K''K'$, d. h. K' der Schwerpunkt der Punkte A', B' und C' oder der Fläche $A'B'C'$, u. s. w. Ebendaher folgt auch

$$ABC.K''K' + ACD.L''L' = .. = (ABCD\ ..)S''S'$$

Nach §. 8, 6 hat man aber die Proportion der Flächen

$$A'B'C' : A'C'D' : .. = ABC : ACD : ..$$

Also ist auch

$$A'B'C'.K''K' + A'C'D'.L''L' + .. = (A'B'C'D'\ ..)S''S'$$

d. h. S' ist der Schwerpunkt der Fläche $A'B'C'D'$ ...

*) Meier Hirsch a. a. O. 161.

19. Zur Kubatur eines Prismenhufs bestimme man für die Fläche der Basis des Hufs den Schwerpunkt und ziehe durch denselben die mit den Kanten des Prisma parallele Gerade. Das Stück derselben, welches zwischen den nicht parallelen Ebenen enthalten ist, die den Huf begrenzen, heißt die Schwerkante für die Flächen der Prismenschnitte (18).

Das Volum des Prismenhufs ist das Produkt der Fläche des Normalschnitts des Prisma mit der zugehörigen Schwerkante.*)

Beweis. $A'B'C'D'..$ und $A''B''C''D''..$ sind die Schnitte des Prisma, die den Huf begrenzen, $ABCD..$ ist ein Normalschnitt des Prisma. Die Geraden, welche parallel mit den Kanten des Prisma durch die Schwerpunkte $K, L, .., S$ der Flächen $ABC, ACD, .., ABCD..$ gezogen werden, schneiden die Ebenen der Schnitte in $K', L', .., S'$ und $K'', L'', .., S''$, so daß

$$ABC.KK' + ACD.LL' + .. = (ABCD..)SS'$$
$$ABC.KK'' + ACD.LL'' + .. = (ABCD..)SS''$$

folglich $ABC.K'K'' + ACD.L'L'' + .. = (ABCD..)S'S''$

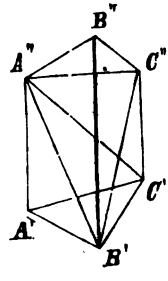
Der dreiseitige Prismenhuf $A'B'C'A''B''C''$ wird durch die Diagonalbreiecke $A''B'C'$ und $A''B'C''$ in die dreiseitigen Pyramiden $A'B'C'A''$, $A''B'C'C''$ und $A''B'C''B''$ zerlegt. Davon ist

$$A''B'C'C'' = A'B'C'C''$$

weil $A''A'$ mit der Fläche $B'C'C''$ parallel ist, und

$$A''B'C''B'' = A'B'C''B'' = A'B'C'B''$$

weil $A''A'$ mit der Fläche $B'C''B''$ und $C''C'$ mit der Fläche $A'B'B''$ parallel ist. Nun ist $A'B'C'A''$ der dritte Teil des Prisma, dessen Normalschnitt ABC und dessen Längenkante $A'A''$ ist, u. s. w. Also ist der dreiseitige Prismenhuf $A'B'C'A''B''C''$



$$= \tfrac{1}{3}ABC(A'A'' + B'B'' + C'C'') = ABC.K'K''$$

folglich der ganze Prismenhuf

$$= ABC.K'K'' + ACD.L'L'' + .. = (ABCD..)S'S''$$

Anmerkung. Insbesondere haben zwei Hufe eines Prisma (Cylinders) gleiche Volume, wenn ihre Schwerkanten in Bezug auf die Schnittflächen des Prisma von gleicher Länge sind.

Die Tetraeder $A'B'C'A''$, $A'B'C'B''$, $A'B'C'C''$ und der Prismenhuf werden durch v_1, v_2, v_3, v bezeichnet. Dann ist (§. 8, 9)

*) Meier Hirsch a. a. O. 162. Vergl. Steiner Crelle J. 16 p. 90. Die Zerlegung des dreiseitigen Prismenhufs ist von Legendre (Élém. de géom. VI, 22) gegeben worden.

$v_1 : v_2 = A'A'' : B'B''$, $v_2 : v_3 = B'B'' : C'C'''$, $v = v_1 + v_2 + v_3$
Von der Ebene der Kanten $B'B''$, $C'C'''$ haben die Kante $A'A''$ und die Schwerpunkte der v, v_1, v_2, v_3 die Distanzen h und z, z_1, z_2, z_3. Dann ist (10 u. 2)

$$vz = v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3$$
$$4z_1 = 2h, \quad 4z_2 = h, \quad 4z_3 = h$$
$$4vz = h(2v_1 + v_2 + v_3) = h(v + v_1)$$
$$z = \tfrac{1}{4}h\left(1 + \frac{A'A''}{A'A'' + B'B'' + C'C'''}\right)$$

Brianchon 1839 Liouville J. t. 4 p. 345.

20. Das Volum eines Polyeders kann aus Prismenhufen zusammengesetzt werden (Meier Hirsch a. a. O. 165), wie die Fläche eines planen Polygons aus begrenzten Streifen (Planim. §. 10, 6). Man ziehe durch die Eckpunkte Parallelen von beliebiger Richtung und schneide dieselben normal durch eine Ebene. Dadurch erhält man soviel Prismenhufe als Flächen des Polyeders, und von jeder Fläche ihre Normalprojektion auf die schneidende Ebene. Bezeichnet man die Schwerpunkte der einzelnen Flächen durch A, B, C, .., die Normalprojektionen dieser Punkte auf die schneidende Ebene durch A', B', C', .., und die Normalprojektionen der Flächen durch α, β, γ, .., so haben die Hufe die Werte $\alpha . AA'$, $\beta . BB'$, $\gamma . CC'$, .. (19), und das Volum der Polyeders ist die Summe

$$\alpha . AA' + \beta . BB' + \gamma . CC' + ..$$

Durch die Perimeter der Flächen des Polyeders (§. 8, 16) sind die Perimeter der Normalprojektionen dieser Flächen, mithin die Zeichen von α, β, γ, .. bestimmt.

Die Summe der Normalprojektionen der Flächen eines Polyeders $\alpha + \beta + \gamma + ..$ ist null (vergl. unten Trigon. §. 6, 3), also hat das System $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, .. einen unendlich fernen Schwerpunkt (6). Wenn insbesondere das System $\alpha . A$, $\beta . B$, .. keinen Schwerpunkt hat, so ist das Volum des Polyeders null.

Sechstes Buch.

Trigonometrie.

§. 1. Von dem Sinus.

1. Wenn eine Figur eine andere Figur aus dem Grunde deckt, weil sie mit ihr gewisse Elemente gemein hat, so ist sie durch diese Elemente *eindeutig bestimmt*. Es ist z. B. eine Gerade durch 2 Punkte, ein Kreis durch 3 Punkte, eine Kugel durch 4 Punkte eindeutig (unzweideutig) bestimmt. Wenn es aber m *verschiedene* Figuren giebt, welche gewisse Elemente gemein haben, und wenn eine gegebene Figur eine dieser Figuren aus dem Grunde deckt, weil sie mit ihr die erwähnten Elemente gemein hat, so ist die Figur durch diese Elemente *mdeutig bestimmt*. Es ist z. B. ein Dreieck durch 2 Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel, durch eine Seite und die daran liegenden Winkel, durch die 3 Seiten eindeutig, durch 2 Seiten und den der kleinern gegenüberliegenden Winkel zweideutig bestimmt. Ein Kreis ist durch 3 Tangenten 4deutig, eine Kugel durch 4 Tangentenebenen 8deutig bestimmt. U. s. w.

Zur Bestimmung eines Dreiecks sind $2.3-3$ Elemente erforderlich. Zur Bestimmung eines vierten Punktes auf der Ebene des Dreiecks sind 2 Elemente erforderlich, also braucht man zur Bestimmung eines planen 4ecks, 5ecks, .., $n$ecks

$$2.4-3, \quad 2.5-3, .., \quad 2n-3$$

Elemente, die von einander unabhängig sind. Anstatt derselben können auch ebensoviel von einander unabhängige Funktionen der Elemente gegeben werden.

Zur Bestimmung eines vierten Punktes im Raume braucht man 3 Elemente, also sind zur Bestimmung eines räumlichen Vierecks 6 d. i. $3.4-6$, zur Bestimmung eines räumlichen 5ecks, 6ecks, .., $e$ecks

$$3.5-6, \quad 3.6-6, .., \quad 3e-6$$

Elemente erforderlich.

Anmerkung. Zur Bestimmung eines Polyeders, welches weder prismatisch noch mehr oder weniger regulär ist, sind soviel Elemente erforderlich, als das Polyeder Kanten hat.*) Das Polyeder habe

*) Legendre Géom. Note 8. Möbius Statik 246.

e Ecken, f Flächen und k Kanten. Die gegenseitige Lage der e Eckpunkte würde im allgemeinen durch $3e-6$ Elemente bestimmt sein. Wenn aber die Flächen des Polyeders der Reihe nach n_1, n_2, n_3, .. Seiten haben, so liegen n_1-3 Eckpunkte der ersten Fläche, n_2-3 Eckpunkte der zweiten Fläche, .. jedesmal auf der Ebene der 3 übrigen Eckpunkte; die Bestimmung dieser Punkte erfordert demnach je 1 Element weniger. Also ist das Polyeder durch

$$3e-6-(n_1-3)-(n_2-3)-(n_3-3)-..$$

Elemente bestimmt. Die Anzahl der Subtrahenden ist f, die Summe $n_1+n_2+n_3+..$ ist $2k$, ferner ist $3e+3f-6=3k$ (Stereom. §. 7, 2), folglich

$$3e-6-(n_1-3)-(n_2-3)-..=k$$

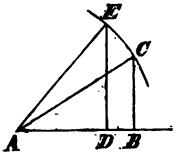
Die Anzahl k erreicht den Wert $3e-6$ in dem Falle, daß alle Flächen des Polyeders Dreiecke sind. In der That ist dann $3f=2k$, u. s. w.

2. An die Erkenntnis, daß eine Figur durch n ihrer Elemente bestimmt ist, schließt sich die Aufgabe, aus den n bestimmenden (gegebenen) Elementen nicht nur die Figur zu *konstruieren*, sondern auch die übrigen bestimmten (unbekannten) Elemente der Figur zu *berechnen*. Die Mittel zur Konstruktion der Figuren sind in der reinen Geometrie selbst enthalten, und werden zum Teil für technische Zwecke besonders ausgebildet in der angewandten Disciplin, welche den Namen *deskriptive Geometrie* führt. Von den Mitteln zur Berechnung der bestimmten aus den bestimmenden Elementen einer Figur handelt die *Trigonometrie*. Nun wird zwar in der Geometrie gelehrt, wie man einen Winkel eines planen Polygons aus den übrigen Winkeln desselben, eine Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks aus den beiden andern Seiten, die Fläche eines Dreiecks aus seiner Basis und der Höhe oder aus den drei Seiten berechnen kann, u. s. w. Es giebt aber noch andere metrische Relationen unter den Elementen einer Figur, die auf dem Gebrauch der sogenannten trigonometrischen Funktionen beruhen, und diese vorzugsweise bilden den Inhalt der eigentlichen Trigonometrie.

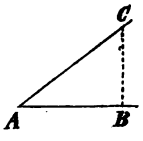
Besondere Abschnitte der Trigonometrie, in denen die metrischen Relationen unter den Elementen eines Vierecks, Polygons, Tetraeders, Polyeders zur Betrachtung kommen, werden durch die Namen *Tetragonometrie*, *Polygonometrie*, *Tetraedrometrie*, *Polyedrometrie* bezeichnet. Je nachdem die Figuren plan oder sphärisch sind, wird auch die von ihnen handelnde Trigonometrie *plan* oder *sphärisch* genannt.

3. Bei einem geradlinigen Dreieck ist die Proportion der Seiten durch die Winkel bestimmt. Denn wenn zwei Dreiecke die Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie ähnlich, u. s. w.

Wenn insbesondere das Dreieck rechtwinkelig ist, so wird durch einen spitzen Winkel desselben das Verhältnis von je zwei seiner Seiten bestimmt, z. B. das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse. Wenn der spitze Winkel wächst, so wächst auch das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse. Ist der Winkel $BAE > BAC$, und die Hypotenuse AE der Hypotenuse AC gleich, so ist die Kathete DE größer als die Kathete BC (Planim. §. 5, 6), folglich $DE : AE > BC : AC$. Daher ist das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks eine bestimmte Funktion des Winkels, welcher der Kathete gegenüber liegt, eine goniometrische oder trigonometrische Funktion, und wird der Sinus des Winkels*) genannt. Vergl. Algebra §. 2.



4. Unter dem Sinus eines spitzen Winkels wird demnach das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse eines beliebig von dem Winkel abgeschnittenen rechtwinkeligen Dreiecks verstanden. Der Sinus des Winkels A wird durch $\sin A$ bezeichnet; und wenn BC zu dem Schenkel AB des Winkels A normal steht, so hat man



$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

Der Sinus eines spitzen Winkels ist eine unbenannte Zahl (Verhältnis) zwischen 0 und 1, weil eine Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks kleiner ist als die Hypotenuse.

Wenn der Winkel von 0 bis 90^0 wächst, so wächst sein Sinus von 0 bis 1. Unter der Voraussetzung nämlich, daß die Hypotenuse AC unverändert ihre Länge behält, erreicht die Kathete BC, wenn der Winkel verschwindet, den Wert 0, und wenn der Winkel recht wird,

*) Das Wort Sinus ist die lateinische Übersetzung eines bei den arabischen Astronomen, namentlich seit Albatenius (Al Batani um 900) gebräuchlichen Kunstworts. Die im 12ten Jahrhundert von Plato Tiburtinus verfertigte und 1537 zu Nürnberg gedruckte lateinische Übersetzung eines astronomischen Werks von Albatani ist die erste bekannte Schrift, welche das Wort Sinus und den Anfang einer Umgestaltung der griechischen Trigonometrie enthält (de motu stellarum cap. 3 p. 6). S. Pfleiderer Trigonometrie 1802 p. 14. Delambre hist. de l'astron. du moyen âge 1819.

die Größe AC. Man hat also die Grenzwerte

$$\sin 0 = 0, \quad \sin 90^0 = 1$$

5. Von den elementar konstruierbaren Winkeln können die Sinus nach bekannten planimetrischen Sätzen berechnet werden.

Ist $A = 45^0$, so ist $BC = AB$, $2BC^2 = AC^2$ nach dem Pythagoreischen Satz, also

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BC}{AC} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 45^0 = 0{,}7071\ldots$$

Ist $A = 60^0$, so ist $AB = \frac{1}{2}AC$, $\frac{1}{4}AC^2 + BC^2 = AC^2$, folglich

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 60^0 = 0{,}8660\ldots$$

Ist $A = 30^0$, so ist $BC = \frac{1}{2}AC$, also $\sin 30^0 = 0{,}5$.

Ist $A = 18^0$, so ist BC dem halben goldnen Abschnitt von AC gleich (Planim. §. 11, 6), also

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin 18^0 = 0{,}3090\ldots$$

Von andern Winkeln, welche Summen oder Differenzen, Zweifache oder Hälften, u. s. w. von solchen Winkeln sind, deren Sinus man bereits gefunden hat, können die Sinus berechnet werden auf Grund des Ptolemäischen Satzes (Planim. §. 14, 15) oder des entsprechenden goniometrischen Satzes. Vergl. unten §. 4, 6 und 7. Auch bietet die mathematische Analysis die umfassendsten Mittel zur direkten Berechnung der Sinus aller Winkel (Allg. Arithm. §. 31, 7).

Man ist daher im stande gewesen, Tabellen zusammenzustellen, welche zu jedem Winkel von 0 bis 90^0 nicht nur den Sinus, sondern auch den gemeinen Logarithmus desselben mit hinreichender Genauigkeit enthalten.*) Die Logarithmen der Sinus sind negativ, und erhalten

*) Die Griechen haben zu allen von 0 bis 180^0 um halbe Grade verschiedenen Centriwinkeln die Verhältnisse ihrer Sehnen zum Radius berechnet, und dabei den Radius in 60 Teile (μοῖραι), jeden Teil in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden geteilt. Die ältesten Schriften, welche von den erforderlichen metrischen Relationen der Kreissehnen handelten, waren nach Theons Zeugnis (im Kommentar zum Almagest) von Hipparchus und Menelaus verfaßt. Die Tabelle der Sehnenverhältnisse und eine einfache Methode, nach welcher die Tabelle konstruiert werden kann, ist von Ptolemäus (Almagest I, 9) mitgeteilt. Vergl. Kästner geom. Abhandl. I p. 525, II p. 354. Weil der Sinus eines Peripheriewinkels das Verhältnis der gegenüberliegenden Sehne zum Diameter ist, so konnten die Araber aus der Ptolemäischen Tabelle sofort die Tabelle der in Sexagesimalbrüchen ausgedrückten Sinus ableiten, indem sie die Centriwinkel und die nebenstehenden Verhältnisse ihrer Sehnen zum Radius halbierten. Statt der Sexagesimalbrüche wurden die Decimalbrüche in die Sinustabellen eingeführt durch die deutschen Astronomen Peurbach und Regiomontan 1450. Die (natürlichen) Logarithmen der Sinus sind

gewöhnlich die negative Kennziffer -10, die deshalb in den Tabellen und in den Rechnungen weggelassen wird.

In der Tabelle der Sinus (der Logarithmen der Sinus) wird nicht nur zu jedem gegebenen Winkel sein Sinus (dessen Logarithmus), sondern auch zu jedem gegebenen Sinus (dessen Logarithmus) der entsprechende Winkel gefunden mit einer Genauigkeit, die durch die Genauigkeit der in der Tabelle verzeichneten Zahlen bestimmt ist. Die erforderlichen Interpolationen werden nach denselben Regeln wie bei andern mathematischen Tabellen (Algebra §. 2, 4. Allg. Arithm. §. 20, 4) verrichtet.

I. In den Tabellen*) liegt der Winkel $23^0\,17'$ zwischen $23^0\,10'$ und $23^0\,20'$, deren Differenz $10'$ beträgt, und $\sin 23^0\,17'$ zwischen 0,3934 und 0,3961, deren Differenz 0,0027 ist. Wenn der Winkel $23^0\,10'$ um 10, 1, 7 Minuten steigt, so steigt sein Sinus um 27, $\frac{27}{10}$, $\frac{27\,.\,7}{10}$ Zehntausendtel. Also ist $\sin 23^0\,17' = 0{,}3934 + 0{,}0019 = 0{,}3953$.

Ebenso findet man $\log \sin 23^0\,17' = 9{,}5948 + 0{,}0021 = 9{,}5969$ aus den Werten von $\log \sin 23^0\,10'$ und $\log \sin 23^0\,20'$, deren Differenz 0,0030 mit 0,7 multipliciert wegen der $7'$ zu $\log \sin 23^0\,10'$ addiert wird. Die Kennziffer -10 ist hinzuzudenken.

II. In der Kolonne der Sinus liegt $\sin x = \frac{3}{4} = 0{,}7500$ zwischen 0,7490 und 0,7509, deren Differenz 0,0019 ist, also der Winkel x zwischen $48^0\,30'$ und $48^0\,40'$, deren Differenz $10'$ beträgt. Wenn der Sinus 0,7490 um 19, 1, 10 Zehntausendtel steigt, so steigt sein Winkel um 10, $\frac{10}{19}$, $\frac{10\,.\,10}{19}$ Minuten. Also ist $x = 48^0 + 30'\,5'{,}3 = 48^0\,35'{,}3$.

Wenn $\log \sin x = 9{,}8751$ (-10 wird hinzugedacht), so findet man $x = 48^0\,35'{,}4$ aus den zu 9,8745 und 9,8756 gehörigen Winkeln, deren Differenz $10'$ mit $\frac{6}{11}$ multipliciert wegen der übrigen 0,0006 zu $48^0\,30'$ addiert wird.

6. Die Gleichung (4)

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

welche für das rechtwinkelige Dreieck gilt, dessen Hypotenuse AC ist, und welche den Sinus des Winkels A definiert, ist die Relation

---

von Neper 1614 erfunden worden (Allg. Arithm. §. 19). Tabellen von der jetzt gebräuchlichen Art wurden bald darauf von Briggs und Vlacq 1628 vollendet.

*) J. H. T. Müllers vierstellige Logarithmen. 2te Aufl. 1860.

zwischen der Hypotenuse, einer Kathete und dem gegenüberliegenden Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks. Man hat demnach

$$BC = AC.\sin A, \quad AC = \frac{BC}{\sin A}$$

Eine Kathete ist das Produkt der Hypotenuse mit dem Sinus des der Kathete gegenüberliegenden Winkels.

Die Hypotenuse ist der Quotient einer Kathete durch den Sinus des der Kathete gegenüberliegenden Winkels.

Insbesondere ist eine Kreissehne das Produkt des Diameters mit dem Sinus des auf der Sehne stehenden Peripheriewinkels, eil der auf dem Diameter stehende Peripheriewinkel recht ist.

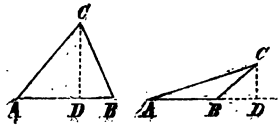
Diese Gleichungen enthalten die Lösung der trigonometrischen Aufgaben: 1) aus der Hypotenuse und einer Kathete den der Kathete gegenüberliegenden Winkel zu berechnen, 2) aus der Hypotenuse und einem spitzen Winkel die dem Winkel gegenüberliegende Kathete zu berechnen, 3) aus einer Kathete und dem gegenüberliegenden Winkel die Hypotenuse zu berechnen.

Beispiele.

BC	718	$\log BC$	2,8561
AC	922,4	$\log AC$	2,9649
A	$51^0 7'$	$\log\sin A$	9,8912
AC	5,27	$\log AC$	0,7218
A	$41^0 26'$	$\log\sin A$	9,8207
BC	3,4875	$\log BC$	0,5425
BC	25,7	$\log BC$	1,4099
A	$81^0 47'$	$\log\sin A$	9,9955
AC	25,965	$\log AC$	1,4144

7. Die Fläche eines Dreiecks ist das halbe Produkt von zwei Seiten mit dem Sinus des von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkels. Dabei hat man unter dem Sinus eines stumpfen Winkels den Sinus seines spitzen Supplements zu verstehn. Bezeichnet man die Fläche des Dreiecks ABC durch Δ, so hat man

$$\Delta = \tfrac{1}{2} AB.BC.\sin CBA$$

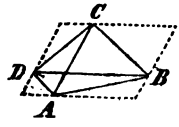


Beweis. Die Höhe DC des Dreiecks ABC ist eine Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks BCD, dessen Hypotenuse BC ist. Daher hat man in Rücksicht auf Planim. §. 10, 4

$$DC = BC.\sin CBD \quad (6)$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2}AB.DC = \tfrac{1}{2}AB.BC.\sin CBA$$

wenn CBA spitz ist, und wenn man den stumpfen Winkel CBA durch sein spitzes Supplement DBC ersetzt.

Anwendung. Die Fläche eines Parallelogramms ist das Produkt von zwei folgenden Seiten mit dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.



Die Fläche eines Vierecks ist das halbe Produkt seiner Diagonalen mit dem Sinus ihres Winkels.

8. Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.*) Die Seiten durch die Sinus der gegenüberliegenden Winkel dividiert geben gleiche Quotienten, deren Werte sowohl den Quotienten des Produkts der Seiten durch die doppelte Fläche, als auch den Diameter des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises ausdrücken (Sinus-Satz).

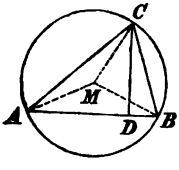
Beweis. Nach (7) hat man

$$\frac{DC}{BC} = \sin CBA, \qquad \frac{DC}{CA} = \sin BAC$$

folglich

$$CA : BC = \sin CBA : \sin BAC, \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man die Seiten BC, CA, AB der Reihe nach durch a, b, c und die gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ**), die Fläche ABC durch Δ und den Radius des umgeschriebenen Kreises durch r, so ist (7)



$$2\Delta = bc\sin\alpha = ca\sin\beta = ab\sin\gamma$$

folglich durch Division

$$\frac{abc}{2\Delta} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

weil den Sehnen a, b, c die Peripheriewinkel α, β, γ gegenüberliegen (6).

---

*) In der alten Trigonometrie war dieser Satz tautologisch, weil AB die Sehne des Centriwinkels $AMB = 2ACB$ ist, u. s. w. Über die andern Beziehungen vergl. Planim. §. 14, 25.

**) Diese übersichtliche Bezeichnung ist von Euler eingeführt worden. Durch Euler ist es auch üblich geworden, Ausdrücke wie $\sin\alpha$ in die Formeln aufzunehmen, während man sonst deren Werte durch besondere Buchstaben bezeichnete. Vergl. Nov. Comm. Petrop. 5 p. 164.

Anmerkung. Weil $b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 2r\sin\beta$, $a = 2r\sin\alpha$, so ist

$$2\Delta = a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad \Delta = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Hiernach kann man die Fläche des Dreiecks aus den Winkeln und einer Seite oder dem Radius des umgeschriebenen Kreises berechnen.

9. Der Sinussatz enthält die Relation zwischen zwei Seiten eines Dreiecks und den gegenüberliegenden Winkeln, und dient deshalb zur Lösung der trigonometrischen Aufgaben: 1) aus zwei Winkeln eines Dreiecks und der dem einen gegenüberliegenden Seite die dem andern gegenüberliegende Seite zu berechnen, 2) aus zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel den der andern gegenüberliegenden Winkel zu berechnen. Man hat nämlich, wenn a, α und β gegeben sind,

$$b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$$

und wenn α, a und b gegeben sind,

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a}b$$

Die zweite Aufgabe hat im allgemeinen zwei Auflösungen, denn es giebt zwei Winkel β, einen spitzen und den supplementären stumpfen, deren Sinus denselben Wert haben (7).

Wenn insbesondere die Seite a, welcher der gegebene Winkel α gegenüberliegt, kleiner ist als $b\sin\alpha$, so ist $\sin\beta > 1$ und der gesuchte Winkel β nicht real, also giebt es kein Dreieck, das die gegebenen Elemente enthält.

Wenn $a = b\sin\alpha$, so ist $\sin\beta = 1$, $\beta = 90^0$.

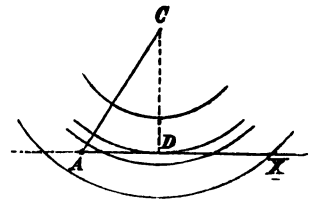
Wenn a zwischen den Grenzen $b\sin\alpha$ und b liegt, so ist $\sin\beta > \sin\alpha$, der gesuchte Winkel β hat einen spitzen Wert, der größer als α ist, und den supplementären stumpfen Wert.

Wenn $a = b$ ist, so ist $\sin\beta = \sin\alpha$, und β kann nur den Wert α, nicht $180^0 - \alpha$ haben.

Wenn $a > b$, so ist $\sin\beta < \sin\alpha$, und β kann nur spitz und kleiner als α sein, weil einem stumpfen Winkel des Dreiecks die größte Seite gegenüberliegen würde, wider die Voraussetzung.

Mit dieser Determination befindet sich die Konstruktion des Dreiecks ABC aus den gegebenen Elementen in vollkommener Übereinstimmung. In der That hat der um das Centrum C mit dem Radius a beschriebene

Kreis mit dem Schenkel AX des Winkels α zwei Punkte gemein, die imaginär oder real vereint oder getrennt sind, je nachdem a kleiner oder ebenso groß oder größer ist als die Höhe $CD = b \sin\alpha$. Wenn $a = b$, so fällt der zweite Durchschnittspunkt mit A zusammen. Wenn $a > b$, so fällt der zweite Durchschnittspunkt in den zu α gehörigen Nebenwinkel.



Beispiel 1.

a	325	$\log a$	2,5119
β	$46^0 15'$	$\log \sin\alpha$	9,98735
γ	$57^0 30'$	$\log \frac{a}{\sin\alpha}$	2,52455
$\beta+\gamma$	$103^0 45'$	$\log \sin\beta$	9,8588
α	$76^0 15'$	$\log \sin\gamma$	9,9260
b	241,7	$\log\left(\frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta\right)$	2,38335
c	282,2	$\log\left(\frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma\right)$	2,45055
Δ	33130	$\log\frac{1}{2}$	9,6990
		$\log(\frac{1}{2}bc\sin\alpha)$	4,5202

Beispiel 2.

α	$23^0 4'$	$\log \sin\alpha$	9,5931
a	8377	$\log a$	3,9231
b	12249	$\log \frac{\sin\alpha}{a}$	5,6700
β'	$34^0 57',2$	$\log b$	4,0881
$\alpha+\beta'$	$58^0 1',2$	$\log \sin\beta$	9,7581
γ'	$121^0 58',8$	$\log \sin\gamma'$	9,9285
c'	18134	$\log\left(\sin\gamma' : \frac{\sin\alpha}{a}\right)$	4,2585
β''	$145^0 2',8$	$\log \sin\gamma''$	9,3138
$\gamma'' = \beta' - \alpha$	$11^0 53',2$	$\log\left(\sin\gamma'' : \frac{\sin\alpha}{a}\right)$	3,6438
c''	4403		

§. 2. Von dem Cosinus.

1. Der Sinus des Komplements eines Winkels heißt der Cosinus des Winkels.*) Der Cosinus des Winkels α wird durch $\cos\alpha$ bezeichnet. Man hat also

*) Die Abkürzung Cosinus für complementi sinus rührt von Gunter her,

$$\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha), \quad \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos 32^0 = \sin 58^0, \quad \cos 45^0 = \sin 45^0$$
$$\cos 0 = \sin 90^0 = 1$$
$$\cos 90^0 = \sin 0 = 0$$

Wenn der spitze Winkel α steigt, so fällt sein Komplement und zugleich der Sinus des Komplements (§. 1, 3), d. h. wenn der Winkel steigt, so fällt sein Cosinus.

Aus der Tabelle des Sinus oder ihrer Logarithmen entsteht die Tabelle der Cosinus oder ihrer Logarithmen, wenn alle Winkel durch ihre Komplemente ersetzt werden. Bei der Interpolation der Tabelle der Cosinus oder ihrer Logarithmen ist nur zu beachten, daß der Cosinus oder sein Logarithmus fällt, wenn sein Winkel steigt, und umgekehrt.

Z. B. $\cos 23^0 17'$ liegt zwischen 0,9194 und 0,9182. Wenn der Winkel $23^0 10'$ um 10, 1, 7 Minuten steigt, so fällt sein Cosinus um 12, $\frac{12}{10}$, $\frac{12.7}{10}$ Zehntausendtel. Also ist

$$\cos 23^0 17' = 0{,}9194 - 0{,}0008 = 0{,}9186$$

Ebenso findet man $\log\cos 23^0 17' = 9{,}9635 - 0{,}0006 \cdot \frac{7}{10} = 9{,}9631$.

Ist $\cos x = 0{,}8347$, so liegt x zwischen $33^0 20'$ und $33^0 30'$. Wenn der Wert 0,8355 des Cosinus um 16, 1, 8 Zehntausendtel fällt, so steigt sein Winkel um 10, $\frac{10}{16}$, $\frac{10.8}{16}$ Minuten. Also ist $x = 33^0 25'$.

Ist $\log\cos x = 9{,}7336$ gegeben, so findet man

$$x = 57^0 10' + 10' \cdot \tfrac{6}{10} = 57^0 13'$$

Anmerkung. Wenn α stumpf ist, so ist (§. 1, 7)

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \cos[90^0 - (180^0 - \alpha)] = \cos(\alpha - 90^0)$$

Z. B. $\sin 138^0 23' = \cos 48^0 23'$. In der That ist es einfacher, den stumpfen Winkel um 90^0 zu vermindern, als ihn von 180^0 zu subtrahieren. Deshalb werden die Sinus stumpfer Winkel in der Cosinus-Tabelle aufgesucht.

2. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist der Cosinus eines spitzen Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse. Eine Kathete ist das Produkt der Hypotenuse mit dem Cosinus des an der Kathete liegenden spitzen Winkels. Die Hypotenuse ist der Quotient

---

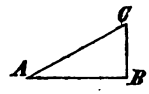
einem Zeitgenossen von Briggs, wie Keppler mitgeteilt hat. Vergl. Pfleiderers Trigon. p. 101.

einer Kathete durch den Cosinus des an der Kathete liegenden spitzen Winkels.

Beweis. In dem rechtwinkeligen Dreieck ABC, dessen Hypotenuse AC ist, hat man (§. 1, 6)

$$\cos A = \sin C = \frac{AB}{AC}$$

$$AB = AC.\cos A, \quad AC = \frac{AB}{\cos A}$$



Anmerkung. Nach dem Pythagoreischen Satze ist

$$\cos^2 A + \sin^2 A = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = 1^*)$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{(1+\sin A)(1-\sin A)}$$

Z. B. $\sin(45^0+\alpha) = \cos(45^0-\alpha) = \sqrt{1-\sin^2(45^0-\alpha)}$. Die Sinus von Winkeln über 45^0 konnten aus den Sinus der Winkel unter 45^0 berechnet werden.

Aus dem gegebenen Wert von $\sin x$ oder $\log \sin x$ wird $\cos x$ oder $\log \cos x$ durch Interpolation der Tabellen gefunden, ohne daß man den Winkel x bestimmt. Z. B. $\sin x = 0{,}3016$ liegt zwischen den Sinus 0,3007 und 0,3035, also $\cos x$ zwischen den Cosinus 0,9537 und 0,9528. Wenn nun der Sinus 0,3007 um 28, 1, 9 Zehntausendtel steigt, so fällt der Cosinus 0,9537 um 9, $\frac{9}{28}$, $\frac{9.9}{28}$ Zehntausendtel. Also ist $\cos x = 0{,}9534$.

Um aus der Hypotenuse AC und einer Kathete AB die andere Kathete BC zu berechnen, sucht man in der Tabelle $\cos A = AB : AC$, daneben $\sin A$, und findet $BC = AC \sin A$ einfacher als $\sqrt{AC^2 - AB^2}$.

3. Das Quadrat einer Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels (Cosinus-Satz). Dabei hat man unter dem Cosinus eines stumpfen Winkels den negativen Cosinus seines spitzen Supplements zu verstehen.**) Nach den angenommenen Bezeichnungen (§. 1, 8) ist

---

*) Man schreibt $\cos^2 A$ oder $\cos A^2$, $\cos ma$ für $(\cos A)^2$, $\cos(ma)$.

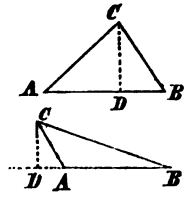
**) Dieser Satz, welcher den Pythagoreischen Satz als einen besondern Fall in

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Wenn α recht ist, so ist $\cos\alpha = 0$ (1), $a^2 = b^2 + c^2$; wenn α stumpf ist, so ist $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180^0 - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\sin(\alpha - 90^0)$.

Beweis. Wenn man in dem Dreieck ABC die Höhe CD zieht, so hat man nach dem Pythagoreischen Satz

$$BC^2 = DB^2 + CD^2$$



Liegt der Seite BC der spitze Winkel A gegenüber, so ist $DB = AB - AD$, mithin

$$BC^2 = AB^2 - 2AB.AD + AD^2 + CD^2$$

Nun ist $AD^2 + CD^2 = AC^2$, folglich

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AD$$

Liegt aber der Seite BC der stumpfe Winkel A gegenüber, so ist $DB = DA + AB$, mithin

$$BC^2 = AB^2 + 2AB.DA + DA^2 + DC^2$$
$$= AB^2 + AC^2 + 2AB.DA$$

In dem rechtwinkeligen Dreieck ADC hat AD in dem ersten Falle den Wert $AC\cos A$ (2), in dem andern Falle den Wert $AC\cos(180^0 - A)$, folglich u. s. w. Durch die Erklärung des Cosinus eines stumpfen Winkels wird der zweite Fall in den ersten eingeschlossen.

Anmerkung. Nach (1) hat man, wenn α stumpf ist,

$$\cos(180^0 - \alpha) = \sin[90^0 - (180^0 - \alpha)] = \sin(\alpha - 90^0)$$
$$\cos\alpha = -\sin(\alpha - 90^0)$$

Z. B. Für $\cos 127^0 46'$ wird $-\sin 37^0 46'$ gesetzt, weil es einfacher ist, 90^0 von dem Winkel, als den Winkel von 180^0 zu subtrahieren.

4. Der Cosinussatz enthält die Relation zwischen den drei Seiten eines Dreiecks und dem Winkel, welcher einer Seite gegenüber liegt, und kann deshalb zur Lösung der trigonometrischen Aufgaben dienen: 1) aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die diesem Winkel gegenüberliegende Seite zu berechnen, 2) aus den drei Seiten die denselben gegenüberliegenden Winkel zu berechnen, 3) aus zwei Seiten und dem Winkel, welcher der einen gegenüber liegt, die dritte Seite zu berechnen.

---

sich schließt, findet sich Eucl. II, 12 und 13 ohne den trigonometrischen Ausdruck des letzten Gliedes. Vergl. Planim. §. 14, 16.

Aus $b = 3921$, $c = 4652$, $\alpha = 27^0 38'$ findet man

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = 2168$$

Aus $a = 246{,}9$, $b = 163{,}9$, $\gamma = 113^0 16',4$ findet man

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin 23^0 16',4} = 346{,}1$$

Man kann die Berechnung durch Benutzung der Gaußschen Tabelle (Allg. Arith. §. 21, 2) erleichtern. Am einfachsten aber wird die erste Aufgabe durch den Gaußschen Doppelsatz gelöst. S. unten §. 3, 8.

5. Zur Berechnung des Winkels α aus den Seiten a, b, c hat man die Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, folglich

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Wenn $a^2 = b^2 + c^2$, so ist $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90^0$. Wenn $a^2 > b^2 + c^2$, so ist $\cos\alpha$ negativ, α stumpf, und man findet in den Tabellen $\alpha - 90^0$, nachdem man $-\cos\alpha = \sin(\alpha - 90^0)$ gesetzt hat.

Wenn $b^2 + c^2 - a^2 \gtrless \pm 2bc$ d. h. $(b \mp c)^2 - a^2 \gtrless 0$

wenn also die Differenz von 2 Seiten größer oder die Summe von 2 Seiten kleiner ist als die dritte Seite, so fällt $\cos\alpha$ außerhalb der Grenzen 1 und -1, der gesuchte Winkel ist nicht real und das Dreieck nicht konstruierbar.

Anmerkung. Aus den Gleichungen (§. 1, 7)

$$4\Delta = 2bc\sin\alpha$$
$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$$

findet man, weil $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

$$16\Delta^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4b^2c^2$$
$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

wenn s die halbe Summe der Seiten bedeutet. S. Planim. §. 14, 23. Nachdem man die Fläche Δ aus den Seiten berechnet hat, kann man die Winkel auch aus den Gleichungen

$$\sin\alpha = \frac{2\Delta}{abc}a, \quad \sin\beta = \frac{2\Delta}{abc}b, \quad \sin\gamma = \frac{2\Delta}{abc}c$$

finden. Vergl. §. 1, 8. Man berechnet zuerst die den kleinern Seiten gegenüberliegenden Winkel, welche spitz sind; der der größten Seite gegenüberliegende Winkel ist spitz oder stumpf, so daß er mit den beiden andern Winkeln die Summe 180^0 bildet.

Die einfachste numerische Lösung der zweiten Aufgabe gründet sich auf Formeln, welche in §. 3, 5 folgen.

6. Zur Berechnung der Seite c aus den Seiten b und a, und dem Winkel α, welcher der Seite a gegenüber liegt, hat man die Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, folglich

$$c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 - b^2$$
$$(c - b\cos\alpha)^2 = b^2\cos^2\alpha + a^2 - b^2 = a^2 - b^2\sin^2\alpha \quad (2)$$
$$c = b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$$

Es giebt also im allgemeinen 2 Werte von c. Diese Werte sind nicht real, wenn $a < b\sin\alpha$ ist; sie sind real und einander gleich, wenn $a = b\sin\alpha$; sie sind real verschieden, wenn $a > b\sin\alpha$. Wenn im letzten Falle $a = b$ oder $a > b$ ist, so beträgt die Quadratwurzel soviel oder mehr als $b\cos\alpha$, und der zweite Wert von c verschwindet oder wird negativ, d. h. die den Werten von c entsprechenden Strecken AB' und AB'' haben entgegengesetzte Richtungen (Planim. §. 14, 1).

Diese Determination stimmt mit der §. 1, 9 gegebenen überein und findet bei der Konstruktion des Dreiecks ABC aus den gegebenen Elementen ihre Bestätigung. Die direkte Ausrechnung der Seite c steht aber der indirekten Ausrechnung derselben mit Hilfe des Winkels γ an Einfachheit nach.

§. 3. Von der Tangente und Cotangente.

1. Der Quotient des Sinus eines Winkels durch den Cosinus desselben heißt die Tangente des Winkels.*) Die Tangente des Komplements eines Winkels wird die Cotangente des Winkels genannt. Man bezeichnet die Tangente und die Cotangente des Winkels α durch $\mathrm{tang}\,\alpha$ und $\cot\alpha$, und hat demnach

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \mathrm{tang}(90^0 - \alpha$$

Nun ist

$$\mathrm{tang}(90^0 - \alpha) = \frac{\sin(90^0 - \alpha)}{\cos(90^0 - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (\text{§. 2, 1})$$

folgli

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \mathrm{tang}\,\alpha.\cot\alpha = 1$$

---

*) Die Tabelle der Tangenten ist von den Arabern (Al Batani 900) konstruiert worden, wie Burckhardt bemerkt hat. Im Occident wurde sie von Regiomontanus 1463 unter dem Namen tabula foecunda eingeführt. Der Name Tangente rührt von Fink (geom. rotundi 1583) her. Vergl. Pfleiderer Trigon. p. 129. 141. 161.

d. h. die Tangente und die Cotangente eines Winkels sind reciprok, ihre Logarithmen sind entgegengesetzt gleich.

2. Die Gleichung $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (§. 2, 2) giebt durch Division

$$1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

d. i. zufolge der aufgestellten Definitionen

$$1 + \operatorname{tang}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Man kann also aus dem Cosinus eines Winkels seine Tangente, aus dem Sinus eines Winkels seine Cotangente unmittelbar berechnen, und umgekehrt.

3. Wenn der Winkel von 0 bis 45^0 und weiter bis 90^0 steigt, so steigt seine Tangente von 0 bis 1 und bis ∞, und seine Cotangente fällt von ∞ bis 1 und bis 0. Denn es ist

$$\operatorname{tang} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{tang} 45^0 = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = 1$$

$$\operatorname{tang} 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ist $\beta > \alpha$, so ist $\sin\beta > \sin\alpha$, $\cos\beta < \cos\alpha$ (§. 1, 4 und §. 2, 1),

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} > \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} > \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

folglich $\operatorname{tang}\beta > \operatorname{tang}\alpha$. Dagegen ist

$$\cot 0 = \infty, \quad \cot 45^0 = 1, \quad \cot 90^0 = 0$$

$$\cot\beta < \cot\alpha$$

Die Tabellen der Tangenten und Cotangenten werden wie andere Tabellen interpoliert. Wenn der Winkel steigt, so steigt seine Tangente oder deren Logarithmus, und fällt seine Cotangente oder deren Logarithmus, und umgekehrt.

Anmerkung. Wenn der Winkel α stumpf ist, so hat man (§. 2, 3)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{-\cos(180^0 - \alpha)} = -\operatorname{tang}(180^0 - \alpha)$$

$$= \frac{\cos(\alpha - 90^0)}{-\sin(\alpha - 90^0)} = -\cot(\alpha - 90^0)$$

Supplementäre Winkel haben also entgegengesetzt gleiche Tangenten oder Cotangenten.

4. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Tangente eines spitzen Winkels das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zu der andern Kathete. Die Cotangente eines spitzen Winkels ist das Verhältnis der dem Winkel anliegenden Kathete zu der andern Kathete. Eine Kathete ist das Produkt der andern Kathete mit der Tangente des der ersten Kathete gegenüberliegenden Winkels oder mit der Cotangente des der ersten Kathete anliegenden Winkels.

Beweis. In dem rechtwinkeligen Dreieck ABC, dessen Hypotenuse AC ist, hat man

$$\sin A = \frac{BC}{AC}, \quad \cos A = \frac{AB}{AC}$$

folglich durch Division

$$\operatorname{tang} A = \frac{BC}{AB}, \quad \cot A = \frac{AB}{BC}$$

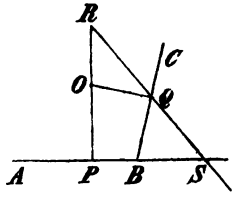
also

$$BC = AB.\operatorname{tang} A = AB.\cot C$$

Anwendungen. Mit Hilfe dieses Satzes findet man aus den beiden Katheten die Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks, aus einer Kathete und einem spitzen Winkel die andere Kathete.

Um aus den Katheten AB und BC die Hypotenuse zu berechnen, sucht man in der Tabelle $\operatorname{tang} A = BC:AB$, daneben $\sin A$ oder $\cos A$ (der größere von beiden erfordert die geringere Interpolation), und findet $AC = BC:\sin A$ oder $AB:\cos A$ einfacher als $\sqrt{AB^2+BC^2}$. Vergl. §. 2, 2.

Ein beliebiger Punkt O des Winkels CBA hat von den Schenkeln die Abstände PO, QO, deren Summe PR zu der Summe der Abschnitte PB, BQ das unveränderliche Verhältnis $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CBA$ hat*). Denn die Gerade QR schneidet von dem Nebenwinkel das Dreieck SQB ab, dessen Winkel Q, S gleiche Komplemente haben und $\frac{1}{2}CBA$ betragen, so daß $PS = PB + BQ$, $PR:PS = \operatorname{tang}\frac{1}{2}CBA$. Die Strecken PB, BQ sind negativ, wenn ihre Richtungen den Richtungen AB, BC entgegengesetzt sind.



Wenn durch aa', bb', cc' die Winkel bezeichnet werden, welche mit den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks die Mittellinien desselben A_1A, B_1B, C_1C bilden, so ist

*) Aus diesem Lemma fließen Sätze über Perimeter von Polygonen und über Oberflächen von Polyedern, welche auf anderem Wege Lindelöf Bulletin de Petersburg 1870 t. 14 p. 256 abgeleitet hat.

$$AC^2 - BC^2 = 2AB.C_1C\cos cc' \quad \text{(Planim. §. 14, 2)}$$
$$4\Delta = 2AB.C_1C\sin cc' \quad \text{(§. 1, 7)}$$
$$\cot cc' = \frac{b^2-a^2}{4\Delta}, \quad \cot aa' = \frac{c^2-b^2}{4\Delta}, \quad \cot bb' = \frac{a^2-c^2}{4\Delta}$$
$$\cot aa' + \cot bb' + \cot cc' = 0^*)$$

5. Um aus den Seiten a, b, c eines Dreiecks die Winkel α, β, γ zu finden (§. 2, 5), berechnet man am einfachsten nach Planim. §. 14, 23 den Radius des eingeschriebenen Kreises

$$d = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

wo s den halben Perimeter des Dreiecks bedeutet, und erhält in der a. a. O. gegebenen Figur $\cot D'AD = AD' : D'D$ (4), u. s. w., folglich**)

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s-a}{d} \qquad \cot\tfrac{1}{2}\beta = \frac{s-b}{d} \qquad \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s-c}{d}$$

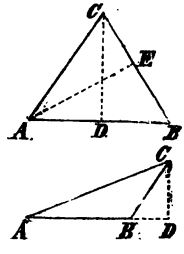
$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s}{d} = \frac{s^2}{\Delta} = \cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta\cot\tfrac{1}{2}\gamma$$

Beispiel.

a	3921	$\log(s-a)$	3,1611
b	4652	$\log(s-b)$	2,8561
c	2167	$\log(s-c)$	3,5055
$2s$	10740	. . . .	9,5227
s	5370	$\log s$	3,7300
$s-a$	1449	$\log d^2$	5,7927
$s-b$	718	$\log d$	2,89635
$s-c$	3203	$\log\cot\frac{1}{2}\alpha$	10,26475
$\frac{1}{2}\alpha$	$28^0 31',5$	$\log\cot\frac{1}{2}\beta$	9,95975
$\frac{1}{2}\beta$	$47^0 39'$	$\log\cot\frac{1}{2}\gamma$	10,60915
$\frac{1}{2}\gamma$	$13^0 49'$		

$\alpha = 57^0 3', \quad \beta = 95^0 18', \quad \gamma = 27^0 38'$

6. Um aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, b, α, c oder b, γ, a, den Winkel β zu berechnen, welcher einer von den beiden Seiten b gegenüber liegt, kann man von dem Winkel β entweder durch die Höhe CD das rechtwinkelige Dreieck BCD abschneiden, dessen



*) Faßbender Grunert Archiv 49 p. 115. Vergl. unten §. 6, 7.
**) Joachim Rhäticus. Vergl. Pfleiderer Trigonom. p. 394.

Katheten $DB = AB - AD = c - b\cos\alpha$ und $DC = b\sin\alpha$ sind, oder durch die Höhe AE das rechtwinkelige Dreieck BAE, dessen Katheten $BE = BC - EC = a - b\cos\gamma$ und $EA = b\sin\gamma$ sind. Nach (4) hat man

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha} = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$$

Wenn der Nenner verschwindet, d. h. $AB = AD$, so ist $\operatorname{tang}\beta$ unendlich, und β recht. Wenn der Nenner negativ ist, d. h. $AB < AD$, so ist β stumpf und (3)

$$\cot(\beta - 90^0) = \frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha - c}$$

in Übereinstimmung mit der Figur.

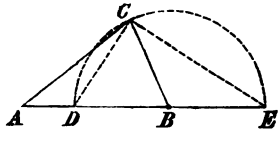
Die einfachste numerische Lösung dieser Aufgabe gründet sich auf den folgenden Satz.

7. Das Produkt einer Seite eines Dreiecks mit dem Sinus (Cosinus) der halben Differenz der anliegenden Winkel ist dem Produkt der Differenz (Summe) der den beiden Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit dem Sinus (Cosinus) der halben Summe derselben Winkel gleich.

Die Tangente der halben Differenz von zwei Winkeln eines Dreiecks hat zur Tangente der halben Summe derselben Winkel dasselbe Verhältnis, als die Differenz der gegenüberliegenden Seiten zur Summe derselben.*) Z. B.

$$b\sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) = (c - a)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$b\cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) = (c + a)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha) = c - a : c + a$$

Beweis. Macht man $AD = AB - BC$, $AE = AB + BC$, so ist der Winkel



$$DCB = BDC = \tfrac{1}{2}EBC = \tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$ACD = ACB - DCB = \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha)$$

und $DCE = 90^0$. In den Dreiecken ADC und AEC ist nach §. 1, 8

$$\frac{CA}{\sin CDA} = \frac{AD}{\sin ACD}, \qquad \frac{CA}{\sin CEA} = \frac{AE}{\sin ACE}$$

*) Der Zusatz, welchen Fink (geom. rotundi 1583 p. 281) aus einer von Ptolemäus und Regiomontanus angestellten Betrachtung (9) abgeleitet hat (Pfleiderer Trigon. p. 356), ist wie der entsprechende Satz für das sphärische Dreieck unter dem Namen der Nepersch en Analogie (Proportion) bekannt. Der Hauptsatz heißt wie der entsprechende Satz der Sphärik der Gaußsche Doppelsatz. Vergl. unten §. 5, 10.

Nun ist $\sin CDA = \sin BDC$ (§. 1, 7), $\sin CEA = \cos EDC$ und $\sin ACE = \cos ACD$ (§. 2, 1), folglich nach gewöhnlicher Bezeichnung

$$\frac{b}{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)} = \frac{c-a}{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}, \qquad \frac{b}{\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)} = \frac{c+a}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}$$

oder

$$b\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) = (c-a)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$b\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) = (c+a)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

Durch Division erhält man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) = \frac{c-a}{c+a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

8. Mit Hilfe des vorstehenden Satzes werden am einfachsten aus zwei Seiten c, a eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel β die übrigen Elemente γ, α, b des Dreiecks berechnet. Der Winkel $\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ ist das Komplement von $\frac{1}{2}\beta$. Man kennt demnach die Produkte $b\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ und $b\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$. Aus ihren Werten findet man durch Division $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$, und hierzu sowohl $\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ und $\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$, als auch den Winkel $\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$. Daher kann man nun die Seite b auf zwei verschiedene Arten durch Division berechnen, und findet endlich aus $\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ und $\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ die Winkel γ und α.

Beispiel.

c	4652	$\log(c-a)$	2,8639
a	3921	$\log\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$	9,9872
β	$27^0 38'$	$\log(c+a)$	3,9332
$c-a$	731	$\log\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$	9,3781
$c+a$	8573	$\log b\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	2,8511
$\frac{1}{2}\beta$	$13^0 49'$	$\log b\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	3,3113
$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$	$76^0 11'$	$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	9,5398
$\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	$19^0 7'$	$\log\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	9,5151
γ	$95^0 18'$	$\log\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	9,9754
α	$57^0 4'$	$\log b$	3,3360
b	2167,5		

Anmerkung. Um aus einer Seite b eines Dreiecks, dem gegenüberliegenden Winkel β und dem Verhältnis der beiden andern Seiten $a:c = m$ die übrigen Elemente des Dreiecks zu berechnen, setzt man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) = \frac{c-a}{c+a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha) = \frac{1-m}{1+m}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

$$\tfrac{1}{2}(c-a) = \tfrac{1}{2}b\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}, \quad \tfrac{1}{2}(c+a) = \tfrac{1}{2}b\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}$$

9. Weil $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$ (§. 1, 8), so hat man, wenn $\sin\alpha : \sin\gamma = m$ ist, nach dem Lehrsatz (7)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha) = \frac{\sin\gamma-\sin\alpha}{\sin\gamma+\sin\alpha} = \frac{1-m}{1+m}$$

Man kann also aus der Summe von zwei Winkeln und dem Verhältnis ihrer Sinus die Differenz der beiden Winkel, also auch die Winkel selbst berechnen.*) Dabei kann $m = \sin\mu$ gesetzt werden, u. s. w. Wenn die gegebene Summe 180^0 übersteigt, so setze man $\gamma = 180^0-\gamma'$, $\alpha = 180^0-\alpha'$, und hat

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\gamma') : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha'+\gamma') = \frac{\sin\alpha'-\sin\gamma'}{\sin\alpha'+\sin\gamma'}$$

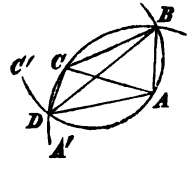
Nun ist $\alpha'-\gamma' = \gamma-\alpha$, $\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma') = 180^0-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$, und (3)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha'+\gamma') = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$\sin\alpha' = \sin\alpha,\quad \sin\gamma' = \sin\gamma$$

also wie vorhin

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha) = \frac{\sin\gamma-\sin\alpha}{\sin\gamma+\sin\alpha}$$

Anwendung. Auf der Ebene des Dreiecks ABC giebt es einen Punkt D, für welchen die Seiten AB und BC gegebene scheinbare Größen haben. Dieser Punkt D ist der zweite gemeinschaftliche Punkt der Kreise ABC' und BCA', deren Sehnen AB und BC für C' und A' die gegebenen scheinbaren Größen besitzen; er ist unbestimmt, wenn die beiden Kreise mit dem Kreis ABC zusammenfallen.



Um aus den gegebenen Elementen des Dreiecks ABC, wovon AB, BC und der Winkel CBA durch c, a, β bezeichnet werden, und aus den Winkeln ADB und BDC, die durch γ' und α' bezeichnet werden, die Strecken DA, DB, DC, die durch f, g, h bezeichnet werden, zu berechnen**), bezeichne man die Winkel BAD und DCB des Vierecks $ABCD$ durch φ und ψ, und hat

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) = 180^0-\tfrac{1}{2}(\gamma'+\alpha'+\beta)$$

In den Dreiecken ABD und BCD ist

---

*) Diese Aufgabe und ihre konstruktive Lösung ist durch Ptolemäus und Regiomontanus bekannt geworden. Vergl. die Bemerkung zu (7).

**) Snellius 1614, Pothenot 1692, Lambert 1765 u. A. Vergl. Pfleiderer Trigon. p. 275. Diese Aufgabe wird gewöhnlich nach dem zweiten Bearbeiter die Pothenot'sche Aufgabe genannt.

$$\frac{g}{\sin\varphi} = \frac{c}{\sin\gamma'}, \qquad \frac{g}{\sin\psi} = \frac{a}{\sin\alpha'}$$

folglich durch Division

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{c}{\sin\gamma'} : \frac{a}{\sin\alpha'} = m$$

Nach dem obigen ist aber

$$\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) : \tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) = \frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\sin\varphi+\sin\psi} = \frac{1-m}{1+m}$$

wodurch $\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$, also auch φ und ψ bekannt werden. Endlich hat man zur Berechnung von f, g, h

$$\frac{f}{\sin(\varphi+\gamma')} = \frac{g}{\sin\varphi} = \frac{c}{\sin\gamma'} \qquad \frac{h}{\sin(\psi+\alpha')} = \frac{a}{\sin\alpha'}$$

Beispiel.

c	520
a	312
β	$65^0 27'$
γ'	$32^0 52'$
α'	$23^0 25'$
$\frac{1}{2}(\beta+\gamma'+\alpha')$	$60^0 52'$
$\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$	$119^0 8'$
$\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$	$10^0 6'$
φ	$129^0 14'$
ψ	$109^0 2'$
g	742,2
f	294,5
h	579,3

$\log c$	2,7160
$\log\sin\gamma'$	9,7346
$\log(c : \sin\gamma')$	2,9814
$\log a$	2,4942
$\log\sin\alpha'$	9,5993
$\log(a : \sin\alpha')$	2,8949
$\log m$	0,0865 (A)
$\log\left(1-\frac{1}{m}\right)$	$-0{,}7433$ $(-U)$
$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)$	0,2599 (S)
$\log\frac{1-..}{1+..}$	$-1{,}0032$
$\log\tang\frac{1}{2}(\beta+..)$	10,2539
$\log\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$	9,2506
$\log\sin\varphi$	9,8891
$\log\sin(\varphi+\gamma')$	9,4877
$\log\sin(\psi+\alpha')$	9,8680
$\log g$	2,8705
$\log f$	2,4691
$\log h$	2,7629

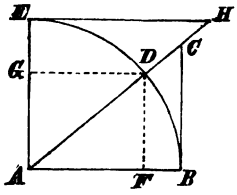
Weil in diesem Falle $m > 1$ und $\tang\frac{\varphi+\psi}{2} = -\tang\frac{\beta+\gamma'+\alpha'}{2}$ so ist $\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$

$$= \frac{m-1}{m+1} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma'+\alpha') = \frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma'+\alpha')$$

10. Außer dem Sinus und Cosinus, der Tangente und Cotangente eines Winkels α werden in der Trigonometrie bisweilen noch andere Funktionen des Winkels α gebraucht, nämlich die **Sekante** und **Cosekante**, der **Sinus versus** und **Cosinus versus** desselben, und durch $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$, $\sin\operatorname{vers}\alpha$, $\cos\operatorname{vers}\alpha$ bezeichnet. Ihre Definitionen lauten:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\cos(90^0-\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin\operatorname{vers}\alpha = 1-\cos\alpha, \quad \cos\operatorname{vers}\alpha = 1-\cos(90^0-\alpha) = 1-\sin\alpha$$



Die Benennungen Sekante, Tangente und Sinus versus sind geometrischen Ursprungs. Mit dem Radius AB beschreibe man um den Scheitel A in den Winkel BAC den Kreisbogen BD und den Quadranten BE. Zieht man die Normalen BC, DF zu AB, und die Normalen DG, EH zu AE, so ist

$$\sin BAD = \frac{FD}{AD} \qquad \cos BAD = \sin DAE = \frac{GD}{AD}$$

$$\operatorname{tang} BAD = \frac{BC}{AB} \qquad \cot BAD = \operatorname{tang} DAE = \frac{EH}{AE}$$

$$\sec BAD = \frac{AD}{GD} = \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} BAD = \sec DAE = \frac{AH}{AE}$$

$$\sin\operatorname{vers} BAD = 1-\frac{AF}{AD} = \frac{FB}{AB}$$

$$\cos\operatorname{vers} BAD = \sin\operatorname{vers} DAE = \frac{GE}{AE}$$

Wenn der Radius eine Längeneinheit und $180 : \pi$ eine Winkeleinheit ist, so ist der Kreisbogen BD dem Centriwinkel BAD (seinem Arcus, Planim. §. 13, 8) gleich, und man erhält die Ausdrücke

$$\sin BD = FD, \qquad \cos BD = GD$$

$$\operatorname{tang} BD = BC, \qquad \cot BD = EH$$

$$\sec BD = AC, \qquad \operatorname{cosec} BD = AH$$

$$\sin\operatorname{vers} BD = FB, \quad \cos\operatorname{vers} BD = GE$$

denen die Namen Tangente, Sekante, Sinus versus u. s. w. entsprechen.*)

*) Eine Tabelle der Sekanten ist zur Erleichterung der trigonometrischen Rech-

Nach dem Pythagoreiſchen Satze iſt $AB^2+BC^2 = AC^2$, $AE^2+EH^2 = AH^2$, d. h.

$$1+\operatorname{tang}^2 BD = \sec^2 BD, \quad 1+\cot^2 BD = \operatorname{cosec}^2 BD$$

wie oben (2) angegeben wurde.

Ein Bogen iſt länger als ſeine Sehne, mithin länger als die halbe Sehne des verdoppelten Bogens. Der Sektor ABD iſt kleiner als das Dreieck ABC, daher iſt der Bogen BD kürzer als die Tangente BC (vergl. Planim. §. 10, 4). Man hat demnach die Begrenzungen

$$FD < \text{Bogen } BD < BC$$
$$\sin BD < \text{Bogen } BD < \operatorname{tang} BD$$
$$1 < \frac{\text{Bogen } BD}{\sin BD} < \frac{1}{\cos BD} \text{ und } \cos BD < \frac{\text{Bogen } BD}{\operatorname{tang} BD} < 1$$
$$\frac{\text{Bogen } BD}{\sin BD} - 1 < \frac{1}{\cos BD} - 1, \quad 1 - \frac{\text{Bogen } BD}{\operatorname{tang} BD} < 1 - \cos BD$$

Bei hinreichend kleinen Bogen BD ſind $\sin BD$, $\operatorname{tang} BD$, $1-\cos BD$ beliebig klein, die kleinern Differenzen null, d. h. bei unendlich kleinen Bogen iſt

$$\frac{\text{Bogen } BD}{\sin BD} = 1, \quad \frac{\text{Bogen } BD}{\operatorname{tang} BD} = 1$$

§. 4. Goniometrie.

1. Zur Beſtimmung des Winkels fg der Geraden g mit f auf einer Ebene iſt es erforderlich, daß nicht nur die poſitive Richtung jeder Geraden (Planim. §. 14, 1), ſondern auch der poſitive Sinn der Ebene gegeben ſei, d. h. der Sinn der Drehung, durch welche poſitive Winkel (und Flächen) der Ebene beſchrieben werden.*) Wenn die Gerade f in dem gegebenen Sinne (z. B. linksum für den auf einer beſtimmten Seite der Ebene ſtehenden Betrachter) um α Grad gedreht werden muß, bis daß die poſitive Richtung von f mit der poſitiven Richtung von g übereinſtimmt, ſo hat der durch fg bezeichnete Winkel α Grad. Dabei kann für α auch $\alpha+360^0$, $\alpha+2.360^0$, . . , $\alpha+k.360^0$ geſetzt werden, wenn k irgend eine ganze Zahl, poſitiv

---

nungen von Joachim Rhäticus 1539 unter dem Titel canon hypotenusarum und von Maurolycus 1558 unter dem Titel tabula benefica berechnet und herausgegeben worden. Die Namen Tangente und Sekante rühren von Fink her (geom. rotundi 1583). Der Name Sinus verſus (im Gegenſatz von sinus rectus) war früher gebräuchlich. Vergl. Pfleiderer a. a. O. Durch die Erfindung der Logarithmen wurde der Gebrauch der Sekanten in der Trigonometrie überflüſſig.

*) Dieſe genauern Beſtimmungen ſind von Möbius (analyt. Sphärik 1, Kreisverwandtſchaft 8, und anderwärts) angegeben worden.

oder negativ, bedeutet (Planim. §. 2, 4). Wenn zu demselben Zwecke die Gerade f in dem gegebenen Sinne um $360 - \beta$ Grad oder in dem entgegengesetzten Sinne um β Grad gedreht werden muß, so hat der durch fg bezeichnete Winkel $-\beta$ Grad.

Demnach hat die Summe der Winkel $fg + gf$ den Wert 0 oder $k.360^0$, die Winkel fg und gf sind entgegengesetzt gleich, $gf = -fg$.

Bei drei Geraden einer Ebene, f, g, h, hat man

$$fg + gh + hf = 0$$

auch in dem Falle, daß die Geraden nicht durch einen Punkt gehn. Zieht man nämlich durch einen Punkt der Ebene die Geraden f', g', h', die mit f, g, h der Reihe nach parallel und von einerlei positiven Richtungen sind, so sind die Winkel $f'g'$ und fg, $g'h'$ und gh, $h'f'$ und hf gleich (Planim. §. 2, 8), daher $fg + gh + hf = f'g' + g'h' + h'f' = 0$. Aus dieser Gleichung erhält man

$$fg + gh = -hf = fh$$
$$fh = gh - gf = fg - hg, \text{ u. s. w.}$$

Bei der Bezeichnung eines Winkels durch 3 Buchstaben, z. B. CBA, wird vorausgesetzt, daß die positiven Richtungen der Schenkel von B nach C und von B nach A gehn. Bei der Bezeichnung des von zwei Strecken AB und CD gebildeten Winkels $AB \wedge CD$ wird vorausgesetzt, daß die positiven Richtungen der Schenkel von A nach B und von C nach D gehn.

2. Wenn eine beliebige Strecke AB der Geraden h auf die Gerade x durch Normalen projiciert und die Projektion durch A_1B_1 bezeichnet wird, so ist das **Verhältnis der Projektion zur projicierten Strecke** $A_1B_1 : AB$ unabhängig von der Länge der Strecke und ihrer Lage auf der Geraden h (Planim. §. 8, 2) und verändert sich im allgemeinen, wenn der von den Geraden x und h gebildete Winkel eine Veränderung erleidet (§. 1, 3). Demnach ist das genannte Verhältnis eine bestimmte Funktion des Winkels xh und heißt der **Cosinus** dieses Winkels. Man bezeichnet den Cosinus des Winkels xh durch $\cos xh$, so daß

$$\cos xh = A_1B_1 : AB, \quad A_1B_1 = AB \cos xh$$

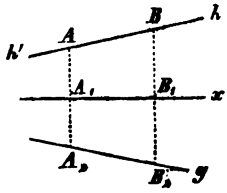
In dieser umfassenden Definition des Cosinus irgend eines Winkels ist die von dem Cosinus eines spitzen Winkels in §. 2. gegebene Definition enthalten.*) Vergl. die Figur §. 3, 10.

*) Diese Anordnung und unbeschränkte Begründung der Goniometrie und Trigonometrie verdankt man **Möbius**. Vergl. die angeführten Schriften.

Zwei Winkel, welche entgegengesetzt gleich sind, haben dieselben Cosinus; zwei Winkel, deren Differenz oder Summe 180^0 beträgt, haben entgegengesetzt gleiche Cosinus, z. B.

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+180^0) = -\cos\alpha = \cos(-\alpha+180^0)$$

Beweis. Wenn die Gerade x den Winkel gh halbiert, so sind die Winkel hx und xg gleich, xg und xh entgegengesetzt gleich. Die Geraden, welche die Strecke AB der Geraden h auf x normal projicieren, schneiden x in A_1 und B_1, und g in A_2 und B_2, so daß $\cos xh = A_1B_1 : AB$, $\cos xg = A_1B_1 : A_2B_2$. Dreht man die Figur $A_1B_1B_2A_2$ um die Axe x, bis A_2 auf A fällt, so fällt die positive Richtung von g mit der positiven Richtung von h, und B_2 mit B zusammen. Wenn nun AB eine positive (negative) Strecke von h ist, so ist A_2B_2 eine positive (negative) Strecke von g; also haben die Verhältnisse $A_1B_1 : A_2B_2$ und $A_1B_1 : AB$ einerlei Größe und Zeichen, d. h. es ist $\cos xg = \cos xh$.



Wenn aber die positiven Richtungen der vereinten Geraden h und h' entgegengesetzt sind, so unterscheiden sich die Winkel xh und xh' um 180^0. Ist nun AB eine positive Strecke von h, so ist AB zugleich eine negative Strecke von h', und umgekehrt. Das Verhältnis $A_1B_1 : AB$ hat in dem einen Falle den Wert $\cos xh$, in dem andern Falle den Wert $\cos xh'$, also sind $\cos xh$ und $\cos xh'$ entgegengesetzt gleich.

Anmerkung. Wenn die Geraden parallel und von einerlei positiver Richtung sind, so ist eine Strecke der einen mit ihrer Normalprojektion auf die andere von einerlei Größe und Zeichen. Wenn die Geraden normal zu einander sind, so verschwindet die Normalprojektion einer Strecke der einen auf die andere. Daher hat man

$$\cos 0 = 1, \quad \cos 90^0 = 0$$
$$\cos 180^0 = -\cos 0 = -1, \quad \cos 270^0 = 0, \text{ u. s. f.}$$

3. Aus den angegebenen Eigenschaften der Cosinus fließen die entsprechenden Eigenschaften des **Sinus** zufolge der Definition

$$\sin\alpha = \cos(90^0-\alpha)$$

Indem man α durch $90^0-\alpha$ ersetzt, findet man

$$\sin(90^0-\alpha) = \cos\alpha$$

Zwei Winkel, deren Summe 180^0 beträgt, haben dieselben Sinus. Zwei Winkel, die entgegengesetzt gleich sind, sowie zwei Winkel, deren Differenz 180^0 beträgt, haben entgegengesetzt gleiche Sinus. Z. B.

$$\sin(180^0-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha = \sin(180^0+\alpha)$$

Denn $\sin(180^0-\alpha) = \cos(90^0-180^0+\alpha) = \cos(90^0-\alpha)$, weil die Winkel $-90^0+\alpha$ und $90^0-\alpha$ entgegengesetzt gleich sind. Dagegen ist $\sin(-\alpha) = \cos(90^0+\alpha) = -\cos(90^0-\alpha)$, weil die Summe der Winkel $90^0+\alpha$ und $90^0-\alpha$ den Wert 180^0 hat.

Die besondern Werte

$$\sin 0 = 0, \quad \sin 90^0 = 1, \quad \sin 180^0 = 0, \quad \sin 270^0 = -1$$

u. s. w. ergeben sich aus den Werten von $\cos 90^0$, $\cos 0, \ldots$ Vergl. die Figur §. 3, 10. Zur Benutzung der Tabellen dienen die Reduktionen

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= -\sin(\alpha-90^0) & \sin\alpha &= \cos(\alpha-90^0) \\ &= -\cos(\alpha-180^0) & &= -\sin(\alpha-180^0) \\ &= \sin(\alpha-270^0) & &= -\cos(\alpha-270^0) \end{aligned}$$

4. Aus den gefundenen Eigenschaften der Cosinus und Sinus fließen die entsprechenden Eigenschaften der Tangenten und Cotangenten zufolge der Definitionen

$$\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \tang(90^0-\alpha)$$

Weil $\sin(90^0-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^0-\alpha) = \sin\alpha$, so ist

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tang\alpha}$$

Zwei Winkel, deren Differenz 180^0 beträgt, haben dieselben Tangenten und Cotangenten. Zwei Winkel, deren Summe 0 oder 180^0 beträgt, haben entgegengesetzt gleiche Tangenten und Cotangenten. Z. B.

$$\tang(\alpha+180^0) = \tang\alpha$$
$$\tang(-\alpha) = \tang(-\alpha+180^0) = -\tang\alpha$$

weil bei dem Übergang von α zu $\alpha+180^0$ sowohl der Sinus als auch der Cosinus das Zeichen wechselt, während bei den Übergängen von α zu $-\alpha$ oder $-\alpha+180^0$ nur der eine von beiden das Zeichen wechselt.

Die besondern Werte

$$\begin{aligned} &\tang 0 = 0, && \tang 45^0 = 1, && \tang 90^0 = \infty \\ &\tang 135^0 = -1, && \tang 180^0 = 0, && \tang 225^0 = 1 \\ &\tang 270^0 = \infty, && \tang 315^0 = -1, && \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

ergeben sich aus den zugehörigen Werten der Sinus und Cosinus.

Anmerkung. Der unbekannte Winkel x erhält durch jede der Gleichungen $\cos x = a$, $\sin x = b$, $\tang x = c$ unendlichviel bestimmte Werte. Für $\cos x = -a$, $\sin x = -b$, $\tang x = -c$ setzt man

$$\sin(x-90^0) = a, \quad \sin(x-180^0) = b, \quad \cot(x-90^0) = c$$

Ist α eine Wurzel der Gleichung $\cos x = a$, so ist auch $-\alpha$ eine Wurzel derselben. Die andern Wurzeln sind in den Formeln $\alpha + k.360^0$, $-\alpha + k.360^0$ enthalten, wo für k jede ganze Zahl gesetzt werden kann (1).

Ist β eine Wurzel der Gleichung $\sin x = b$, so ist auch $\beta + k.360^0$ und $180^0 - \beta + k.360^0$ eine Wurzel derselben.

Ist γ eine Wurzel der Gleichung $\operatorname{tang} x = c$, so ist auch $\gamma + k.360^0$ und $\gamma + 180^0 + k.360^0$ eine Wurzel derselben.

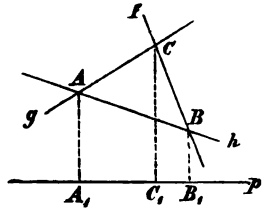
Die Arcus der gefundenen Winkel (Planim. §. 13, 8) werden in der Analysis seit Euler durch $\operatorname{arc\,cos} a$, $\operatorname{arc\,sin} b$, $\operatorname{arc\,tang} c$ bezeichnet, oder auch durch $\operatorname{Ang\,cos} a$ oder $\operatorname{arc}(\cos = a)$, u. s. w.

5. Die Geraden, auf denen die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks liegen, werden durch f, g, h, eine willkürliche Gerade der Ebene ABC wird durch p bezeichnet. Nach willkürlicher Festsetzung des positiven Sinnes der Ebene (1) und der positiven Richtungen von f, g, h, p sind die Strecken und Winkel der Figur auch dem Zeichen nach bestimmt und durch folgende Gleichungen verbunden:*)

$$BC \cos pf + CA \cos pg + AB \cos ph = 0$$
$$BC \sin pf + CA \sin pg + AB \sin ph = 0$$
$$BC : CA : AB = \sin gh : \sin hf : \sin fg$$

Beweis. Bezeichnet man durch A_1, B_1, C_1 die Normalprojektionen von A, B, B auf p, so ist $A_1B_1 = AB \cos ph$ (2), u. s. w. Nun ist $B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 = 0$ (Planim. §. 14, 1), folglich

$$BC \cos pf + CA \cos pg + AB \cos ph = 0$$



Dreht man die Gerade p um 90^0, so geht der Winkel ph in $ph - 90^0$, und $\cos ph$ in $\cos(ph - 90^0)$ d. i. $\sin ph$ (3) über, u. s. w. Also ist auch

$$BC \sin pf + CA \sin pg + AB \sin ph = 0$$

Durch Vereinigung der willkürlichen Geraden p einmal mit f, dann mit g, findet man die Gleichungen

$$CA \sin fg + AB \sin fh = 0, \quad BC \sin gf + AB \sin gh = 0$$

welche die aufgestellte Proportion enthalten, in Betracht daß $\sin ff = 0$, $\sin fh = -\sin hf$ (3), u. s. w.

Anmerkung. Wenn die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC

*) Vergl. unten §. 6, 1. Den genauen Ausdruck namentlich der dritten Gleichung verdankt man Möbius (Kreisverw. in der Einleitung).

poſitive Strecken der Geraden f, g, h ſind und die Werte a, b, c haben, ſo werden die durch α, β, γ bezeichneten Winkel BAC, CBA, ACB des Dreiecks von den Winkeln gh, hf, fg zu 180^0 ergänzt. Nun iſt $\sin\alpha = \sin gh$ (3), u. ſ. w., folglich

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \quad (\S.\ 1, 8)$$

6. Wenn man in die gefundenen Gleichungen für BC, CA, AB die ihnen proportionalen Werte $\sin gh$, $\sin hf$, $\sin fg$ ſetzt, ſo erhält man die für 4 beliebige Gerade einer Ebene f, g, h, p gültigen Gleichungen

$$\begin{aligned}\sin gh\cos fp + \sin hf\cos gp + \sin fg\cos hp &= 0\\ \sin gh\sin fp + \sin hf\sin gp + \sin fg\sin hp &= 0\end{aligned}$$

aus denen die Relationen der goniometriſchen Funktionen ſich ableiten laſſen.

Setzt man die Winkel

$$fp = \varkappa, \quad gp = \lambda, \quad hp = \mu$$

ſo iſt

$$gh = \lambda - \mu, \quad hf = \mu - \varkappa, \quad fg = \varkappa - \lambda$$

weil $gh = gp - hp$ (1), u. ſ. w. Demnach iſt für 3 beliebige Winkel $\varkappa$, λ, μ

$$\begin{aligned}\sin(\lambda-\mu)\cos\varkappa + \sin(\mu-\varkappa)\cos\lambda + \sin(\varkappa-\lambda)\cos\mu &= 0\\ \sin(\lambda-\mu)\sin\varkappa + \sin(\mu-\varkappa)\sin\lambda + \sin(\varkappa-\lambda)\sin\mu &= 0\end{aligned}$$

Dividiert man durch $\sin\varkappa\sin\lambda\sin\mu$, ſo erhält man

$$\frac{\sin(\varkappa-\lambda)}{\sin\varkappa\sin\lambda} + \frac{\sin(\lambda-\mu)}{\sin\lambda\sin\mu} + \frac{\sin(\mu-\varkappa)}{\sin\mu\sin\varkappa} = 0$$

Ebenſo hat man für die Winkel $\varkappa$, μ, ν

$$\frac{\sin(\varkappa-\mu)}{\sin\varkappa\sin\mu} + \frac{\sin(\mu-\nu)}{\sin\mu\sin\nu} + \frac{\sin(\nu-\varkappa)}{\sin\nu\sin\varkappa} = 0$$

daher durch Addition*)

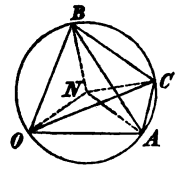
$$\frac{\sin(\varkappa-\lambda)}{\sin\varkappa\sin\lambda} + \frac{\sin(\lambda-\mu)}{\sin\lambda\sin\mu} + \frac{\sin(\mu-\nu)}{\sin\mu\sin\nu} + \frac{\sin(\nu-\varkappa)}{\sin\nu\sin\varkappa} = 0$$

u. ſ. f. Als Diviſoren können an die Stelle von $\sin\varkappa, \ldots$ auch $\cos\varkappa, \ldots$ geſetzt werden.

Anmerkung. Die obige Fundamentalgleichung der Goniometrie wurde im Altertum durch den Ptolemäiſchen Lehrſatz (Planim. §. 14, 15)

*) Carnot géom. de pos. 139 ff., 215 und 216.

vertreten. Wenn nämlich die in einerlei Sinn beschriebenen Kreisbogen AO, BO, CO die Centriwinkel $2\varkappa$, 2λ, 2μ haben, so haben die Bogen AB, BC, CA die Centriwinkel $2\varkappa-2\lambda$, $2\lambda-2\mu$, $2\mu-2\varkappa$. Die Sehne eines Kreisbogens ist das Produkt des Diameters mit dem Sinus des halben dem Bogen zugehörigen Centriwinkels (§. 1, 6) und wechselt mit dem Bogen das Zeichen. Also giebt die gefundene Gleichung



$$\frac{AB}{OA.OB}+\frac{BC}{OB.OC}+\frac{CA}{OC.OA}=0, \text{ u. s. w.}$$

7. Die Substitution $\varkappa=\alpha$, $\lambda=\beta$, $\mu=0$ giebt (6)

I. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

Bei Vertauschung von β mit $-\beta$ bleibt $\cos\beta$ unverändert, $\sin\beta$ wechselt das Zeichen. Vertauscht man α mit $90^0-\alpha$, so findet man aus diesen Gleichungen

II. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

Setzt man hierin $\beta=\alpha$, so erhält man

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos 0=1 \quad (\text{§. 2, 2})$$

III. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\operatorname{tang}\alpha\cos^2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tang}^2\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

IV. $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$, $\quad 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\cot^2\alpha$$

Anmerkung. Diese Gleichungen enthalten den Zusammenhang zwischen dem Sinus und dem Cosinus eines Winkels, zwischen den Sinus und Cosinus von zwei Winkeln und dem Sinus oder Cosinus der Summe und der Differenz von beiden Winkeln, zwischen dem Sinus und Cosinus eines Winkels und dem Sinus oder Cosinus des doppelten oder halben Winkels. Man kann also aus dem Sinus eines Winkels die Sinus von beliebig vielen Winkeln berechnen.

Die Relationen der goniometrischen Funktionen wurden im Altertum als Gleichungen zwischen Kreissehnen dargestellt (6, Anm.); aus der Sehne eines Centriwinkels berechnete man die Sehnen von beliebig vielen Centriwinkeln. Ein dazu dienlicher Satz, der die Gleichung

poſitive Strecken der Geraden f, g, h ſind und die Werte a, b, c haben, ſo werden die durch α, β, γ bezeichneten Winkel BAC, CBA, ACB des Dreiecks von den Winkeln gh, hf, fg zu 180^0 ergänzt. Nun iſt $\sin\alpha = \sin gh$ (3), u. ſ. w., folglich

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \quad (\S.\ 1, 8)$$

6. Wenn man in die gefundenen Gleichungen für BC, CA, AB die ihnen proportionalen Werte $\sin gh$, $\sin hf$, $\sin fg$ ſetzt, ſo erhält man die für 4 beliebige Gerade einer Ebene f, g, h, p gültigen Gleichungen

$$\begin{aligned}\sin gh\cos fp + \sin hf\cos gp + \sin fg\cos hp &= 0\\ \sin gh\sin fp + \sin hf\sin gp + \sin fg\sin hp &= 0\end{aligned}$$

aus denen die Relationen der goniometriſchen Funktionen ſich ableiten laſſen.

Setzt man die Winkel

$$fp = \varkappa, \quad gp = \lambda, \quad hp = \mu$$

ſo iſt

$$gh = \lambda - \mu, \quad hf = \mu - \varkappa, \quad fg = \varkappa - \lambda$$

weil $gh = gp - hp$ (1), u. ſ. w. Demnach iſt für 3 beliebige Winkel $\varkappa$, λ, μ

$$\begin{aligned}\sin(\lambda-\mu)\cos\varkappa + \sin(\mu-\varkappa)\cos\lambda + \sin(\varkappa-\lambda)\cos\mu &= 0\\ \sin(\lambda-\mu)\sin\varkappa + \sin(\mu-\varkappa)\sin\lambda + \sin(\varkappa-\lambda)\sin\mu &= 0\end{aligned}$$

Dividiert man durch $\sin\varkappa\sin\lambda\sin\mu$, ſo erhält man

$$\frac{\sin(\varkappa-\lambda)}{\sin\varkappa\sin\lambda} + \frac{\sin(\lambda-\mu)}{\sin\lambda\sin\mu} + \frac{\sin(\mu-\varkappa)}{\sin\mu\sin\varkappa} = 0$$

Ebenſo hat man für die Winkel $\varkappa$, μ, ν

$$\frac{\sin(\varkappa-\mu)}{\sin\varkappa\sin\mu} + \frac{\sin(\mu-\nu)}{\sin\mu\sin\nu} + \frac{\sin(\nu-\varkappa)}{\sin\nu\sin\varkappa} = 0$$

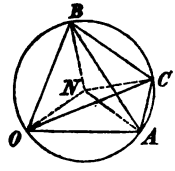
daher durch Addition*)

$$\frac{\sin(\varkappa-\lambda)}{\sin\varkappa\sin\lambda} + \frac{\sin(\lambda-\mu)}{\sin\lambda\sin\mu} + \frac{\sin(\mu-\nu)}{\sin\mu\sin\nu} + \frac{\sin(\nu-\varkappa)}{\sin\nu\sin\varkappa} = 0$$

u. ſ. f. Als Diviſoren können an die Stelle von $\sin\varkappa, \ldots$ auch $\cos\varkappa, \ldots$ geſetzt werden.

Anmerkung. Die obige Fundamentalgleichung der Goniometrie wurde im Altertum durch den Ptolemäiſchen Lehrſatz (Planim. §. 14, 15)

*) Carnot géom. de pos. 139 ff., 215 und 216.



vertreten. Wenn nämlich die in einerlei Sinn beschriebenen Kreisbogen AO, BO, CO die Centriwinkel $2\varkappa$, 2λ, 2μ haben, so haben die Bogen AB, BC, CA die Centriwinkel $2\varkappa-2\lambda$, $2\lambda-2\mu$, $2\mu-2\varkappa$. Die Sehne eines Kreisbogens ist das Produkt des Diameters mit dem Sinus des halben dem Bogen zugehörigen Centriwinkels (§. 1, 6) und wechselt mit dem Bogen das Zeichen. Also giebt die gefundene Gleichung

$$\frac{AB}{OA.OB}+\frac{BC}{OB.OC}+\frac{CA}{OC.OA}=0, \text{ u. s. w.}$$

7. Die Substitution $\varkappa=\alpha$, $\lambda=\beta$, $\mu=0$ giebt (6)

I. $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

Bei Vertauschung von β mit $-\beta$ bleibt $\cos\beta$ unverändert, $\sin\beta$ wechselt das Zeichen. Vertauscht man α mit $90^0-\alpha$, so findet man aus diesen Gleichungen

II. $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Setzt man hierin $\beta=\alpha$, so erhält man

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos 0=1 \text{ (§. 2, 2)}$$

III. $$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\operatorname{tang}\alpha\cos^2\alpha=\frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tang}^2\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

IV. $$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha,\quad 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$$
$$\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\cot^2\alpha$$

Anmerkung. Diese Gleichungen enthalten den Zusammenhang zwischen dem Sinus und dem Cosinus eines Winkels, zwischen den Sinus und Cosinus von zwei Winkeln und dem Sinus oder Cosinus der Summe und der Differenz von beiden Winkeln, zwischen dem Sinus und Cosinus eines Winkels und dem Sinus oder Cosinus des doppelten oder halben Winkels. Man kann also aus dem Sinus eines Winkels die Sinus von beliebig vielen Winkeln berechnen.

Die Relationen der goniometrischen Funktionen wurden im Altertum als Gleichungen zwischen Kreissehnen dargestellt (6, Anm.); aus der Sehne eines Centriwinkels berechnete man die Sehnen von beliebig vielen Centriwinkeln. Ein dazu dienlicher Satz, der die Gleichung

$\sin^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha\tang\frac{1}{2}\alpha$ ausdrückt, welche mit (III, 1) zusammentrifft, kommt bei Archimedes (Cyclom. p. 114 der Nizzeschen Übers.) vor.

Wenn in der Figur §. 3, 10 der Radius $AB = r$, der Bogen $BD = r\varphi$, und $DC = h$, so ist

$$\cos\varphi = \frac{r}{r+h}, \quad 1-\cos\varphi = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{h}{r+h}$$

und das Quadrat der Chorde BD

$$4r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2r^2h}{r+h}$$

Bei hinreichend kleinen $h:r$ ist daher $\sin^2\frac{1}{2}\varphi = h:2r$, $BD^2 = 2rh$ mit unbeträchtlichen Fehlern.

8. Die Gleichungen (7) geben

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta\\
\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta\\
\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) &= 2\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Die Multiplikation von zwei Sinus oder Cosinus kann demnach auf die Addition oder Subtraktion von zwei Sinus oder Cosinus zurückgeführt werden. Diese Methode (προσθ-αφαίρεσις) ist beim numerischen Rechnen durch die Erfindung der Logarithmen überflüssig geworden.

Die Multiplikation der gefundenen Gleichungen giebt, wenn man $\sin 2\alpha$ für $2\sin\alpha\cos\alpha$, . . setzt (7)

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta) = \sin 2\alpha\sin 2\beta$$

Durch Division findet man ebendaher

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} &= \frac{\tang\alpha}{\tang\beta}\\
\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} &= \tang\alpha\tang\beta
\end{aligned}$$

Anders gestalten sich die gefundenen Gleichungen, wenn man $\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$ d. i. $\alpha = \frac{1}{2}(x+y)$, $\beta = \frac{1}{2}(x-y)$ setzt:

$$\begin{aligned}
\sin x+\sin y &= 2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)\\
\sin x-\sin y &= 2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\\
\cos y+\cos x &= 2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)\\
\cos y-\cos x &= 2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y)
\end{aligned}$$

$$\sin^2x-\sin^2y = \cos^2y-\cos^2x = \sin(x+y)\sin(x-y)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y} &= \frac{\tang\frac{1}{2}(x-y)}{\tang\frac{1}{2}(x+y)} \quad (\text{§. 3, 9})\\
\frac{\cos y-\cos x}{\cos y+\cos x} &= \tang\tfrac{1}{2}(x-y)\tang\tfrac{1}{2}(x+y)
\end{aligned}$$

9. Aus den Gleichungen (7) folgt

$$\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tang}\alpha\pm\operatorname{tang}\beta, \qquad \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \cot\beta\pm\cot\alpha$$

$$\frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1\mp\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta, \qquad \frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \cot\alpha\cot\beta\mp 1$$

Bei Vertauschung von β mit $-\beta$ wechseln $\operatorname{tang}\beta$ und $\cot\beta$ das Zeichen. Durch Division findet man

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}, \qquad \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}, \qquad \cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$$

Insbesondere hat man, weil $\operatorname{tang}45^0 = 1$,

$$\operatorname{tang}(45^0+\beta) = \frac{1+\operatorname{tang}\beta}{1-\operatorname{tang}\beta}$$

$$\operatorname{tang}2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tang}^2\alpha}, \qquad \cot2\alpha = \frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

Anmerkung. Wenn ein gegebener Winkel in die Teile x und y zu teilen ist, so daß $\sin x : \sin y$ oder $\cos x : \cos y$ einen gegebenen Wert hat, so berechnet man $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)$, u. s. w. Wenn $\sin x\cos y$ oder $\operatorname{tang}x : \operatorname{tang}y$ gegeben ist, so findet man $\sin(x-y)$. Wenn $\sin x\sin y$ oder $\operatorname{tang}x\operatorname{tang}y$ gegeben ist, so findet man $\cos(x-y)$. Wenn $\sin x+\sin y$ gegeben ist, so findet man $\cos\frac{1}{2}(x-y)$. Wenn $\operatorname{tang}x+\operatorname{tang}y$ gegeben ist, so findet man $\cos(x-y)$. U. s. w.

10. Die in (5) aufgestellte trigonometrische Gleichung giebt, wenn die Gerade p der Reihe nach mit f, g, h zusammenfällt, das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} BC &+ CA\cos fg + AB\cos hf &&= 0\\ BC\cos fg &+ CA &+ AB\cos gh &= 0\\ BC\cos hf &+ CA\cos gh &+ AB &= 0 \end{aligned}$$

Multipliciert man die erste dieser Gleichungen mit BC, die zweite mit CA, die dritte mit $-AB$, so findet man

$$BC^2 + CA^2 - AB^2 + 2BC.CA\cos fg = 0$$

mit §. 2, 3 übereinstimmend, in Betracht, daß $\cos fg = -\cos ACB$, wenn BC, CA positive Strecken der Geraden f, g sind (5, Anm.).

Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks ABC wie gewöhnlich durch a, b, c, und die gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ, so ist wie oben (§. 2, 5)

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$1-\cos\gamma = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{2ab}$$

$$1+\cos\gamma = \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$$

Nun ist (7)

$$\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\gamma$$

also hat man

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}$$

indem man $a+b+c = 2s$ setzt (§. 3, 5).

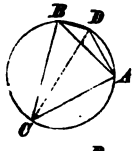
11. Wenn die Winkel des von den Geraden f, g, h gebildeten Dreiecks in der angegebenen Weise durch α, β, γ bezeichnet werden, so ist

$$\begin{aligned} 1-\cos^2 gh-\cos^2 hf-\cos^2 fg+2\cos gh\cos hf\cos fg &= 0\\ 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= 0\text{*)}\\ \sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\\ .&(-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma)\\ &= 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Gleichung fließt aus dem System der oben (10) aufgestellten Gleichungen, wenn man die Strecken CA, AB eliminiert. Geometrisch findet man dieselbe und die verwandte Gleichung, indem man einem Kreise, dessen Diameter eine Längeneinheit ist, ein Dreieck ABC einschreibt, dessen Seiten BC, CA, AB die Winkel α, β, γ gegenüber liegen. Dann ist auch dem Zeichen nach (6, Anm.)

$$BC = \sin\alpha, \quad CA = \sin\beta, \quad AB = \sin\gamma$$

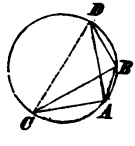


folglich (10)

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 0$$

Zieht man noch den Diameter CD, so ist entweder

$$AD = \cos\beta, \quad DB = \cos\alpha, \quad \cos BDA = -\cos\gamma$$



oder

$$AD = \cos\beta, \quad DB = -\cos\alpha, \quad \cos BDA = \cos\gamma$$

je nachdem B von dem Halbkreis CAD ausgeschlossen ist oder nicht. Nun ist $AB^2 = AD^2+DB^2-2AD.DB\cos BDA$ (10), folglich in jedem Falle

$$\sin^2\gamma = \cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

*) Euler Acta Petrop. 6, I p. 3.

Dieſe Gleichungen folgen aus (7), wenn man beachtet, daß $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$, $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$, weil $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Man findet $\sin^2\gamma$

$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$$
$$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$$
$$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

oder

$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

Die dritte Gleichung folgt am einfachſten aus der Gleichung (Planim. §. 14, 23)

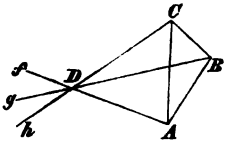
$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 16\Delta^2$$

wenn man die Seiten a, b, c des Dreiecks als Produkte des Diameters $2r$ des umgeſchriebenen Kreiſes mit den Sinus der den Seiten gegenüberliegenden Winkel darſtellt. Nun iſt (§. 1, 8)

$$\frac{\Delta^2}{r^4} = 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$$

folglich u. ſ. w.

Anmerkung. Bezeichnet man durch f, g, h die Geraden, welche die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC mit einem vierten Punkt D verbinden, durch a, b, c die Seiten des Dreiecks, durch p, q, r die Strecken DA, DB, DC, ſo hat man (10) $2DA.DB\cos fg = AD^2 + DB^2 - BA^2$, u. ſ. w., folglich



$$\cos fg = \frac{p^2+q^2-c^2}{2pq},\quad \cos gh = \frac{q^2+r^2-a^2}{2qr},\quad \cos hf = \frac{r^2+p^2-b^2}{2rp}$$

Durch Subſtitution dieſer Werte in der Gleichung

$$1 - \cos^2 fg - \cos^2 gh - \cos^2 hf + 2\cos fg\cos gh\cos hf = 0$$

erhält man

$$1 - \frac{(p^2+q^2-c^2)^2}{4p^2q^2} - \frac{(q^2+r^2-a^2)^2}{4q^2r^2} - \frac{(r^2+p^2-b^2)^2}{4r^2p^2} + \frac{(p^2+q^2-c^2)(q^2+r^2-a^2)(r^2+p^2-b^2)}{4p^2q^2r^2} = 0$$

oder entwickelt*)

$$\begin{aligned} &a^2p^2(b^2+c^2-a^2+q^2+r^2-p^2)\\ &+b^2q^2(c^2+a^2-b^2+r^2+p^2-q^2)\\ &+c^2r^2(a^2+b^2-c^2+p^2+q^2-r^2)\\ &-a^2q^2r^2-b^2r^2p^2-c^2p^2q^2-a^2b^2c^2 = 0 \end{aligned}$$

*) Euler a. a. O.

Diese Gleichung enthält die Relation zwischen den 6 Strecken, welche 4 Punkte einer Ebene verbinden.

12. Die Fläche des von den Geraden f, g, h gebildeten Dreiecks ABC wird durch die Formeln (§. 1, 7)

$$\tfrac{1}{2}BC.CA\sin fg,\quad \tfrac{1}{2}CA.AB\sin gh,\quad \tfrac{1}{2}AB.BC\sin hf$$

welche nach (5) einander gleich sind, auch dem Zeichen nach ausgedrückt. Die auf gleiche Weise für die Fläche ACB gebildete Formel $\frac{1}{2}AC.CB\sin gf$ ist der Formel $\frac{1}{2}BC.CA\sin fg$ entgegengesetzt gleich, sowie die Flächen ABC und ACB entgegengesetzt gleich sind (Planim. §. 9, 7).

Die Fläche eines Vierecks $ABCD$ ist durch die Seiten AB, BC, CD, DA und die Summe von zwei nichtfolgenden Winkeln z. B. $CBA+ADC$ bestimmt. Unter Beachtung der Zeichen der Dreiecke ist nämlich in allen Fällen

$$ABCD = ABC+CDA$$

Bezeichnet man die Fläche des Vierecks durch u, seine Seiten der Reihe nach durch a, b, c, d, die Winkel CBA und ADC durch α und γ, so hat man

$$4u = 2ab\sin\alpha+2cd\sin\gamma$$

Nun ist (10)

$$AC^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos\gamma$$

folglich

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = 2ab\cos\alpha-2cd\cos\gamma$$

Indem man quadriert und addiert, findet man

$$16u^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 4a^2b^2+4c^2d^2-8acbd(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma)$$

oder

$$16u^2 = 4a^2b^2+4c^2d^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-8abcd\cos(\alpha+\gamma)$$

Es ist aber (7)

$$\cos(\alpha+\gamma) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)-1 = 1-2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

folglich

$$16u^2 = 4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-16abcd\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$
$$= 4(ab-cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16abcd\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

Setzt man zur Abkürzung (Planim. §. 14, 29)

$$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 16v^2$$
$$4(ab-cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 16v_1{}^2$$

wobei $v^2 - v_1{}^2 = abcd$ ist, so bleibt

$$u^2 = v^2 - abcd\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)^*) = v_1{}^2 + abcd\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

Hieraus erkennt man, daß v der größte, v_1 der kleinste Wert ist, welche die von den Seiten a, b, c, d eingeschlossene Fläche u erhalten kann. Jener wird erreicht, wenn $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = 0$, $\alpha+\gamma = 180^0$, und das Viereck einem Kreise so eingeschrieben ist, daß der Perimeter sich selbst nicht schneidet (Planim. §. 15, 7); der kleinste Wert wird erreicht, wenn $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = 0$, $\alpha+\gamma = 0$, und das Viereck einem Kreise so eingeschrieben ist, daß der Perimeter sich selbst schneidet.**)

In dem ersten Falle ist $\cos\gamma = -\cos\alpha$, mithin

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

Daraus findet man wie oben (10)

$$1-\cos\alpha = \frac{-(a+b)^2+(c+d)^2}{2ab+2cd} = \frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{2ab+2cd}$$

$$1+\cos\alpha = \frac{(a+b^2)-(c-d)^2}{2ab+2cd\,.} = \frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{2ab+2cd}$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{(a+b-c+d)(a+b+c-d)} = \frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}$$

wenn man $a+b+c+d = 2s$ setzt (Planim. §. 14, 29). Ähnliche Werte ergeben sich bei dem zweiten Falle, in welchem $\cos\gamma = \cos\alpha$ ist.

13. Die Mitten der Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC werden durch A_1, B_1, C_1 bezeichnet, das Centrum des Kreises ABC durch M, der gemeinschaftliche Punkt der Höhen OA, PB, QC durch N, die Winkel des Dreiecks durch α, β, γ, der Abstand des Punktes M von A, B, C durch r, der Abstand der Seiten OP, PQ, QO des Dreiecks OPQ von dem Punkt N durch ϱ (Planim. §. 6, 9). Dann ist

$$A_1M = r\cos\alpha, \quad B_1M = r\cos\beta, \quad C_1M = r\cos\gamma$$
$$NA = 2r\cos\alpha, \quad NB = 2r\cos\beta, \quad NC = 2r\cos\gamma$$
$$ON = 2r\cos\beta\cos\gamma, \quad PN = 2r\cos\gamma\cos\alpha, \quad QN = 2r\cos\alpha\cos\beta$$
$$QP = r\sin 2\alpha, \quad OQ = r\sin 2\beta, \quad PO = r\sin 2\gamma$$
$$OPQ : ABC = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \varrho : r^{***})$$

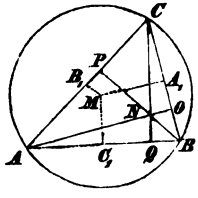
Beweis. Die positiven Richtungen der Geraden f, g, h, auf denen die Seiten BC, CA, AB liegen, werden so bestimmt, daß die

*) Strehlke Grun. Archiv 2 p. 326. Vergl. 4 p. 447, 34 p. 12 derselben Zeitschrift.

**) Diese Eigenschaft des einem Kreise eingeschriebenen Vierecks, dessen Perimeter sich selbst schneidet, ist von L'Huilier gefunden worden (de relatione mutua .. p. 23).

***) Feuerbach das geradlinige Dreieck 23 ff.

genannten Strecken positiv sind; die positiven Richtungen ihrer Normalen f', g', h' werden so bestimmt, daß die Winkel ff', gg', hh' je 90^0 betragen; die positiven Richtungen der Geraden k, l, auf denen die Strecken AM, BM liegen, werden so bestimmt, daß diese Strecken den Wert r haben. Dann ist $C_1M = AM\cos kh'$, $kh' = \frac{1}{2}kl = \gamma$, also $C_1M = r\cos\gamma$, u. s. f. Die Strecke NC hat mit C_1M einerlei Richtung und ist doppelt so groß (Planim. §. 12, 8). Ferner ist $ON = CN\cos h'f''$ $h'f' = hf = 180^0 - \beta$, folglich $ON = NC\cos\beta$, u. s. w.



Weil $PA = BA\cos gh = AB\cos\alpha$ und $AQ = AC\cos gh = CA\cos\alpha$, so ist $PAQ : CAB = PA.AQ : CA.AB = \cos^2\alpha$, u. s. w. Durch Subtraktion der Dreiecke PAQ, QBO, OCP von ABC behält man

$$OPQ : ABC = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \quad (11)$$

Weil B, C, P, Q auf einem Kreise liegen, so sind die Dreiecke APQ und ABC ähnlich, $QP : PA = BC : AB$, folglich

$$QP = BC\cos\alpha = 2r\sin\alpha\cos\alpha = r\sin 2\alpha$$

$$2PQN = \varrho r\sin 2\alpha, \ldots, \quad 2OPQ = \varrho r(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

Nun ist $2ABM = AB.C_1M = 2r^2\sin\gamma\cos\gamma = r^2\sin 2\gamma, \ldots$, also

$$2ABC = r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

$$OPQ : ABC = \varrho : r$$

Für das Produkt $QN.NC$ findet man den Wert

$$4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2r\varrho$$

in Übereinstimmung mit Planim. §. 14, 7, weil r der Diameter des Kreises OPQ ist (Planim. §. 12, 8).

14. Wenn die Punkte D und F gleiche Abstände d und f von den Seiten des Dreiecks ABC haben, und zwar D in dem Dreieck, F außen auf der Geraden, die den Winkel BAC halbiert, so ist bei der angenommenen Bezeichnung (13)

$$AD = 4r\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma, \qquad AF = 4r\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$d = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma, \qquad f = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$ND^2 = 2d^2 - 2r\varrho, \qquad NF^2 = 2f^2 - 2r\varrho^*)$$

Beweis. Die Geraden, von welchen AD und BD positive Strecken sind, werden durch x und y bezeichnet. Dann ist $AD : AB =$

*) Feuerbach a. a. O. 51 ff. Für NF^2 steht daselbst durch ein Versehn der Wert $2f^2 + 2r\varrho$.

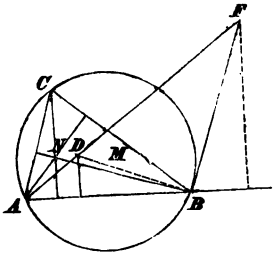
$\sin yh : \sin yx$ (5), $hx = \frac{1}{2}\alpha$, $hy = 180^0 - \frac{1}{2}\beta$, $xy = 180^0 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, folglich

$$AD = \frac{AB\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{2r\sin\gamma\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = 4r\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

Der Winkel FBA übertrifft den Winkel DBA um 90^0, also ist $AF : AB = \cos yh : \cos yx$, und

$$AF = \frac{AB\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{2r\sin\gamma\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = 4r\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

Nun ist $d : AD = f : AF = \cos h'x = \cos(hx - 90^0) = \sin\frac{1}{2}\alpha$, folglich u. s. w.



In dem Dreieck AND hat man nach (10)

$$ND^2 = NA^2 + AD^2 + 2NA\,.\,AD\cos xf'$$

Nun ist

$$xf' = xh + hf + ff' = 180^0 - \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

also erhält man

$$ND^2 = NA^2 + AD^2 - 2NA\,.\,AD\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$
$$= 4r^2\cos^2\alpha + 16r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma - 16r^2\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$
$$= 16r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma + 4r^2\cos^2\alpha$$
$$- 16r^2\cos\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma - 16r^2\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= 32r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma - 4r^2\cos\alpha(\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha)$$
$$= 2d^2 - 2r\varrho \quad (13)$$

Ebenso findet man

$$NF^2 = NA^2 + AF^2 - 2NA\,.\,AF\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$
$$= 4r^2\cos^2\alpha + 16r^2\cos^2\tfrac{1}{2}\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma - 16r^2\cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$
$$= 16r^2\cos^2\tfrac{1}{2}\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma + 4r^2\cos^2\alpha$$
$$- 16r^2\cos\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma - 16r^2\cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= 32r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma - 4r^2\cos\alpha(\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha)$$
$$= 2f^2 - 2r\varrho$$

Anmerkung. Wenn man auf der Geraden AB die Strecken $KA = CA$, $BL = BC$ macht, so hat das Dreieck KLC an der Seite $KL = 2s$ die Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{1}{2}\beta$, also ist

$$\frac{KL}{\sin KCL} = \frac{LC}{\sin LKC}, \quad \frac{2s}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{2a\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{4a\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\alpha}$$

$$\frac{s}{2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

15. Daß der Feuerbachsche Kreis OPQ von den Kreisen berührt wird, welche die Seiten des Dreiecks ABC berühren, von dem einge-

schriebenen Kreisen innen, von den drei andern außen*), ergiebt sich aus folgender Rechnung.

Das Centrum M_1 des Kreises OPQ ist die Mitte von MN (Planim. §. 12, 8), also hat man (Planim. §. 14, 18)

$$M_1D^2 = \tfrac{1}{2}MD^2 + \tfrac{1}{2}ND^2 - M_1N^2$$
$$M_1F^2 = \tfrac{1}{2}MF^2 + \tfrac{1}{2}NF^2 - M_1N^2$$

Ferner ist (Planim. §. 14, 4)

$$MD^2 = r^2 - 2rd, \qquad MF^2 = r^2 + 2rf$$

Der Radius des Kreises OPQ hat den Wert $\frac{1}{2}r$, und der Punkt N ist das Centrum des dem Dreieck OPQ eingeschriebenen Kreises, wenn die Winkel α, β, γ spitz sind, oder eines die Seiten des Dreiecks OPQ berührenden Kreises, wenn einer unter den Winkeln α, β, γ stumpf, mithin ϱ negativ ist. Also hat man in jedem Falle zufolge der für MD^2 gebrauchten Formel

$$M_1N^2 = \tfrac{1}{4}r^2 - r\varrho$$

Demnach ist

$$M_1D^2 = \tfrac{1}{2}r^2 - rd + d^2 - r\varrho - \tfrac{1}{4}r^2 + r\varrho = (\tfrac{1}{2}r - d)^2$$
$$M_1F^2 = \tfrac{1}{2}r^2 + rf + f^2 - r\varrho - \tfrac{1}{4}r^2 + r\varrho = (\tfrac{1}{2}r + f)^2$$

Da M_1D die Differenz der Radien der Kreise (M_1) und (D), M_1F die Summe der Radien der Kreise (M_1) und (F) ist, so wird der Kreis (M_1) von dem Kreise (D) innen, von dem Kreise (F) außen berührt (Planim. §. 3, 3), u. s. w.

Bezeichnet man durch G und H die Centren der beiden andern Kreise, welche die Seiten des Dreiecks ABC berühren, durch g und h ihre Radien, so hat man

$$M_1D = \tfrac{1}{2}r - d, \quad M_1F = \tfrac{1}{2}r + f, \quad M_1G = \tfrac{1}{2}r + g, \quad M_1H = \tfrac{1}{2}r + h$$
$$M_1D + M_1F + M_1G + M_1H = 2r + f + g + h - d = 6r$$

Vergl. die Anmerkung zu Planim. §. 14, 4.

§. 5. Sphärische Trigonometrie.

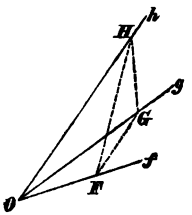
1. Bei der trigonometrischen Behandlung von sphärischen Figuren wird gewöhnlich vorausgesetzt, daß der Radius der Kugel, auf der sie liegen, eine Längeneinheit ist. Demgemäß werden die Bogen von Hauptkreisen für ihre Centriwinkel gesetzt (§. 3, 10).

*) S. Planim. §. 12, 8.

Wenn die Seiten AB, BC eines sphärischen Dreiecks normal zu einander stehn, so ist*)

$$\cos AB \cos BC = \cos CA$$

Beweis. Durch den Punkt O gehn die Geraden f, g, h, so daß die Ebenen fg und gh normal zu einander stehn. Ist G die Normalprojektion des Punktes H der Geraden h auf die Gerade g, und F die Normalprojektion von G auf die Gerade f, so ist GH eine Normale der Ebene OFG und OF eine Normale der Ebene FGH (Stereom. §. 2, 3), folglich F die Normalprojektion von H auf die Gerade f. Nach §. 4, 2 hat man



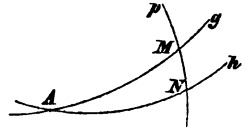
$OF = OG \cos fg$, $OG = OH \cos gh$, $OF = OH \cos hf$

folglich $\cos fg \cos gh = \cos hf$. Wenn nun die Kugel, deren Centrum O und deren Radius eine Längeneinheit ist, die positiven Richtungen der Geraden f, g, h in A, B, C schneidet, so ist der Bogen AB dem Winkel fg gleich, u. s. w.

2. Wenn AM, AN, NM Bogen der Hauptkreise g, h, p sind, und A ein Pol von p ist, so hat man

$$\sin MN : \sin NA : \sin AM = \sin hg : \sin gp : \sin ph$$

Beweis. Bestimmt man zunächst die positiven Sinne der Hauptkreise g, h, p so, daß $AM = 90^0$, $AN = 90^0$, und A der linke Pol von p ist, und beschreibt man die positiven Winkel durch linksum gehende Drehungen, so ist der Bogen MN dem Winkel gh gleich (Stereom. §. 4, 7), $gp = 90^0$, $hp = 90^0$, folglich



$$\begin{aligned} \sin MN : \sin NA : \sin AM &= \sin gh : -1 : 1 \\ &= \sin hg : 1 : -1 \\ &= \sin hg : \sin gp : \sin ph \end{aligned}$$

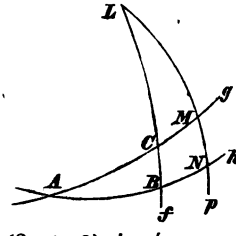
*) Die ersten Sätze der sphärischen Trigonometrie sind im 3ten Buch der Sphärik von Menelaus und im ersten Buch des Almagest von Ptolemäus enthalten. Weiter ausgebildet wurde diese Disciplin für den Gebrauch in der Astronomie von den Arabern, im 15ten Jahrhundert von Regiomontan u. a. Die Ableitung der gesamten sphärischen Trigonometrie aus einfachen Sätzen hat Euler unternommen, Mém. de Berlin 1753 p. 234 und Acta Petrop. 1779, I p. 72. Auf einen einzigen Satz wurde die sphärische Trigonometrie durch Lagrange (J. de l'Ecole polyt. Cah. 6 p. 270) zurückgeführt, dessen Abhandlung durch Gauß eine wesentliche Ergänzung erhalten hat in den Zusätzen zu Schumachers Übersetzung von Carnot's géom. de pos. II p. 373. Die frühere Beschränkung der sphärischen Trigonometrie auf Dreiecke, deren Seiten und Winkel 180^0 nicht übersteigen, ist von Möbius aufgehoben worden (Analyt. Sphärik 15 ff. Leipziger Berichte 1860 p. 51), dessen Darstellung hier im wesentlichen wiedergegeben wird.

Werden die positiven Winkel durch rechtsum gehende Drehungen beschrieben, so erhalten $\sin hg$, $\sin gp$, $\sin ph$ die entgegengesetzt gleichen Werte (§. 4, 3), aber die Verhältnisse $\sin hg : \sin gp : \sin ph$ bleiben unverändert. Wird der positive Sinn von p so bestimmt, daß A der rechte Pol von p ist, so wechselt der Bogen MN das Zeichen, und die Winkel hp, pg ändern sich um je 180^0; dadurch wird die obige Proportion ebenfalls nicht verändert. Wird einer der beiden andern Hauptkreise z. B. g in dem entgegengesetzten Sinne genommen, so wechseln $\sin AM$, $\sin hg$, $\sin gp$ das Zeichen, ohne daß die obige Proportion ihre Giltigkeit verliert.

3. Wenn BC, CA, AB Bogen der Hauptkreise f, g, h sind, und h zu f normal steht, so ist

$$\sin gh = \frac{\sin BC}{\sin CA}\sin hf, \quad \sin fg = \frac{\sin AB}{\sin CA}\sin hf$$

Beweis. Ist A ein Pol des Hauptkreises p, von dem f, g, h in L, M, N geschnitten werden, so ist L ein Pol des Hauptkreises h, weil p und f normal zu h stehn. Zugleich ist p normal zu g, folglich in dem Dreieck CML (1)



$$\cos CM \cos ML = \cos LC$$

Weil $CM = CA + AM$ und AM entweder einen oder drei Quadranten beträgt, so hat $\cos CM$ (§. 4, 3) in dem ersten Falle den Wert $-\sin CA$, in dem zweiten Falle den Wert $+\sin CA$, also in jedem Falle den Wert $-\sin CA \sin AM$. U. s. w. Also ist

$$\sin CA \sin AM \sin MN \sin NL = -\sin BC \sin LB$$

Nun ist aber in den Dreiecken MNA, BNL (2)

$$\sin AM : \sin MN = \sin ph : \sin hg$$
$$\sin NL : \sin LB = \sin fh : \sin hp$$

Daher findet man durch Multiplikation

$$\sin CA \sin^2 AM \sin^2 NL = \sin BC \sin^2 LB \frac{\sin fh}{\sin hg}$$

weil $\sin ph = -\sin hp$. Nun ist $\sin^2 AM = 1$, u. s. w., also

$$\sin CA = \sin BC \frac{\sin hf}{\sin gh}$$

gleichbedeutend mit der ersten der behaupteten Gleichungen. Die andere Gleichung ist auf dieselbe Weise gebildet.

Zusatz. In den Dreiecken MNC und BNC ist (1)

$$\cos MN \cos MC = \cos CN = \cos NB \cos BC$$

Unter der Voraussetzung, daß die Bogen AM und AN je 90^0 betragen, ist der Bogen MN dem Winkel gh entweder gleich oder entgegengesetzt gleich, also $\cos MN = \cos gh$; ferner

$$\cos MC = \cos(CA + AM) = -\sin CA$$
$$\cos NB = \cos(AN - AB) = \sin AB$$

daher ist

$$-\cos gh \sin CA = \sin AB \cos BC$$

4. Bei der angenommenen Bezeichnung hat man

$$-\cos gh = \frac{\operatorname{tang} AB}{\operatorname{tang} CA}$$

$$-\operatorname{tang} gh = \frac{\operatorname{tang} BC}{\sin AB} \sin hf$$

$$\cos BC = -\frac{\cos gh}{\sin fg} \sin hf, \qquad \cos AB = -\frac{\cos fg}{\sin gh} \sin hf$$

$$\cos CA = \cot fg \cot gh$$

Beweis. Nach (3, Zus.) ist

$$-\cos gh = \frac{\sin AB}{\sin CA} \cos BC = \frac{\sin AB \cos CA}{\sin CA \cos AB} \text{ (1) u. s. w.}$$

Aus den Gleichungen (3)

$$\sin gh \sin CA = \sin BC \sin hf$$
$$-\cos gh \sin CA = \sin AB \cos BC$$

folgt durch Division der Wert von $-\operatorname{tang} gh$.

Aus den Gleichungen (3)

$$\cos BC \sin AB = -\cos gh \sin CA$$
$$\sin AB \sin hf = \sin fg \sin CA$$

folgt durch Division der Wert von $\cos BC$. Auf dieselbe Art ist der Wert von $\cos AB$ gebildet.

Aus den Gleichungen

$$\cos BC = -\frac{\cos gh}{\sin fg} \sin hf, \quad \cos AB = -\frac{\cos fg}{\sin gh} \sin hf$$

folgt durch Multiplikation (1)

$$\cos CA = \cot fg \cot gh \sin^2 hf$$

worin $\sin^2 hf = 1$ ist.

Anmerkung. Wenn BC, CA, AB positive Bogen der Hauptkreise f, g, h sind und die Werte a, b, c haben, so werden die durch

α, β, γ bezeichneten Winkel BAC, CBA, ACB des sphärischen Dreiecks ABC von den Winkeln gh, hf, fg zu 180^0 ergänzt. Für das rechtwinkelige sphärische Dreieck, dessen Winkel $\beta = 90^0$ ist, gilt demnach das System von Gleichungen:*)

$$\cos b = \cos a \cos c$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin b}, \quad \sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\tang c}{\tang b}, \quad \cos\gamma = \frac{\tang a}{\tang b}$$

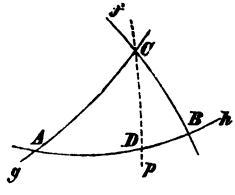
$$\tang\alpha = \frac{\tang a}{\sin c}, \quad \tang\gamma = \frac{\tang c}{\sin a}$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \quad \cos c = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\cos b = \cot\alpha \cot\gamma$$

5. In jedem sphärischen Dreieck ABC, dessen Seiten BC, CA, AB Bogen der Hauptkreise f, g, h sind, hat man**)

$$\sin BC : \sin CA : \sin AB = \sin gh : \sin hf : \sin fg$$



Beweis. Zieht man durch C normal zu h den Hauptkreis p, welcher von h in D geschnitten wird, so ist in den Dreiecken ADC und CDB (3)

$$\sin gh = \frac{\sin DC}{\sin CA}\sin hp, \quad \sin hf = \frac{\sin CD}{\sin BC}\sin ph$$

folglich durch Division

$$\frac{\sin gh}{\sin hf} = \frac{\sin BC}{\sin CA}$$

weil $\sin CD = -\sin DC$ und $\sin ph = -\sin hp$. U. s. w.

6. In dem sphärischen Dreieck ABC ist***)

$$\cos BC = \cos CA \cos AB - \sin CA \sin AB \cos gh$$

Beweis. In dem Dreieck BCD hat man (1)

$$\cos BC = \cos CD \cos DB$$

---

*) Euler Mém. de Berlin 1753 p. 233.

**) Dieser Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie steht anders ausgedrückt in Menelaus Sphaerica III, 2. Seinen ganzen Umfang hat er durch Möbius erhalten. Vergl. (1).

***) Aus dieser von Euler Mém. de Berlin 1753 p. 242 zusammengestellten Gleichung, von der ein einfacher Beweis unten §. 6, 1 gegeben wird, können die übrigen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie durch Elimination abgeleitet werden, wie Lagrange 1799 J. de l'École polyt. Cah. 6 p. 280 gezeigt hat, einfacher Gauß 1810 Zusätze zu Carnot géom. de pos. in Schumachers Übersetzung II p. 373.

Weil $DB = DA + AB$, so ist (§. 4, 7)

$$\cos BC = \cos CD \cos DA \cos AB - \cos CD \sin DA \sin AB$$

Nun ist

$$\cos CD \cos DA = \cos CA \quad (1)$$
$$\sin AD \cos DC = -\cos gh \sin CA \quad (3, \text{Zus.})$$
$$\cos CD = \cos DC, \sin DA = -\sin AD, \text{ folglich u. s. w.}$$

7. In dem sphärischen Dreieck ABC ist*)

$$-\operatorname{tang} hf = \frac{\operatorname{tang} CA \sin gh}{\sin AB + \operatorname{tang} CA \cos AB \cos gh}$$

Beweis. In dem Dreieck BCD hat man (4)

$$-\operatorname{tang} fh = \frac{\operatorname{tang} DC}{\sin BD} \sin hp = \frac{\sin DC \sin hp}{\cos DC \sin(BA + AD)}$$

Nun ist

$$\sin DC \sin hp = \sin CA \sin gh \quad (5)$$
$$\cos DC \sin BA \cos AD = -\sin AB \cos CA \quad (1)$$
$$\cos DC \cos BA \sin AD = -\sin CA \cos AB \cos gh \quad (6)$$

$\operatorname{tang} fh = -\operatorname{tang} hf$, folglich

$$-\operatorname{tang} hf = \frac{\sin CA \sin gh}{\sin AB \cos CA + \sin CA \cos AB \cos gh}$$

Dividiert man den Zähler und den Nenner durch $\cos CA$, so erhält man die zu beweisende Gleichung.

8. Bei gewöhnlicher Bezeichnung der Elemente des sphärischen Dreiecks ABC (4, Anm.) hat man demnach

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} b \sin \alpha}{\sin c - \operatorname{tang} b \cos c \cos \alpha}$$

Bezeichnet man in dem zu ABC gehörigen Polardreieck $A'B'C'$ auf gleiche Weise die Seiten durch a', b', c', und die gegenüberliegenden Winkel durch α', β', γ', so ist (Stereom. §. 4, 8)

$$a' + a = 180^0, \quad \beta' + b = 180^0, \quad \gamma' + c = 180^0$$
$$\alpha' + \alpha = 180^0, \quad b' + \beta = 180^0, \quad c' + \gamma = 180^0$$

Aus den Werten von $\cos a'$ und $\operatorname{tang} \beta'$ findet man sofort

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$
$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} \beta \sin a}{\sin \gamma + \operatorname{tang} \beta \cos \gamma \cos a}$$

*) Euler a. a. O. p. 251.

9. Zur Berechnung eines Winkels aus den 3 Seiten dient die Gleichung (8)

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

welche sich wie folgt gestalten läßt. Nach §. 4, 7 ff. ist

$$1 - \cos\alpha = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}$$ *)

wenn man $a+b+c = 2s$ setzt. Vergl. §. 4, 10.

Setzt man ferner $\alpha+\beta+\gamma = 2\sigma$ und in Bezug auf das Polardreieck $a'+b'+c' = 2s'$, so ist $2s'+2\sigma = 3 \cdot 180^0$,

$$s'+\sigma = 270^0, \quad s'-a'+\sigma-\alpha = 90^0$$

Demnach findet man aus den Werten von $\sin^2\frac{1}{2}\alpha'$, $\cos^2\frac{1}{2}\alpha'$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a = \frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\cot^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}$$

Bei einem gemeinen sphärischen Dreieck liegt σ zwischen 90^0 und 270^0 (Stereom. §. 4, 10), also ist $-\cos\sigma$ positiv.

Die Formeln für $\tan^2\frac{1}{2}\alpha$ und $\cot^2\frac{1}{2}\alpha$ eignen sich besonders zur numerischen Berechnung eines Winkels aus den 3 Seiten und einer Seite aus den 3 Winkeln.

10. Wenn in dem sphärischen Dreieck ABC die Seiten und die Winkel je 180^0 nicht übersteigen, so ist**)

*) Euler a. a. O.

**) Diese Gleichungen heißen die Gaußschen Gleichungen, erfunden und in die praktische Trigonometrie eingeführt von Gauß theoria motus 54. Gleichzeitig sind dieselben Gleichungen auch von Delambre Connaiss. des temps 1808 p. 445 und von Mollweide (v. Zach monatl. Korresp. 1808 Nov. Bd. 18 p. 394) mitgeteilt worden. Vergl. §. 3, 7. Konstruktiv hat dieselben Gudermann niedere Sphärik 144 ff. abgeleitet, einfacher in der hier mitgeteilten Art Essen Grunert Archiv 27 p. 38.

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\\
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma\\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\\
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma
\end{aligned}$$

Beweis. Indem man $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ nach §. 4, 7 aus den in (9) entwickelten Werten von $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\beta$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\beta$ zusammensetzt, findet man durch bekannte Reduktionen für ein beliebiges sphärisches Dreieck

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma}$$

In dem gemeinen sphärischen Dreieck ist $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ positiv, wenn $\alpha > \beta$, also gilt die positive Wurzel. U. s. w.

Vollständige Bestimmtheit erreicht man durch die folgende Ableitung.*) Nach (8) hat man

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin c &= \sin a\sin\gamma\\
\sin\beta\sin c &= \sin b\sin\gamma
\end{aligned}$$

demnach verbunden

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad (\sin\alpha-\sin\beta)\sin c &= (\sin a-\sin b)\sin\gamma\\
\text{II.}\quad (\sin\alpha+\sin\beta)\sin c &= (\sin a+\sin b)\sin\gamma
\end{aligned}$$

Ferner geben die in (8) enthaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sin b\sin c\cos\alpha &= \cos a-\cos b\cos c\\
\sin a\sin b\cos\gamma &= \cos c-\cos a\cos b
\end{aligned}$$

verbunden

$$\sin b\sin c\cos\alpha+\sin a\sin b\cos b\cos\gamma = \cos a-\cos a\cos^2 b$$

oder einfacher

$$\sin c\cos\alpha+\sin a\cos b\cos\gamma = \cos a\sin b$$

Vertauscht man gegenseitig a mit b, α mit β, so erhält man auch

$$\sin c\cos\beta+\sin b\cos a\cos\gamma = \cos b\sin a$$

und durch Addition

$$\text{III.}\quad (\cos\alpha+\cos\beta)\sin c = \sin(a+b).(1-\cos\gamma)$$

Die zugeordnete Gleichung

$$\text{IV.}\quad \sin(\alpha+\beta).(1+\cos c) = (\cos a+\cos b)\sin\gamma$$

---

*) Aus den Gleichungen I—III hatte Legendre Trigon. 83 nur die den Gaußschen Gleichungen untergeordneten Neperschen Analogien abgeleitet. Die Ausnutzung der Gleichungen I—IV ist von Gauß in seinen Vorlesungen gezeigt worden, wie Wittstein Stereom. 213 angiebt.

kann ohne weiteres aus der Betrachtung des Polardreiecks abgeleitet werden.

Wenn man in den Gleichungen I—IV nach §. 4, 8 die halben Winkel und Seiten eingeführt, und wenn man dabei die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= l, & \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma &= \lambda \\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= m, & \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma &= \mu \\ \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= r, & \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \varrho \\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= s, & \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sigma \end{aligned}$$

gebraucht, so findet man

$$\begin{aligned} ls &= \lambda\sigma \\ mr &= \mu\varrho \\ ms &= \varrho\sigma \\ rs &= \mu\sigma \end{aligned}$$

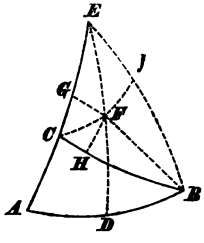
Aus den beiden letzten Gleichungen folgt mit Rücksicht auf die zweite

$$s^2 = \sigma^2$$

Also hat man

1) $s = \sigma$, und dazu $l = \lambda$, $m = \varrho$, $r = \mu$
2) $s = -\sigma$, und dazu $l = -\lambda$, $m = -\varrho$, $r = -\mu$

was zu beweisen war.



Die halbe Differenz von zwei Seiten a und b und von den gegenüberliegenden Winkeln α und β des Dreiecks ABC wird durch folgende Konstruktion erhalten. Der Hauptkreis, welcher AB in D normal halbiert, schneidet CA in E so, daß $BE = EA$ und DE den Winkel AEB halbiert. Der den Winkel BCE halbierende Hauptkreis schneidet den Bogen DE in F so, daß F das Centrum des dem Dreieck BCE eingeschriebenen Kreises ist. Sind nun FG, FH, FJ normal zu EC, CB, BE, so hat man

$$\begin{aligned} CG + EJ + BH &= \tfrac{1}{2}(CE + EB + BC) \\ EJ + BH &= EB \\ CG &= \tfrac{1}{2}(BC - CA) \end{aligned}$$

Zugleich ist der Winkel $FCG = 90^0 - \frac{1}{2}ACB$

$$FBD = \tfrac{1}{2}(BAC - CBA) + CBA = \tfrac{1}{2}(BAC + CBA)$$
$$GFC + HFB + JFE = 180^0, \quad HFB + JFE = BFE$$

folglich $GFC = DFB$, wenn AB zwei Quadranten nicht übersteigt In den rechtwinkeligen Dreiecken GFC und DFB hat man (4, Anm.)

$$\sin GFC = \frac{\sin CG}{\sin FC}, \quad \cos CG = \frac{\cos GFC}{\sin FCG}$$
$$\sin DFB = \frac{\sin DB}{\sin BF}, \quad \cos DB = \frac{\cos DFB}{\sin FBD}$$

folglich

$$\frac{\sin CG}{\sin DB} = \frac{\sin FC}{\sin BF} = \frac{\sin FBC}{\sin BCF} \quad (5), \quad \frac{\cos CG}{\cos DB} = \frac{\sin FBD}{\sin FCG}$$

Hierin sind die erste und dritte der zu beweisenden Gleichungen enthalten.

Ist B_1 der Gegenpunkt von B, so gelten in Bezug auf das Nebendreieck AB_1C die Gleichungen

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c' = \sin\tfrac{1}{2}(a'-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma'$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c' = \cos\tfrac{1}{2}(a'-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma'$$

Nun ist $\alpha'+\alpha = 180^0$, $\gamma'+\gamma = 180^0$, $a'+a = 180^0$, $c'+c = 180^0$, folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta) = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta) = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(a'-b) = \cos\tfrac{1}{2}(a+b), \quad \cos\tfrac{1}{2}(a'+b) = \sin\tfrac{1}{2}(a+b)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}c' = \cos\tfrac{1}{2}c, \quad \cos\tfrac{1}{2}c' = \sin\tfrac{1}{2}c, \quad \cos\tfrac{1}{2}\gamma' = \sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

Durch diese Substitutionen ergeben sich die vierte und zweite der zu beweisenden Gleichungen.

Anmerkung. Wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel z. B. a, b, γ gegeben sind, so berechnet man am einfachsten zuerst die Werte von $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c$ und $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c$, dann durch Division den Wert von $\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; ferner die Werte von $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c$ und $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c$, und aus diesen den Wert von $\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Aus $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ findet man α und β; durch $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ oder $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und durch $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ oder $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ergiebt sich endlich jedesmal auf doppelte Art der Wert von $\frac{1}{2}c$.

Ganz analog rechnet man, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind. Wenn aber zwei Seiten und der Winkel, welcher einer derselben gegenüber liegt, z. B. a, b, α gegeben sind, so berechnet man zuerst den Winkel β (5), dann mit Hilfe der obigen Gleichungen $\tang\frac{1}{2}\gamma$ und $\tang\frac{1}{2}c$. Das analoge Verfahren führt zum Ziele, wenn zwei Winkel und die Seite gegeben sind, die dem einen derselben gegenüber liegt.

Die aus den Gaußschen Gleichungen folgenden Werte von

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta), \quad \tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \quad \tang\tfrac{1}{2}(a-b), \quad \tang\tfrac{1}{2}(a+b)$$

sind seit längerer Zeit in Gebrauch. Sie wurden von Neper, dem Erfinder der natürlichen Logarithmen, angegeben (Mirifici logarithmorum

canonis descriptio 1614. II, 6) und in Proportionen ausgesprochen, welche die Neperschen Analogien heißen.

11. Bestimmt man die positiven Sinne der Höhen eines sphärischen Dreiecks so, daß jede Höhe mit der Seite, zu der sie normal steht, einen Winkel von 90^0 bildet, so sind die Produkte des Sinus jeder Seite mit dem Sinus der zugehörigen Höhe von derselben Größe, die durch d bezeichnet wird, und die Produkte des Sinus jedes Winkels mit dem Sinus der zugehörigen Höhe sind von derselben Größe, die durch δ bezeichnet wird.*) Denn man hat (5)

$$\sin DC \sin hp = \sin CA \sin gh = \sin BC \sin hf$$

und $\sin hp = 1$, folglich bei gewöhnlicher Bezeichnung

$$\sin c \sin DC = \sin b \sin c \sin\alpha = \sin c \sin a \sin\beta = \sin a \sin b \sin\gamma = d$$
$$\sin\gamma \sin DC = \sin\beta \sin\gamma \sin a = \sin\gamma \sin\alpha \sin b = \sin\alpha \sin\beta \sin c = \delta$$

Hieraus findet man sofort

$$\frac{\sin a \sin b \sin c}{d} = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \frac{d}{\delta}$$ **)

$$\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\delta} = \frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c} = \frac{\delta}{d}$$

$$\delta = \frac{d^2}{\sin a \sin b \sin c} \qquad d = \frac{\delta^2}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}$$

Zufolge der Werte

$$d = \sin b \sin c \sin\alpha$$
$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos\alpha \quad (8)$$

ergiebt sich

$$d^2 = \sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2$$
$$= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

Nun ist $d^2 = 4 \sin b \sin c \sin^2\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin b \sin c \cos^2\frac{1}{2}\alpha$ (§. 4, 7), folglich (9)

$$d^2 = 4 \sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)$$

Wenn d' dieselbe Bedeutung für das Polardreieck $A'B'C'$ hat, wie d für das Dreieck ABC, so ist (8)

$$d' = \sin b' \sin c' \sin\alpha' = \sin\beta \sin\gamma \sin a = \delta$$

folglich hat man auch

---

*) Vergl. Lexell Acta Petrop. 1782, I p. 71. Gudermann niedere Sphärik 124.

**) Vergl. Lagrange J. de l'École polyt. Cah. 6 p. 272, Français in demselben Journal Cah. 14 p. 190, Gudermann niedere Sphärik 142. Die Werte von d^2 hat Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158 gegeben, die Werte von δ^2 findet man in der Lexellschen Abhandlung.

$$\delta^2 = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= -4\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)$$

12. Wenn man durch r und ϱ die einen Quadranten nicht übersteigenden sphärischen Radien der Kreise bezeichnet, welche einem sphärischen Dreieck, dessen Seiten a, b, c und dessen Winkel α, β, γ je 180^0 nicht übersteigen, der eine umgeschrieben, der andere eingeschrieben sind, so hat man*)

$$\cot r = \frac{d}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}, \quad \operatorname{tang}\varrho = \frac{\delta}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

bei der in (11) angenommenen Bezeichnung.

Beweis. Bezeichnet man den Gegenpunkt von C durch C_1, das sphärische Centrum des Kreises ABC_1 durch O, die Mitten von AC_1, C_1B, BA, CA, BC durch P, Q, R, D, E, so sind DP und QE Quadranten, PO, QO, RO normal zu AC_1, C_1B, BA, folglich D und E Pole von PO und OQ, also DE Polare von O. Ist HC eine Höhe des Dreiecks CDE, wird DE von OA und OB in F und G geschnitten, so sind die rechtwinkeligen Dreiecke DHC und DFA, EHC und EGB gleich und ähnlich, D und E die Mitten von FH und HG, folglich

$$HC = AF = 90^0 - OA$$
$$DE = \tfrac{1}{2}FG = \tfrac{1}{2}FOG = AOR$$

Nun ist in den Dreiecken CDE und ORA

$$\sin DE\sin HC = \sin EC\sin CD\sin DCE \quad (11)$$
$$\sin AOR\sin OA = \sin RA \quad (4, \text{Anm.}).$$

Bezeichnet man die Seiten C_1B, BA, AC_1 durch a, c, b und den Winkel $DCE = BC_1A$ durch γ, so erhält man demnach

$$\sin AOR\cos r = \cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\sin\gamma$$
$$\sin AOR\sin r = \sin\tfrac{1}{2}c$$

folglich

$$\cot r = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\gamma}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{d}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$$

indem man $4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b\sin\gamma$ durch d ersetzt.

Ebenso hat man in dem zugehörigen Polardreieck

$$\cot r' = \frac{d}{4\sin\frac{1}{2}a'\sin\frac{1}{2}b'\sin\frac{1}{2}c'}$$

*) Lexell a. a. O. p. 72 ff. Vergl. Gudermann 131 und 137.

Nun ist r' das Komplement von ϱ (Stereom. §. 4, 12), $d' = \delta$, $\sin\frac{1}{2}a' = \cos\frac{1}{2}\alpha$, u. s. w. (11), folglich

$$\operatorname{tang}\varrho = \frac{\delta}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

Für die Radien der Kreise, welche den Nebendreiecken umgeschrieben und eingeschrieben sind, findet man ähnliche Gleichungen, indem man den Zusammenhang der Seiten und Winkel der Nebendreiecke mit den Seiten und Winkeln des Dreiecks beachtet. Daraus folgen dann die Beziehungen unter den Radien dieser Kreise.

13. Die Funktionen von $2\sigma = \alpha+\beta+\gamma$ haben besondere Bearbeitung erfahren, weil durch diese Summe die Fläche des sphärischen Dreiecks bestimmt ist, dessen Winkel α, β, γ sind (Stereom. §. 4, 5). Bei der angenommenen Bezeichnung ergiebt sich zunächst*)

$$-\cos\sigma = \frac{d}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \tfrac{1}{2}\delta\operatorname{tang}r$$

Beweis. Bezeichnet man in dem Dreieck ABC der vorigen Figur die Seiten und Winkel durch a, b, c, α, β, γ, so ist

$$2OAB+2OBC_1+2OC_1A = 180^0-\alpha+180^0-\beta+\gamma$$
$$2OBC_1+2OC_1A = 2\gamma$$
$$OAB = 180^0-\sigma$$

Nun ist in dem Dreieck OAR (4, Anm.)

$$\cos OAR = \frac{\operatorname{tang}AR}{\operatorname{tang}OA}$$

Nimmt man hinzu (12)

$$\cot OA = \frac{\sin BC_1\sin C_1A\sin BC_1A}{4\sin\frac{1}{2}BC_1\sin\frac{1}{2}C_1A\sin AR} = \frac{d}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$$

so erhält man

$$-\cos\sigma = \frac{d}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

Nach (11) ist

$$-\cos\sigma\cot r = \frac{d^2}{2\sin a\sin b\sin c} = \tfrac{1}{2}\delta$$

14. Bemerkenswerte Ausdrücke ergeben sich für $\sin\sigma$, $-\cot\sigma$ und $-\operatorname{tang}\sigma$, nämlich**)

---

*) Lexell a. a. O. p. 68.

**) Die erste Gleichung hängt mit der letzten zusammen, die von Lagrange a. a. O. p. 278 und Legendre Géom. Note 10 gegeben worden ist. Die andern rühren von Euler her (Acta Petrop. 1778, II p. 31. Nova Acta 10 p. 47).

$$\sin\sigma = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$-\cot\sigma = \frac{d}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$$

$$-\operatorname{tang}\sigma = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b+\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

Beweis. In den Dreiecken OAR und CDE ist

$$\cos AR\sin OAR = \cos ROA \text{ (4, Anm.)}$$

$$\cos ROA = \cos DE = \cos EC\cos CD + \sin EC\sin CD\cos DCE \text{ (6)}$$

daher durch Einführung der bekannten Werte (13)

$$\sin\sigma = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}$$

Der Zähler dieses Bruchs mit $4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$ multipliciert, lautet

$$4\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b+\sin a\sin b\cos\gamma$$
$$= (1+\cos a)(1+\cos b)+\cos c-\cos a\cos b$$
$$= 1+\cos a+\cos b+\cos c$$
$$= 1+\cos a+1+\cos b+1+\cos c-2$$
$$= 2\cos^2\tfrac{1}{2}a+2\cos^2\tfrac{1}{2}b+2\cos^2\tfrac{1}{2}c-2$$

Durch diese Ausdrücke erhält man sofort den zweiten und den dritten Wert von $\sin\sigma$.

Der zweite Ausdruck von $\sin\sigma$ kann auch aus dem Wert von $-\cos\sigma$ (13) abgeleitet werden. Denn es ist

$$\sin^2\sigma = 1-\cos^2\sigma = \frac{(4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)^2-d^2}{(4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)^2}$$

$$(4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)^2 = 2(1+\cos a)(1+\cos b)(1+\cos c)$$

$$d^2 = 1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c$$

folglich hat der Zähler den Wert $(1+\cos a+\cos b+\cos c)^2$. U. s. w.

Der dritte Ausdruck von $\sin\sigma$ kann auch direkt entwickelt werden, indem man zur Berechnung von $\cos ROA$ das von den Sehnen f, g, h der Bogen BC_1, C_1A, AB gebildete plane Dreieck benutzt.*) Bezeichnet man die Normalprojektion des Centrums O auf die Ebene ABC_1 durch O', so ist der Winkel $BO'A$ ein Normalschnitt des

*) Gudermann 152. Vergl. Schulz Sphärik II, 79.

Flächenwinkels, welchen die Ebenen der Hauptkreise OB und OA bilden. Nun ist der Centriwinkel $BO'A$ doppelt so groß als der von den Sehnen f und g gebildete Peripheriewinkel, folglich ist der letztere dem Winkel ROA gleich. Also hat man (§. 4, 10)

$$\cos ROA = \frac{f^2+g^2-h^2}{2fg}$$

$$f = 2\sin\tfrac{1}{2}BC_1 = 2\cos\tfrac{1}{2}a, \quad g = 2\sin\tfrac{1}{2}C_1A = 2\cos\tfrac{1}{2}b, \quad h = 2\sin\tfrac{1}{2}c$$

$$\cos AR\sin OAR = \cos ROA = \frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b-\sin^2\tfrac{1}{2}c}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b}$$

Um ferner den Wert von $-\cot\sigma$ zu finden, dividiert man $-\cos\sigma$ (13) durch den zweiten Ausdruck von $\sin\sigma$.

Endlich den Wert von $-\tang\sigma$ erhält man, indem man den ersten Ausdruck von $\sin\sigma$ durch

$$-\cos\sigma = \frac{\sin a\sin b\sin\gamma}{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\gamma}{\cos\tfrac{1}{2}c}$$

dividiert.

Anmerkung. Aus dem Wert von $-\tang\sigma$ schließt man: Wenn in einem sphärischen Dreieck ein Winkel und das Produkt der Cotangenten (oder der Tangenten) der halben Seiten, welche den Winkel einschließen, unverändert bleiben, so bleibt die Summe der beiden andern Winkel, also auch die Fläche des Dreiecks unverändert. Und wenn in einem sphärischen Dreieck eine Seite und das Produkt der Tangenten der halben Winkel, die an der Seite liegen, unverändert bleiben, so bleibt der Perimeter des Dreiecks unverändert.

15. Aus den gefundenen Funktionen von σ ergiebt sich noch, wenn $a+b+c = 2s$ gesetzt wird*),

$$\tang^2\tfrac{1}{2}(\sigma-90^0) = \tang\tfrac{1}{2}s\,\tang\tfrac{1}{2}(s-a)\,\tang\tfrac{1}{2}(s-b)\,\tang\tfrac{1}{2}(s-c)$$

Beweis. Zufolge des dritten Ausdrucks von $\sin\sigma$ (14) ist

$$1-\sin\sigma = \frac{1-\cos^2\tfrac{1}{2}a-\cos^2\tfrac{1}{2}b-\cos^2\tfrac{1}{2}c+2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$

Der Zähler dieses Bruches hat nach (11) den Wert

$$4\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-c)$$

Ferner ist (13)

$$-\cos\sigma = \frac{\tfrac{1}{2}d}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$

*) L'Huilier nach Legendre's Mitteilung (Géom. Note 10). Diese Formel ist ein besondrer Fall der Formel, welche Lexell a. a. O. p. 88 für die Summe der Winkel eines dem Kreise eingeschriebenen sphärischen Vierecks entwickelt hatte.

folglich

$$\frac{1-\sin\sigma}{-\cos\sigma} = \frac{4\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}$$

Nun ist

$$1-\sin\sigma = 1-\cos(\sigma-90^0) = 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\sigma-90^0)$$
$$-\cos\sigma = \sin(\sigma-90^0) = 2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-90^0)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-90^0)$$
$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}s}{\sin s} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}s}{2\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}s} = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}s \text{ u. s. w.}$$

Durch diese Substitution findet man den obigen Wert von

$$\tan^2\tfrac{1}{2}(\sigma-90^0)$$

Anmerkung. Den entwickelten Formeln stehn diejenigen zur Seite, durch welche man den Perimeter eines sphärischen Dreiecks aus den 3 Winkeln oder aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln berechnet. Ähnliche Formeln giebt es aber auch für $\sigma-\alpha$, $\sigma-\beta$, $\sigma-\gamma$ einerseits, und für $s-a$, $s-b$, $s-c$ andrerseits. S. Lexell a. a. O., Schulz II, 34 ff., Gudermann 132 ff.

16. Wenn durch einen gegebenen Punkt S der Kugel Hauptkreise gezogen werden, die einen gegebenen Kreis der Kugel in A und A', B und B', .. schneiden, so sind die Produkte

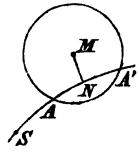
$$\tan\tfrac{1}{2}SA\tan\tfrac{1}{2}SA', \quad \tan\tfrac{1}{2}SB\tan\tfrac{1}{2}SB', \ldots$$

von derselben Größe, welche die sphärische Potenz des Punktes S in Bezug auf den Kreis heißt. Wenn auf einem Hauptkreis s Punkte liegen, aus denen an einen gegebenen Kreis der Kugel die sphärischen Tangenten a und a', b und b', .. gehen, so sind die Quotienten

$$\frac{\tan\frac{1}{2}sa}{\tan\frac{1}{2}sa'}, \quad \frac{\tan\frac{1}{2}sb}{\tan\frac{1}{2}sb'}, \ldots$$

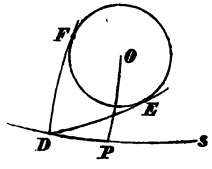
von derselben Größe*)

Beweis. Zieht man aus dem Centrum M den Hauptkreis MN normal zu SA, so ist in den Dreiecken SMN und AMN (1)



$$\cos MN = \frac{\cos SM}{\cos SN} = \frac{\cos AM}{\cos AN}$$

Daher hat man



$$\frac{\cos AN}{\cos SN} = \frac{\cos AM}{\cos SM}$$
$$\frac{\cos AN-\cos SN}{\cos AN+\cos SN} = \frac{\cos AM-\cos SM}{\cos AM+\cos SM}$$

*) Lexell a. a. O. p. 65. Steiner Crelle J. 2 p. 59. Schulz II, 54. Den zugeordneten Satz hat Gudermann nied. Sphärik 296 hinzugefügt.

Nun ist $SN+AN = SA'$, $SN-AN = SA$, folglich (§. 4, 8)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SA \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SA' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(SM-AM)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(SM+AM)$$

unveränderlich für jeden beliebigen durch S gehenden Hauptkreis, der den gegebenen Kreis in A und A' schneidet.

Der Zusatz wird unmittelbar wie folgt bewiesen. Durch den Punkt D des Hauptkreises s gehn die sphärischen Tangenten DE und DF des Kreises (O). Zieht man OP normal zu s, so ist in den Dreiecken ODE und ODP (4)

$$\sin OD = \frac{\sin EO}{\sin EDO} = \frac{\sin PO}{\sin PDO}$$

Daher hat man

$$\frac{\sin PDO}{\sin EDO} = \frac{\sin PO}{\sin EO}$$

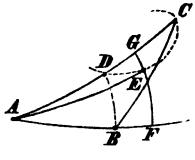
$$\frac{\sin PDO - \sin EDO}{\sin PDO + \sin EDO} = \frac{\sin PO - \sin EO}{\sin PO + \sin EO}$$

Nun ist $PDO - EDO = sa$, $PDO + EDO = sa'$, folglich

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}sa}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}sa'} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(PO-EO)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(PO+EO)}$$

unveränderlich für jeden beliebigen Punkt des Hauptkreises s, aus dem die sphärischen Tangenten a und a' an den gegebenen Kreis gezogen werden.

Anmerkung. Auf dem angezeigten Wege findet man, daß $\cos AU : \cos BU = \cos AV : \cos BV$ ist, wenn UV zu AB normal steht, und umgekehrt; daß die Punkte der Kugel, welche in Bezug auf zwei Kreise derselben gleiche Potenzen haben, auf einem Hauptkreise liegen, u. s. w. Vergl. Planim. §. 14, 2 ff. Stereom. §. 5, 19. Gudermann sieb. Sphärik 308 ff.



Um das gleichschenkelige Dreieck zu konstruieren, das mit dem sphärischen Dreieck ABC den Winkel A und die Fläche gemein hat, mache man $AD = AB$ auf AC, ziehe durch C und D einen beliebigen Kreis, an denselben die sphärische Tangente AE und mache $AF = AG = AE$ auf AB und AC. Dann hat man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}AF \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}AG = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}AE = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}AD \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}AC$$
$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}AB \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}AC$$

Also ist die Fläche $AFG = ABC$ (14, Anm.).

17. Wenn bei dem sphärischen Dreieck ABC die Mitte der Seite CA durch F bezeichnet wird, so ist

$$\cos AB + \cos BC = 2\cos\tfrac{1}{2}CA \cos FB$$

Und wenn bei den Hauptkreisen a, b, c der Winkel ca durch den Hauptkreis f halbiert wird, so ist

$$\cos ab + \cos bc = 2\cos\tfrac{1}{2}ca\cos fb^{*})$$

Beweis. Zieht man den Hauptkreis BN normal zu CA, so ist in den rechtwinkeligen Dreiecken ABN und BCN

$$\cos AB = \cos BN\cos NA, \quad \cos BC = \cos CN\cos BN$$
$$\cos AB + \cos BC = \cos BN(\cos CN + \cos NA)$$

Nun ist $\cos CN + \cos NA = 2\cos CF\cos FN$ (§. 4, 8), $\cos FN\cos BN = \cos FB$ (1), folglich

$$\cos AB + \cos BC = 2\cos CF\cos FB$$

Um den zugeordneten Satz direkt abzuleiten, ziehe man durch den gemeinschaftlichen Punkt B der Hauptkreise c und a den Hauptkreis n, der den Hauptkreis b normal in N schneidet. Unter der Voraussetzung $\sin bn = 1$ ist (4)

$$\cos ab = \cos BN\sin an, \quad \cos bc = \cos BN\sin cn$$
$$\cos ab + \cos bc = \cos BN(\sin an + \sin cn)$$

Nun ist $\sin an + \sin cn = 2\sin fn\cos cf$, und $\cos BN\sin fn = \cos fb$, folglich u. s. w.

Anwendung. Wenn man in dem sphärischen Viereck $ABCD$ die Mitten der gegenüberliegenden Bogen BC und DA, CA und DB, AB und DC durch E und E_1, F und F_1, G und G_1 bezeichnet, so ist

$$\cos AB + \cos BC = 2\cos\tfrac{1}{2}CA\cos FB$$
$$\cos CD + \cos DA = 2\cos\tfrac{1}{2}CA\cos FD$$

Nun ist $\cos FB + \cos FD = 2\cos\tfrac{1}{2}DB\cos FF_1$, folglich**)

$$\cos AB + \cos BC + \cos CD + \cos DA = 4\cos\tfrac{1}{2}CA\cos\tfrac{1}{2}DB\cos FF_1$$

Ebenso ist in den Vierecken $BCAD$ und $CABD$

$$\cos BC + \cos CA + \cos AD + \cos DB = 4\cos\tfrac{1}{2}AB\cos\tfrac{1}{2}DC\cos GG_1$$
$$\cos CA + \cos AB + \cos BD + \cos DC = 4\cos\tfrac{1}{2}BC\cos\tfrac{1}{2}DA\cos EE_1$$

Und wenn bei den Hauptkreisen a, b, c, d die Winkel ca und db durch die Hauptkreise f und f_1 halbiert werden, so findet man auf gleiche Weise

$$\cos ab + \cos bc + \cos cd + \cos da = 4\cos\tfrac{1}{2}ca\cos\tfrac{1}{2}db\cos ff_1$$

u. s. w.

18. Nach der Hypothese der gemeinen Geometrie fällt die Kugel mit einer sie berührenden Ebene, eine sphärische Figur mit ihrer

*) Gudermann nieb. Sphärik 400. Vergl. Planim. §. 14, 18.
**) Steiner Crelle J. 2 p. 292. Gudermann a. a. O. Planim. §. 14, 20.

Normalprojektion auf diese Ebene zusammen, wenn der Radius des Berührungspunktes unendlich groß wird. Denn die Radien, welche das unendlich ferne Centrum gemein haben, werden parallel und zwar normal zu der Ebene, mit welcher die Kugel zusammenfällt. Die Bogen von Hauptkreisen fallen mit ihren Sehnen und mit ihren Normalprojektionen auf die Ebene zusammen.

Wenn eine sphärische Figur auf einer Kugel in Betracht kommt, deren Radius r Einheiten hat, und wenn die Bogen von Hauptkreisen der Figur $a, b, c, ..$ Einheiten haben, so werden die entsprechenden Centriwinkel (deren Arcus, Planim. §. 13, 8) durch die Quotienten $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}, ..$ ausgedrückt. Je größer nun r wird, desto mehr verschwinden die Bogen $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}, ..$, desto genauer erreichen $\sin\frac{a}{r}$ und $\operatorname{tang}\frac{a}{r}$ den Wert $\frac{a}{r}$ (§. 3, 10); dagegen fällt $\cos\frac{a}{r}$ mit $1-\frac{a^2}{2r^2}$ zusammen, weil (§. 4, 7)

$$\cos\frac{a}{r} = 1-2\sin^2\frac{a}{2r}$$

und $\sin^2\frac{a}{2r}$ dem Wert $\frac{a^2}{4r^2}$ sich unendlich nähert.

Durch die angegebene Substitution kann aus jeder für die Elemente einer sphärischen Figur geltenden trigonometrischen Gleichung die Gleichung abgeleitet werden, welche für die entsprechenden Elemente der Planfigur gilt, mit der die sphärische Figur bei unendlich wachsendem Radius der Kugel zusammenfällt.*) Z. B. Wenn die Winkel eines sphärischen Dreiecks durch α, β, γ bezeichnet werden, und die gegenüberliegenden Seiten a, b, c Längeneinheiten haben, während der Radius der Kugel r Längeneinheiten beträgt, so ist (8)

$$\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha = \cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}$$

Bei wachsendem r behält man von dieser Gleichung durch die obige Substitution

$$\begin{aligned}\frac{bc}{r^2}\cos\alpha &= 1-\frac{a^2}{2r^2}-\left(1-\frac{b^2}{2r^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2r^2}\right)\\ &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}-\frac{b^2c^2}{4r^4}\\ 2bc\cos\alpha &= b^2+c^2-a^2-\frac{b^2c^2}{2r^2}\end{aligned}$$

*) Lagrange a. a. O. p. 291. Vergl. Euler Acta Petrop. 1778, II p. 39.

also für das plane Dreieck, wenn $r = \infty$, $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$ in Übereinstimmung mit §. 4, 10. Aus der sphärischen Gleichung (8)

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{r} = 0$$

findet man durch dasselbe Verfahren für das plane Dreieck die Gleichung

$$\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma) = 0$$

in Übereinstimmung mit dem Satz, daß in dem planen Dreieck $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$ ist. U. s. w.

19. Wenn die Seiten des sphärischen Dreiecks zu dem Radius der Kugel kleine Verhältnisse haben, so kann die Fläche des sphärischen Dreiecks (und sein Exceß, Stereom. §. 4, 5) aus gegebenen Elementen ebenso berechnet werden, wie die Fläche des durch dieselben Elemente bestimmten planen Dreiecks. Dagegen sind die Winkel des sphärischen Dreiecks je um den dritten Teil des Excesses größer als die Winkel des planen Dreiecks, welches mit dem sphärischen Dreieck der Reihe nach gleiche Seiten hat.*)

Beweis. Für kleine Werte von $\frac{x}{r}$ kann

$$\cos\frac{x}{r} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{x^4}{24r^4}, \qquad \sin\frac{x}{r} = \frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3}$$

gesetzt werden (Allg. Arithm. §. 31, 8). Durch diese Substitution erhält man für

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}} \tag{18}$$

einen Bruch, dessen Zähler

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} - \frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24r^4}$$

und dessen Nenner $\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$ ist. Nun ist mit hinreichender Genauigkeit

*) Legendre Mém. de Paris 1787 p. 338 und Trigonom. Append. V. Vergl. Lagrange J. de l'École polyt. Cah. 6 p. 293. Gauß disq. gener. circa superficies curvas (Comm. Götting. VI. 1827) und Crelle J. 22 p. 96. Mertens Schlömilch Zeitschrift 1875 t. 20 p. 248.

$$\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}} = 1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}$$

folglich

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{24bcr^2}$$

Werden von dem planen Dreieck, deſſen Seiten ebenfalls a, b, c Längeneinheiten haben, die Winkel durch α', β', γ', die Fläche durch Δ bezeichnet, ſo iſt (§. 2, 5)

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha'$$

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4 = 4b^2c^2\sin^2\alpha' = 16\Delta^2$$

Durch Subſtitution dieſer Werte erhält man

$$\cos\alpha = \cos\alpha' - \frac{bc\sin^2\alpha'}{6r^2} = \cos\alpha' - \frac{\Delta}{3r^2}\sin\alpha'$$

Die Zahl $\frac{\Delta}{3r^2}$ iſt der Arcus des Centriwinkels $\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi}$, der ſo klein iſt, daß ſein Sinus von $\frac{\Delta}{3r^2}$ und ſein Coſinus von 1 nicht beträchtlich abweicht. Alſo iſt nach §. 4, 7

$$\cos\alpha = \cos\left(\alpha'+\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi}\right), \quad \alpha = \alpha'+\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi}$$

Durch dieſelben Betrachtungen findet man

$$\beta = \beta'+\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi} \text{ und } \gamma = \gamma'+\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi}$$

folglich

$$\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma'+\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi} = 180^0+\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi}$$

d. h. der Exceß des ſphäriſchen Dreiecks beträgt $\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi}$. In der That hat ein zweirechtwinkeliges ſphäriſches Dreieck der gegebenen Kugel, deſſen dritter Winkel 180^0 beträgt, eine Fläche von πr^2 Quadrateinheiten (Stereom. §. 10, 5); folglich hat das gegebene ſphäriſche Dreieck, deſſen Exceß $\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi}$ beträgt, eine Fläche von Δ Quadrateinheiten.

Anmerkung. Wenn z. B. b, c, α gegeben ſind, ſo berechnet man

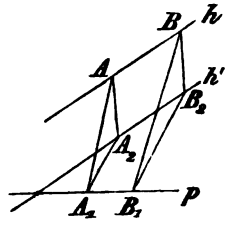
$$\Delta = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha, \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi} \text{ und } \alpha' = \alpha-\tfrac{1}{3}\varepsilon$$

Aus den Elementen b, c, α' wird nach den Regeln der planen Trigonometrie β', γ', a gefunden. Dann ist

$$\beta = \beta' + \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad \gamma = \gamma' + \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

§. 6. Polygonometrie und Polyedrometrie.

1. Wenn die Geraden h, p nicht auf einer Ebene liegen, und die Strecke AB der Geraden h auf die Ebene, welche die Gerade p enthält und mit der Geraden h parallel ist, durch die Normalen dieser Ebene A_2A, B_2B projiciert wird, so ist AA_2B_2B ein Rektangel. Wenn die Strecke A_2B_2 der mit h parallelen Geraden h' auf die Gerade p durch die Normalen A_1A_2, B_1B_2 projiciert wird, so sind die Ebenen AA_1A_2, BB_1B_2 und die Geraden AA_1, BB_1 normal zu p, und A_1B_1 ist die Normalprojektion von AB auf die Gerade p. Nun ist $A_2B_2 = AB$, $ph' = ph$, folglich (§. 4, 2)



$$A_1B_1 = A_2B_2 \cos ph' = AB \cos ph$$

Daher gelten die Gleichungen (§. 4, 5 und 6)

$$BC\cos pf + CA\cos pg + AB\cos ph = 0$$
$$\sin gh\cos pf + \sin hf\cos pg + \sin fg\cos ph = 0$$

auch dann, wenn die Gerade p nicht auf der Ebene ABC liegt. Wenn die Radien OF, OG, OH, OP einer Kugel Längeneinheiten sind und die positiven Richtungen der Geraden f, g, h, p haben, so ist*)

$$\sin GH\cos PF + \sin HF\cos PG + \sin FG\cos PH = 0$$

für 3 Punkte F, G, H eines Hauptkreises und einen beliebigen Punkt P der Kugel. Durch Anwendung dieses Satzes auf das sphärische Dreieck ABC mit den Quadranten AM, AN auf CA, AB findet man

$$\sin AN\cos BC + \sin NB\cos AC + \sin BA\cos NC = 0$$
$$\sin AM\cos NC + \sin MC\cos NA + \sin CA\cos NM = 0$$

also in diesem Falle

$$\cos BC - \cos CA\cos AB - \sin AB\cos NM = 0$$
$$\cos NC + \sin CA\cos NM = 0$$
$$\cos BC - \cos CA\cos AB + \sin CA\sin AB\cos NM = 0$$

---

*) Diese Relation, welcher in der Planimetrie Stewart's Satz (Planim. §. 14, 22) entspricht, ist von Carnot géom. de pos. 344 mit Hilfe des sphärischen Satzes §. 5, 6 gesucht, von Schulz Sphärik II, 49 gefunden, von Möbius auf seine wahre Quelle zurückgeführt und zur Grundlage der sphärischen Trigonometrie gemacht worden. (Vorlesung 1839. Vergl. Analyt. Sphärik 7.)

übereinstimmend mit der Gleichung

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha = 0 \quad (\S.\ 5, 8)$$

2. Nachdem von den n Geraden, die ein ebenes oder unebenes Polygon bilden, die positiven Richtungen nach Willkür bestimmt worden sind, haben die Seiten AB, BC, CD, .. des Polygons bestimmte Werte $a_1, a_2, .., a_n$. Wird nun durch p eine beliebige Gerade bezeichnet, deren positive Richtung man willkürlich bestimmt hat, und durch $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels, welchen mit der Geraden p die Gerade bildet, auf der die $i$te Seite des Polygons vom Wert a_i liegt, so ist*)

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + .. + a_n \cos_{pn} = 0$$

Denn $a_i \cos_{pi}$ ist die Normalprojektion der $i$ten Seite des Polygons auf die Gerade p, und die Summe dieser Normalprojektionen ist null. Vergl. §. 4, 5 und Stereom. §. 11, 1.

Anwendungen. Zieht man durch das Centrum einer Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, parallel mit p und den Geraden, auf denen die Seiten des Polygons liegen, Gerade, deren positive Richtungen die Kugel in P, A_1, A_2, .. schneiden, so ist $\cos_{pi}$ dem Cosinus des Hauptkreisbogens PA_i gleich, folglich**)

$$a_1 \cos PA_1 + a_2 \cos PA_2 + .. + a_n \cos PA_n = 0$$

Diese Gleichung, in der P ein willkürlicher Punkt der Kugel ist, giebt zu erkennen, daß der Schwerpunkt der Punkte $a_1 . A_1$, $a_2 . A_2$, .., $a_n . A_n$ in dem Centrum O der Kugel liegt. Zieht man nämlich durch die Punkte A_1, A_2, .., A_n parallel mit OP Gerade, die von der durch O normal zu OP gehenden Ebene in B_1, B_2, .., B_n geschnitten werden, so ist

$$\cos PA_1 = B_1A_1, \quad \cos PA_2 = B_2A_2, ..$$

folglich für jede Richtung der Parallelen, welche durch die das Centrum O enthaltende Ebene normal geschnitten werden,

$$a_1 . B_1A_1 + a_2 . B_2A_2 + .. + a_n . B_nA_n = 0$$

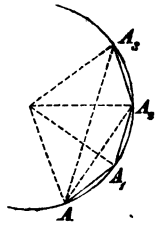
Also liegt der Schwerpunkt des angegebenen Systems in O (Stereom. §. 11, 2).

---

*) Diese Fundamentalgleichung der Polygonometrie ist von Lexell 1755 Nov. Comm. Petrop. 19 p. 187 aufgestellt worden. Vergl. L'Huilier polygonométrie 1789. Carnot géom. de pos. 254 ff.

**) Die Grundlage der analytischen Sphärik von Möbius 1846. Vergl. den von Steiner Crelle J. 2 p. 291 ausgesprochenen Lehrsatz.

Wenn in einem Kreiſe, deſſen Radius eine Längeneinheit iſt, die gleichen Sehnen AA_1, A_1A_2, .., $A_{n-1}A_n$ gezogen werden, und die Strecken AA_1, A_1A_2 mit der beliebigen Geraden p die Winkel α, $\alpha+\beta$ bilden, ſo bilden die Strecken A_2A_3, .., $A_{n-1}A_n$ mit p die Winkel $\alpha+2\beta$, .., $\alpha+(n-1)\beta$; die Winkel A_1AA_2, A_2AA_3, .., haben den gemeinſchaftlichen Wert $\frac{1}{2}\beta$, der Winkel A_1AA_n hat den Wert $\frac{1}{2}(n-1)\beta$, AA_n bildet mit p den Winkel $\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta$. Die Summe der Projektionen von AA_1, A_1A_2, .., $A_{n-1}A_n$ auf die Gerade p iſt der Projektion der Strecke AA_n auf dieſelbe Gerade gleich. Es haben aber dieſe Projektionen die Werte



$$AA_1\cos\alpha,\quad AA_1\cos(\alpha+\beta),\ ..,\quad AA_1\cos[\alpha+(n-1)\beta]$$
$$AA_n\cos[\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta]$$

und es iſt

$$AA_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}\beta,\quad AA_n = 2\sin\tfrac{1}{2}n\beta$$

Demnach ergiebt ſich die Summe*)

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+..+\cos[\alpha+(n-1)\beta] = \frac{\sin\frac{1}{2}n\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\cos[\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta]$$

und durch Vertauſchung von α mit $\alpha+90^0$

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+..+\sin[\alpha+(n-1)\beta] = \frac{\sin\frac{1}{2}n\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\sin[\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta]$$

Dieſe Summen werden auch dadurch gefunden, daß man die erſten und letzten Glieder, die zweiten und vorletzten, u. ſ. f. nach §. 4, 8 vereinigt. Euler, Introd. I, 258.

3. Die Normalprojektion einer Planfigur auf eine Ebene iſt das Produkt der Planfigur mit dem Coſinus des Winkels, welchen die Ebene der Planfigur mit der Projektionsebene bildet.**)

Beweis. Die Normalprojektion der Planfigur kann als Normalſchnitt eines Prisma betrachtet werden, welches die Planfigur zur Baſis hat. Ihr Verhältnis zur Planfigur iſt nach Stereom. §. 8, 6 das Verhältnis der Höhe des Prisma zu einer Längenkante. Nun iſt die Höhe die Normalprojektion der Längenkante auf eine Normale der Baſis, und die Längenkante iſt eine Normale der Projektionsebene. Alſo iſt das Verhältnis der Normalprojektion der Planfigur zu der

*) Der geometriſche Ausdruck dieſer Summation findet ſich bei Archimedes Sph. et Cyl. I, 22 und 23.

**) Vergl. Euler Introd. II. App. 64.

Planfigur selbst der Cosinus des Winkels, welchen die Normalen der Planfigur und der Projektionsebene bilden, d. i. der Cosinus des von diesen Ebenen gebildeten Flächenwinkels (Stereom. §. 2, 5).

Zur Bestimmung der Zeichen hat man zuerst die positiven Richtungen der Normalen der Ebenen willkürlich, darnach aber die positiven Sinne der Ebenen so festzusetzen, daß sie übereinstimmen für Betrachter, welche sich so auf die Ebenen stellen, daß ihnen die positiven Richtungen der Normalen aufwärts gehend erscheinen. Vergl. Stereom. §. 4, 7. Durch den Perimeter der Planfigur wird der Perimeter ihrer Projektion bestimmt. Dann ist sowohl der Cosinus des Winkels der Ebenen oder ihrer Normalen, als auch das Zeichen jeder von beiden Flächen, der Planfigur und ihrer Projektion, unzweideutig bestimmt. Wenn für die Normale einer Ebene die entgegengesetzte Richtung und damit für die Ebene der entgegengesetzte Sinn als positiv genommen wird, so wechselt eine Fläche und der Cosinus das Zeichen.

Anwendung. Eine gegebene sphärische Figur werde beliebig in unendlich kleine Teile geteilt, deren einer α seinen Schwerpunkt in A habe. Man projiciere die sphärische Figur durch Normalen auf die Ebene eines Hauptkreises, und bezeichne durch A_1 und α_1 die Projektionen von A und α, durch f die Fläche der sphärischen Figur, durch f_1 die Fläche ihrer Projektion, durch O das Centrum der Kugel, endlich durch h die Höhe des Schwerpunkts der sphärischen Fläche über der Ebene des Hauptkreises. Dann ist das Produkt fh der Summe aller Produkte $\alpha . A_1A$ gleich (Stereom. §. 11, 11). Nun ist

$$A_1A = OA . \cos OAA_1 = OA . \cos\alpha_1\alpha$$
$$\alpha . A_1A = OA . \alpha\cos\alpha_1\alpha = OA . \alpha_1$$

und die Summe aller $\alpha . A_1A$ dem Produkt von OA mit der Summe aller α_1 gleich. Daher hat man $fh = OA . f_1$, $h : OA = f_1 : f$.*)

4. Wenn die Perimeter der n Flächen eines Polyeders dem Gesetz der Kanten genügen (Stereom. §. 8, 16), und wenn von den n Ebenen, auf denen die Flächen des Polyeders liegen, die positiven Sinne willkürlich festgesetzt worden sind, so haben die Flächen des Polyeders unzweideutig bestimmte Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Nimmt man eine beliebige Ebene hinzu, deren positiver Sinn ebenfalls willkürlich festgesetzt wird, und bezeichnet man durch $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels, den mit der beliebigen Ebene die Ebene bildet, auf der die Fläche vom Wert α_i liegt, so ist

*) Giulio Liouville J. 4 p. 386. Vergl. Besge Liouville J. 7 p. 516. Crelle J. 50 p. 322.

$$\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots + \alpha_n \cos_{pn} = 0$$

d. h. die Summe der Normalprojektionen der Flächen des Polyeders auf die beliebige Ebene verschwindet.*)

Beweis. Es sei z. B. $ABCD$ die erste Fläche des Polyeders, und die anliegenden Flächen haben die bestimmten Perimeter $BAE\ldots$, $CBF\ldots$, $DCG\ldots$, $ADH\ldots$ Bezeichnet man Normalprojektionen dieser Flächen durch $A_1B_1C_1D_1$, $B_1A_1E_1\ldots$, $\ldots$ und einen willkürlichen Punkt der Projektionsebene durch O, so ist (Planim. §. 9, 10)

$$A_1B_1C_1D_1 = OA_1B_1 + OB_1C_1 + OC_1D_1 + OD_1A_1$$

u. s. w., folglich die Summe der Projektionen aller Flächen des Polyeders

$$\begin{aligned} &A_1B_1C_1D_1 + B_1A_1E_1\ldots + C_1B_1F_1\ldots + \ldots \\ &= OA_1B_1 + OB_1C_1 + OC_1D_1 + OD_1A_1 \\ &+ OB_1A_1 + OA_1E_1 + \ldots + OC_1B_1 + OB_1F_1 + \ldots \\ &+\ldots \quad +\ldots \quad +\ldots \end{aligned}$$

Nach dem Gesetz der Kanten kommt in dieser Summe neben jedem Dreieck wie OA_1B_1 auch das entgegengesetzte Dreieck OB_1A_1 vor, also verschwindet die Summe. Nun ist $A_1B_1C_1D_1 = ABCD\cos_{p1}$, u. s. w. (3) folglich verschwindet die Summe $\alpha_1\cos_{p1} + \alpha_2\cos_{p2} + \ldots$

5. Die positiven Sinne der Ebenen, auf denen die Polyederflächen liegen, werden zugleich mit den positiven Richtungen ihrer Normalen bestimmt (3). Auf den Normalen konstruiere man Strecken, deren Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in Bezug auf Größe und Zeichen der Reihe nach sich verhalten wie die Werte der Polyederflächen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Jedes System solcher Strecken ist so beschaffen, daß durch parallele Verschiebung derselben ein geschlossenes Polygon sich zusammensetzen läßt. Denn aus der Gleichung (4)

$$\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots + \alpha_n \cos_{pn} = 0$$

folgt nach der über $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gemachten Voraussetzung

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

d. h. die Summe der Normalprojektionen der Strecken, welche auf den Normalen der Polyederflächen liegen und die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ haben, auf die Normale einer beliebigen Ebene verschwindet. Also ist jedes aus diesen Strecken durch parallele Verschiebung zusammengesetzte Polygon geschlossen (Stereom. §. 11, 1).

*) Vergl. die angeführten Stellen von L'Huilier und Carnot und des Verf. Schrift über die Determinanten §. 17.

Demnach kann jedem Polyeder von n Flächen ein Polygon von n Seiten zugeordnet werden; aus jeder Gleichung zwischen den Seiten und Winkeln dieses Polygons entspringt eine Gleichung zwischen den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders. Der Teil der Polyedrometrie, welcher von den Relationen der Flächen und Flächenwinkel der Polyeder handelt, ist in dem Teil der Polygonometrie enthalten, welcher die Relationen der Seiten und Winkel der Polygone umfaßt.*)

6. Aus der Gleichung (2)

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

ergiebt sich durch Vereinigung der beliebigen Geraden p mit den Seiten des Polygons das System von Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_1 \quad &+ a_2 \cos_{12} + \ldots + a_n \cos_{1n} = 0 \\
a_1 \cos_{21} &+ a_2 \quad + \ldots + a_n \cos_{2n} = 0 \\
\ldots \quad &\ldots \quad \ldots \\
a_1 \cos_{n1} &+ a_2 \cos_{n2} + \ldots + a_n \quad = 0
\end{aligned}$$

Wenn man die Gleichungen dieses Systems der Reihe nach mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ multipliciert und beachtet, daß $\cos_{ik} = \cos_{ki}$ ist, so findet man

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 \cos_{12} + 2a_1a_3 \cos_{13} + \ldots \\
+ 2a_2a_3 \cos_{23} + \ldots + \ldots = 0 \\
-a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_2a_3 \cos_{23} + 2a_2a_4 \cos_{24} + \ldots \\
+ 2a_3a_4 \cos_{34} + \ldots + \ldots = 0
\end{aligned}$$

u. s. w.**) Bei einem (ebenen oder unebenen) Viereck hat man

$$a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 \cos_{12} + 2a_2a_3 \cos_{23} + 2a_3a_1 \cos_{31}$$

und analog bei einem Tetraeder***)

$$\alpha_4^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos_{12} + 2\alpha_2\alpha_3 \cos_{23} + 2\alpha_3\alpha_1 \cos_{31}$$

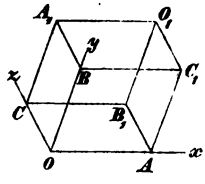
Unter der Voraussetzung, daß die Seiten und Flächen positive Teile der Geraden und Ebenen sind, auf denen sie liegen, ist in diesen Gleichungen $\cos_{12}$ dem Cosinus des Winkels entgegengesetzt gleich, welchen die beiden ersten Seiten oder Flächen einschließen, u. s. w. Vergl. §. 4, 5. Anm.

Anmerkung. Bezeichnet man bei dem Parallelepiped $OABC\ldots$ die Geraden, auf denen die Kanten OA, OB, OC liegen, durch x, y, z,

*) Determ. §. 17, 2.
**) L'Huilier und Carnot a. a. O.
***) Lagrange Pyram. 12 (Mém. de Berlin 1773).

und setzt man die positiven Richtungen derselben willkürlich fest, so erhalten die Kanten OA, OB, OC die Werte a, b, c, und man hat in dem Viereck OAB_1O_1

$$OO_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos xy + 2bc\cos yz + 2ca\cos zx$$



Hieraus entspringt AA_1^2 durch Vertauschung von a mit $-a$, BB_1^2 durch Vertauschung von b mit $-b$, CC_1^2 durch Vertauschung von c mit $-c$, so daß*)

$$OO_1^2 + AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = 4(a^2+b^2+c^2)$$

Vergl. Planim. §. 14, 19.

Bezeichnet man die Ebenen OBC, OCA, OAB durch φ, χ, ψ, und nach willkürlicher Festsetzung der positiven Sinne dieser Ebenen die Werte der Flächen BOC, COA, AOB durch α, β, γ, so hat man in dem Tetraeder $OABC$**)

$$ABC^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\cos\varphi\chi + 2\beta\gamma\cos\chi\psi + 2\gamma\alpha\cos\psi\varphi$$

Daraus entspringt $B_1C_1O^2$ durch Vertauschung von α mit $-\alpha$, $C_1A_1O^2$ durch Vertauschung von β mit $-\beta$, $A_1B_1O^2$ durch Vertauschung von γ mit $-\gamma$, so daß

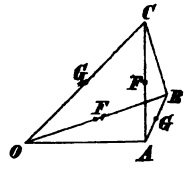
$$ABC^2 + B_1C_1O^2 + C_1A_1O^2 + A_1B_1O^2 = 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

7. Bezeichnet man bei einem (ebenen oder unebenen) Viereck $OABC$ die Geraden, auf welchen die Strecken OA, OB, OC, BC, CA, AB liegen, durch x, y, z, a, b, c, so ist***)

$$OA.BC\cos xa + OB.CA\cos yb + OC.AB\cos zc = 0$$
$$2OA.BC\cos xa = OC^2 + AB^2 - OB^2 - CA^2$$

Beweis. Durch Projektion der Perimeter BCO, CAO, ABO auf die Geraden x, y, z erhält man

$$BC\cos xa + CO\cos zx + OB\cos xy = 0$$
$$CA\cos yb + AO\cos xy + OC\cos yz = 0$$
$$AB\cos zc + BO\cos yz + OA\cos zx = 0$$



Multipliciert man diese Gleichungen der Reihe nach mit OA, OB, OC, so erhält man durch Addition die erste der aufgestellten Gleichungen, weil $OA.CO\cos zx + OC.OA\cos zx = 0$, u.s.w. Aus den Gleichungen

*) Legendre Géom. Note V.
**) Lagrange a. a. O.
***) Carnot Mém. sur la relation qui existe . . 27.

$$\begin{aligned} 2OA.BC\cos xa + 2CO.OA\cos zx + 2OA.OB\cos xy &= 0 \\ 2CO.OA\cos zx + CO^2 + OA^2 - CA^2 &= 0 \\ 2AO.OB\cos xy + AO^2 + OB^2 - AB^2 &= 0 \end{aligned}$$

(§. 4, 10) folgt die andere der zu beweisenden Gleichungen.

Die erste Gleichung giebt zu erkennen, daß z und c normal zu einander sind, wenn sowohl x und a, als auch y und b normal zu einander stehn. Vergl. Planim. §. 6, 9 und Stereom. §. 6, 10.

Zusatz. Wenn F, G, F_1, G_1 die Mitten von CA, AB, OB, OC sind, so sind die Geraden FG und F_1G_1 parallel mit a, die Geraden FG_1 und F_1G parallel mit x, die Strecke $F_1G_1 = -FG = \frac{1}{2}BC$, u. s. w. Demnach ist

$$\begin{aligned} 2GF.FG_1\cos xa + GF^2 + FG_1{}^2 &= GG_1{}^2. \\ 2FG_1.G_1F_1\cos xa + FG_1{}^2 + G_1F_1{}^2 &= FF_1{}^2 \end{aligned}$$

folglich

$$OA.BC\cos xa = 4GF.FG_1\cos xa = GG_1{}^2 - FF_1{}^2, \text{ u. s. w.}$$

Anwendung. Wenn die Punkte A', B', C' auf den Geraden BC, CA, AB, und die Strecken $A'A$, $B'B$, $C'C$ auf den Geraden a', b', c' liegen, so ist

$$2BC.A'A\cos aa' = BA^2 - CA^2 + CA'^2 - BA'^2$$

Zugleich ist $2BC.A'A\sin aa' = 4\Delta$ (§. 1, 7), folglich

$$4\Delta\cot aa' = BA^2 - CA^2 + CA'^2 - BA'^2$$

u. s. w., daher durch Addition

$$\begin{aligned} &4\Delta(\cot aa' + \cot bb' + \cot cc') \\ &= CA'^2 - BA'^2 + AB'^2 - CB'^2 + BC'^2 - AC'^2 \end{aligned}$$

Wenn die durch A', B', C' gehenden Normalen der BC, CA, AB einen Punkt gemein haben, so ist die rechte Seite null (Planim. §. 14, 2), also ist auch die Summe der Cotangenten null. Vergl. §. 3, 4.

Wenn C'' auf AB so gelegt wird, daß die durch A', B', C'' gehenden Normalen der BC, CA, AB einen Punkt gemein haben, so ist

$$0 = CA'^2 - BA'^2 + AB'^2 - CB'^2 + BC''^2 - AC''^2$$

also durch Subtraktion

$$\begin{aligned} &4\Delta(\cot aa' + \cot bb' + \cot cc') \\ &= BC'^2 - AC'^2 - BC''^2 + AC''^2 = 2AB.C'C'' \end{aligned}$$

und, indem man $2\Delta = AB.h$ setzt,

$$\cot aa' + \cot bb' + \cot cc' = C'C'' : h$$

8. Bezeichnet man bei einem sphärischen Viereck $OABC$ die Hauptkreise, auf welchen die Bogen OA, OB, OC, BC, CA, AB liegen, durch x, y, z, a, b, c, so ist*)

$$\sin OA \sin BC \cos xa = \cos OB \cos CA - \cos OC \cos AB$$
$$\sin OA \sin BC \cos xa + \sin OB \sin CA \cos yb + \sin OC \sin AB \cos zc = 0$$

Beweis. Wenn E ein Durchschnitt der Hauptkreise x und a ist, so hat man (§. 5, 6)

$$\begin{aligned}
\cos OB &= \cos BE \cos EO - \sin BE \sin EO \cos xa \\
\cos CA &= \cos CE \cos EA - \sin CE \sin EA \cos xa \\
\cos OC &= \cos CE \cos EO - \sin CE \sin EO \cos xa \\
\cos AB &= \cos BE \cos EA - \sin BE \sin EA \cos xa
\end{aligned}$$

In der Formel $\cos OB \cos CA - \cos OC \cos AB$ bleiben nur die Produkte übrig, welche den Faktor $\cos xa$ enthalten. Nun ist

$$\begin{aligned}
&- \sin CE \cos BE (\sin EA \cos EO - \cos EA \sin EO) \\
&+ \cos CE \sin BE (\sin EA \cos EO - \cos EA \sin EO) \\
&= \sin(EA - EO) \sin(BE - CE) = \sin OA \sin BC
\end{aligned}$$

folglich u. s. w. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sin OA \sin BC \cos xa &= \cos OB \cos CA - \cos OC \cos AB \\
\sin OB \sin CA \cos yb &= \cos OC \cos AB - \cos OA \cos BC \\
\sin OC \sin AB \cos zc &= \cos OA \cos BC - \cos OB \cos CA
\end{aligned}$$

erhält man durch Addition die andere der aufgestellten Gleichungen.

9. Die Bedingung, unter der dem linearen System (6)

$$\begin{aligned}
a_1 &+ a_2 \cos_{12} + \ldots + a_n \cos_{1n} = 0 \\
a_1 \cos_{21} &+ a_2 + \ldots + a_n \cos_{2n} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1 \cos_{n1} &+ a_2 \cos_{n2} + \ldots + a_n = 0
\end{aligned}$$

durch nicht verschwindende a_1, a_2, ... genügt werden kann, ist die Gleichung zwischen den Cosinus der Winkel von n Geraden (Ebenen), auf denen die Seiten (Flächen) eines Polygons (Polyeders) liegen. Man schreibt dieselbe am einfachsten in Form einer Determinante (Algebra §. 5, 7):

*) Die erste dieser Gleichungen rührt von Gauß her (Disq. gener. circa superf. 2, VI. Vergl. Staudt Crelle J. 24 p. 252 und des Verf. Determ. §. 16, 4), die andere hat Joachimsthal Crelle J. 40 p. 45 hinzugefügt. Über den Zusammenhang dieser sphärischen Gleichungen mit den vorigen polygonometrischen Gleichungen vergl. unten (15).

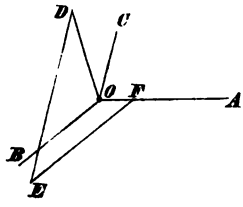
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & .. & \cos_{1n} \\ \cos_{21} & 1 & .. & \cos_{2n} \\ . & . & .. & . \\ \cos_{n1} & \cos_{n2} & .. & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Drei Gerade, die mit einer Ebene parallel sind, sind mit den Seiten eines Dreiecks parallel. Also hat man für die Winkel von 3 Geraden, die mit einer Ebene parallel sind, die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \cos_{13} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

übereinstimmend mit der §. 4, 11 entwickelten Gleichung.

Vier Gerade, von denen nicht drei mit einer Ebene parallel sind, sind mit den Seiten eines unebenen Vierecks parallel, weil sie Normalen von vier Ebenen sind, die ein Tetraeder bilden können. Um ein solches Viereck zu konstruieren, ziehe man durch den willkürlichen Punkt O die Geraden OA, OB, OC, OD parallel mit den gegebenen Geraden. Wird nun die Ebene AOB von der Geraden, die parallel mit OC durch D geht, in E, und die Gerade OA von der Geraden, die parallel mit OB durch E geht, in F geschnitten, so ist $ODEF$ ein Viereck, mit dessen Seiten die gegebenen Geraden parallel sind. Daher hat man für die Winkel von 4 Geraden, unter denen nicht drei mit einer Ebene parallel sind, die Gleichung*)



$$\begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \cos_{13} & \cos_{14} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} & \cos_{24} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 & \cos_{34} \\ \cos_{14} & \cos_{24} & \cos_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dieselbe Gleichung besteht zwischen den Flächenwinkeln von 4 Ebenen, unter denen nicht drei mit einer Geraden parallel sind. Sie enthält demnach die Gleichung zwischen den Flächenwinkeln eines Tetraeders, zwischen den Seiten und Diagonalen eines sphärischen Vierecks.

Aus derselben Gleichung findet man die Gleichung zwischen dem Radius der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel, den Seiten einer Ecke desselben und den anliegenden Kanten, ferner die Gleichung zwischen demselben Radius und den 6 Kanten des Tetraeders, endlich

*) Carnot géom. de pos. 350.

die Gleichung zwiſchen den Strecken, welche 5 gegebene Punkte des Raumes verbinden. S. des Verf. Determ. §. 16.

10. Wenn man in dem Syſtem der beſondern Gleichungen (6) eine derſelben durch die allgemeine Gleichung (2) erſetzt, ſo erhält man für den Beſtand des linearen Syſtems

$$\begin{aligned} a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} &= 0 \\ a_1 \cos_{21} + a_2 \quad + \ldots + a_n \cos_{2n} &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_1 \cos_{n1} + a_2 \cos_{n2} + \ldots + a_n &= 0 \end{aligned}$$

die Bedingung

$$\begin{vmatrix} \cos_{p1} & \cos_{p2} & \ldots & \cos_{pn} \\ \cos_{21} & 1 & \ldots & \cos_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cos_{n1} & \cos_{n2} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

d. i. die Gleichung zwiſchen den Coſinus der Winkel, welche die Polygonſeiten (Polyederflächen) mit einander und mit einer beliebigen Geraden (Ebene) bilden. Insbeſondere wird bei 4 Geraden, von denen drei und zwar die durch die Numern 1, 2, 3 bezeichneten mit einer Ebene parallel ſind, der Wert von $\cos_{p1}$ aus den Werten $\cos_{p2}$, $\cos_{p3}$, $\cos_{12}$, $\cos_{13}$ und $\cos_{23}$ durch die Gleichung gefunden:

$$\begin{vmatrix} \cos_{p1} & \cos_{p2} & \cos_{p3} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Bei 5 Geraden (Ebenen) gilt die Gleichung*)

$$\begin{vmatrix} \cos_{p1} & \cos_{p2} & \cos_{p3} & \cos_{p4} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} & \cos_{24} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 & \cos_{34} \\ \cos_{14} & \cos_{24} & \cos_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Daher verſchwinden unbedingt alle (partialen) Determinanten 4ten und höhern Grades, welche zu dem obenſtehenden Syſtem von n^2 Größen gehören, und die Proportion der Polygonſeiten (Polyederflächen) iſt goniometriſch nicht ausdrückbar.

Nur bei dem Dreieck und bei dem unebenen Viereck (Tetraeder) ergiebt ſich aus dem linearen Syſtem (6) der goniometriſche

*) Magnus anal. Geom. des Raumes §. 9 (7). Vergl. den Aufſatz des Verf. in Crelle J. 46 p. 145 und Determ. §. 17, 3.

Ausdruck für die Proportion der Seiten (Flächen). Man findet (Algebra §. 5, 9. Determ. §. 17, 3)

$$a_1 : a_2 : a_3 = \sin_{23} : \sin_{31} : \sin_{12}$$
$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \sin_{234} : -\sin_{341} : \sin_{412} : -\sin_{123}$$

indem man abkürzend nach Analogie von $\sin^2{}_{12}$

$$\sin^2 \alpha\beta\gamma = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha\beta & \cos\alpha\gamma \\ \cos\alpha\beta & 1 & \cos\beta\gamma \\ \cos\alpha\gamma & \cos\beta\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

setzt. Wenn man für a_1, a_2, .. die ihnen proportionalen Werte in die Gleichung (1) setzt, so erhält man (wie §. 4, 6) allgemeine goniometrische Gleichungen. Vergl. unten 16.

11. Wenn das Polygon plan ist, so gilt nicht nur die Gleichung (2)

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

sondern es ist auch*)

$$a_1 \sin_{p1} + a_2 \sin_{p2} + \ldots + a_n \sin_{pn} = 0$$

Diese Gleichung entspringt aus der vorigen, wenn für die Gerade p eine andere angenommen wird, die mit p einen Winkel von 90^0 bildet. Dabei geht $\cos_{p1}$ in $-\sin_{p1}$ über (§. 4, 3).

Die gefundene allgemeine Gleichung enthält das System von Gleichungen

$$\begin{array}{lllll} * & + a_2 \sin_{12} + \ldots + a_n \sin_{1n} & = 0 \\ a_1 \sin_{21} & * & + \ldots + a_n \sin_{2n} & = 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1 \sin_{n1} + a_2 \sin_{n2} + \ldots & + * & = 0 \end{array}$$

12. Die Fläche f_n eines planen Polygons von n Seiten ist durch $n-1$ Seiten und deren Winkel bestimmt, und zwar ist f_n die halbe Summe der Werte, welche aus der Formel

$$s_{ik} = a_i a_k \sin_{ik}$$

entspringen, wenn man für i, k je zwei verschiedene aus der Reihe der Numern 1, 2, .., $n-1$ setzt, so daß $k > i$.**)

Beweis. Das Polygon $A_1 A_2 \ldots A_n$ besteht aus dem Polygon $A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$ und dem Dreieck $A_1 A_{n-1} A_n$ (Planim. §. 9, 10), folglich ist (§. 4, 12)

$$2f_n = 2f_{n-1} + 2A_1 A_{n-1} A_n = 2f_{n-1} + a_{n-1} a_n \sin_{n-1,n}$$

*) Lexell und L'Huilier a. a. O.
**) L'Huilier 1789 polygon. p. 8.

Nach (11) hat man

$$a_n \sin_{n-1,n} = a_1 \sin_{1,n-1} + a_2 \sin_{2,n-1} + \ldots + a_{n-2} \sin_{n-2,n-1}$$

folglich ist nach der obigen Bezeichnung

$$2f_n = 2f_{n-1} + s_{1,n-1} + s_{2,n-1} + \ldots + s_{n-2,n-1}$$

Wenn nun $2f_{n-1}$ die Summe der Werte.

$$\begin{array}{r} s_{12} + s_{13} + \ldots + s_{1,n-2} \\ + s_{23} + \ldots + s_{2,n-2} \\ + \ldots \quad . \\ + s_{n-3,n-2} \end{array}$$

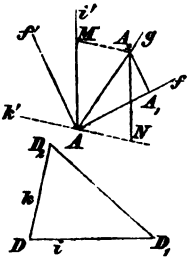
ist, welche die Formel s_{ik} enthält, wenn man für ik die Binionen der Numern 1, 2, .., $n-2$ setzt, so ist $2f_n$ die Summe der Werte, welche dieselbe Formel darbietet, wenn für ik die Binionen der Numern 1, 2, .., $n-1$ gesetzt werden (Allg. Arithm. §. 25, 5). Nun ist $2f_3 = s_{12}$, folglich $2f_4 = s_{12} + s_{13} + s_{23}$, u. s. f.

13. Wenn die Ebenen der planen Polygone $AA_1A_2 \ldots A_m$ und $BB_1B_2 \ldots B_n$ nach willkürlicher Festsetzung ihrer positiven Sinne den Winkel φ bilden und die Flächen derselben die Werte a und b haben; wenn ferner p, q Numern der Reihe 1, 2, .., m und r, s Numern der Reihe 1, 2, .., n sind, wenn endlich die Geraden AA_p, BB_r nach willkürlicher Festsetzung ihrer positiven Richtungen einen Winkel bilden, dessen Cosinus durch $\cos_{pr}$ bezeichnet wird, und demgemäß das Produkt $AA_p \,.\, BB_r \cos_{pr}$ den Wert c_{pr} hat: so ist das Produkt $4ab\cos\varphi$ die Summe der $(m-1)(n-1)$ Werte, welche aus der Formel

$$c_{pr}\, c_{qs} - c_{ps}\, c_{qr}$$

dadurch entspringen, daß man für p, q je zwei folgende Numern der Reihe 1, 2, .., m und zugleich für r, s je zwei folgende Numern der Reihe 1, 2, .., n setzt.*)

Beweis. Auf der Ebene AA_1A_2 liege das Dreieck DD_1D_2. Die Geraden, auf denen die Strecken AA_1, AA_2, DD_1, DD_2 liegen, werden durch f, g, i, k bezeichnet und durch A die Geraden i', k', f' gezogen, welche mit i, k, f Winkel von 90^0 bilden. Vollendet man das Parallelogramm AMA_2N, dessen Seiten auf den Geraden i' und k' liegen, so hat man (§. 4, 12)



$$2AA_1M = MA \,.\, AA_1 \sin i'f = AA_1 \,.\, AM \cos fi$$
$$2DD_1D_2 = D_2D \,.\, DD_1 \sin ki = DD_1 \,.\, DD_2 \cos i'k$$

*) Staudts Lehrsatz. Crelle J. 24 p. 252.

Weil MA_2 normal zu k ist, so haben AM und AA_2 auf k gleiche Normalprojektionen, d. h.

$$AM \cos i'k = AA_2 \cos gk$$

Folglich giebt die Multiplikation

$$4AA_1M \,.\, DD_1D_2 = AA_1 \,.\, DD_1 \cos fi \,.\, AA_2 \,.\, DD_2 \cos gk$$

Hieraus erhält man durch gegenseitige Vertauschung von D_1 mit D_2, i mit k, i' mit k', M mit N

$$4AA_1N \,.\, DD_2D_1 = AA_1 \,.\, DD_2 \cos fk \,.\, AA_2 \,.\, DD_1 \cos gi$$

Nun ist $DD_2D_1 = -DD_1D_2$, $AA_1M + AA_1N = AA_1A_2$ (Planim. §. 9, 8), folglich

$$\begin{aligned} 4AA_1A_2 \,.\, DD_1D_2 &= AB_1 \,.\, DD_1 \cos fi \,.\, AA_1 \,.\, DD_2 \cos gk \\ &- AA_1 \,.\, DD_2 \cos fk \,.\, AA_2 \,.\, DD_1 \cos gi \end{aligned}$$

Es sei $DD_1D_2 = BB_1B_2 \cos\varphi$ die Normalprojektion von BB_1B_2 auf die Ebene AA_1A_2 (3). Dann werden die Strecken BB_1 und DD_1 durch dieselben Ebenen auf die Gerade f projiciert, also ist nach den vorausgesetzten Bezeichnungen

$$BB_1 \cos_{11} = DD_1 \cos fi, \text{ u. s. w.}$$

$$4AA_1A_2 \,.\, BB_1B_2 \cos\varphi = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

und überhaupt

$$4AA_pA_q \,.\, BB_rB_s \cos\varphi = c_{pr}c_{qs} - c_{ps}c_{qr}$$

Nun ist (Planim. §. 9, 10)

$$\begin{aligned} AA_1A_2 \,..\, A_m &= AA_1A_2 + AA_2A_3 + \,..\, AA_{m-1}A_m \\ BB_1B_2 \,..\, B_n &= BB_1B_2 + BB_2B_3 + \,..\, BB_{n-1}B_n \end{aligned}$$

also $4ab \cos\varphi =$ u. s. w.

Anmerkung. Zieht man durch das Centrum einer Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, parallel mit den Geraden, auf denen die Strecken AA_1, AA_2, BB_1, BB_2 liegen, Gerade, deren positive Richtungen die Kugel in F_1, F_2, G_1, G_2 schneiden, und nimmt man die positiven Sinne der durch F_1 und F_2, G_1 und G_2 gehenden Hauptkreise mit den positiven Sinnen der mit diesen Hauptkreisen parallelen Ebenen übereinstimmend an, so ist $2AA_1A_2 = AA_1 \,.\, AA_2 \sin F_1F_2$, u. s. w., folglich

$$4AA_1A_2 \,.\, BB_1B_2 = AA_1 \,.\, AA_2 \,.\, BB_1 \,.\, BB_2 \sin F_1F_2 \sin G_1G_2$$

Nun ist (8)

$$\sin F_1F_2 \sin G_1G_2 \cos\varphi = \cos F_1G_1 \cos F_2G_2 - \cos F_1G_2 \cos F_2G_1$$

folglich hat man nach der angenommenen Bezeichnung

$$4AA_1A_2 \,.\, BB_1B_2 \cos\varphi = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

u. s. w. Umgekehrt kann der sphärische Lehrsatz (8) aus diesem polygonometrischen Lehrsatz abgeleitet werden.

Wenn $n = m$ ist und die Punkte $B, B_1, .., B_m$ mit den Punkten $A, A_1, .., A_m$ der Reihe nach zusammenfallen, so wird $\cos\varphi = 1$, $c_{pr} = c_{rp}$, $c_{pp} = AA_p{}^2$, und die Formel $c_{pr}c_{qs} - c_{ps}c_{qr}$ behält ihren Wert, wenn p mit r und zugleich q mit s vertauscht wird. Daher findet man

$$\begin{aligned} 4a^2 = {} & c_{11}c_{22} - c_{12}{}^2 + c_{22}c_{33} - c_{23}{}^2 + c_{33}c_{44} - c_{34}{}^2 + .. \\ & + 2(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) + 2(c_{13}c_{24} - c_{14}c_{23}) + .. \\ & + 2(c_{23}c_{34} + c_{24}c_{33}) + .. \\ & + .. \end{aligned}$$

Diese Formel ist von der für $2a$ in (12) aufgestellten Formel wesentlich verschieden, weil sie nur die Strecken enthält, welche von einer Spitze des Polygons ausgehen.

Die für $4ab\cos\varphi$ und insbesondere für $4a^2$ gefundene Formel ist besonders deshalb bemerkenswert, weil die darin vorkommenden Größen c_{pr} durch die Quadrate von solchen Strecken sich ausdrücken lassen, welche die Spitzen des einen Polygons mit den Spitzen des andern Polygons verbinden. Denn es ist (7)

$$2AA_p \,.\, BB_r \cos_{pr} = AB_r{}^2 - AB^2 - (A_pB_r{}^2 - A_pB^2)$$

Demnach ist $16ab\cos\varphi$ eine ganze Funktion der Quadrate von den Strecken, welche die Spitzen des einen Polygons mit den Spitzen des andern Polygons verbinden. Insbesondere ist $16a^2$ eine ganze Funktion der Strecken, welche die Spitzen eines Polygons unter einander verbinden. Die Flächen des Dreiecks und des einem Kreise eingeschriebenen Vierecks sind in dieser Beziehung Planim. §. 14, 23 und 29 betrachtet worden. Vergl. Determ. §. 16, 13.

14. Die positiven Richtungen der Geraden, auf denen die Kanten AB, AC, AD des Tetraeders $ABCD$ liegen, schneiden eine mit der Ecke A concentrische Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, in L, M, N. Die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks MNL werden durch $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ und die Summe $l + m + n$ durch $2s$ bezeichnet. Nennt man den Wert der gleichen Produkte (§. 5, 11)

$$\sin l \sin m \sin\nu = \sin m \sin n \sin\lambda = \sin n \sin l \sin\mu$$

den **Sinus der Ecke** A (vergl. 10), dergestalt, daß

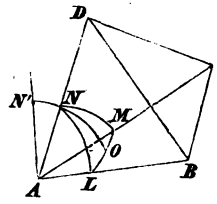
$$\begin{aligned} \sin^2(A) &= 1 - \cos^2 l - \cos^2 m - \cos^2 n + 2\cos l \cos m \cos n \\ &= 4\sin s \sin(s-l) \sin(s-m) \sin(s-n) \end{aligned}$$

dann ist auch dem Zeichen nach das Volum*)

*) Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158. Vergl. Möbius baryc. Calcul 19. Statik 63. Den treffenden Ausdruck „Sinus einer Ecke" hat zuerst Staudt (Crelle J. 24 p. 252) gebraucht.

$$ABCD = \tfrac{1}{6} AB.AC.AD \sin(A)$$

Beweis. Die Basis ABC des Tetraeders $ABCD$ hat (nach 13, Anm.) den Wert $\tfrac{1}{2} AB.AC \sin LM$. Die Höhe des Tetraeders ist die Normalprojektion der Kante AD auf eine Normale der Ebene ABC. Wenn nun die positive Richtung der durch A gehenden Normale der Ebene ABC die Kugel in N' schneidet, so hat die Höhe den Wert $AD \cos NN'$, also das Volum des Tetraeders den Wert



$$\tfrac{1}{6} AB.AC.AD \sin LM \cos NN'.$$

Diese Formel behält ihren Wert, wenn von einer der Geraden, welche die Kanten AB, AC, AD enthalten, als die positive Richtung die entgegengesetzte angenommen wird. Denn dabei wechseln zugleich AB und $\sin LM$, oder AC und $\sin LM$, oder AD und $\cos NN'$ das Zeichen. Wenn dagegen als die positive Richtung der Normale der Ebene ABC die entgegengesetzte angenommen wird, so wechselt $\cos NN'$ und damit die Formel das Zeichen.

Bei den Normalen einer Ebene wird diejenige Richtung als die positive angenommen, welche aufwärts geht für den Betrachter, der auf der Ebene stehend den positiven Sinn derselben festsetzt (2). Beschreibt man positive Winkel und Flächen durch linksum gehende Drehungen, so trifft die positive Richtung der Geraden, welche durch das Centrum A normal zur Ebene des Hauptkreises n geht, den linken Pol von n, der durch N' bezeichnet ist.

Wenn die Basis ABC des Tetraeders $ABCD$ einen positiven Wert hat, so giebt man dem Volum des Tetraeders das Zeichen der Höhe. Das Volum ist also positiv oder negativ, je nachdem die Spitze D mit dem Pol N' auf derselben Seite der Basis liegt oder nicht. Dabei erscheint sowohl die Bewegung von A nach B einem Betrachter, der von C nach D aufwärts gerichtet ist, als auch die Bewegung von C nach D einem Betrachter, der von A nach B aufwärts gerichtet ist, in dem ersten Falle linksum, in dem zweiten Falle rechtsum gehend. Vergl. Stereom. §. 6, 11.

Für den Hauptkreis NN', der mit dem Hauptkreis n den Punkt O gemein hat, werde der positive Sinn so bestimmt, daß jener Hauptkreis in O mit n einen Winkel von 90^0 bildet. Dann ist der Bogen $ON' = 90^0$, $\cos NN' = \sin ON$,

$$\sin LM \cos NN' = \sin n \sin ON = \sin n \sin l \sin \mu \quad (\S.\ 5,\ 11),\ \text{u. s. w.}$$

Das durch die Formel $ABCD$ bestimmte Volum und der gefundene Wert desselben $\tfrac{1}{6} AB.AC.AD \sin(A)$ wechseln zugleich das Zeichen,

wenn man irgend zwei unter den Eckpunkten B, C, D vertauſcht, weil dabei $\sin(A)$ das Zeichen wechſelt.

Anmerkung. Die Formeln $ABCD$, $BADC$, $CDAB$, $DCBA$ ſtimmen den Zeichen nach überein. Bildet man die analogen Werte

$$\begin{aligned} ABCD &= \tfrac{1}{6}AB.AC.AD\sin(A)\\ BADC &= \tfrac{1}{6}BA.BD.BC\sin(B)\\ CDAB &= \tfrac{1}{6}CD.CA.CB\sin(C)\\ DCBA &= \tfrac{1}{6}DC.DB.DA\sin(D) \end{aligned}$$

und bezeichnet man die Werte der Strecken BC, CA, AB, DA, DB, DC durch a, b, c, a_1, b_1, c_1, den Wert des Volums durch v, ſo hat man*)

$$6v = a_1bc\sin(A) = ab_1c\sin(B) = abc_1\sin(C) = a_1b_1c_1\sin(D)$$
$$\frac{abc}{6v} = \frac{a:a_1}{\sin(A)} = \frac{b:b_1}{\sin(B)} = \frac{c:c_1}{\sin(C)} = \frac{abc:a_1b_1c_1}{\sin(D)}$$

Wenn man in der Gleichung $144v^2 = 4a_1{}^2b^2c^2\sin^2(A)$ die Werte $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ durch die Kanten ausdrückt, wie §. 4, 11. Anm., ſo erhält man zur Berechnung des Volums aus den Kanten des Tetraeders für $144v^2$ dieſelbe Formel, welche a. a. O. verſchwindet.**)

15. Aus der für das Tetraeder $ABCD$ gefundenen Formel entſpringt eine andere, welche zwei Flächen, den Winkel derſelben und die gemeinſchaftliche Kante enthält, wie folgt. Bezeichnet man durch $D\overline{ACB}$ den Winkel, welchen die Ebene ACD um die Axe AC linksum für einen Betrachter, der von A nach C aufwärts gerichtet iſt, zurücklegen muß, bis ſie ſo mit der Ebene ABC zuſammenfällt, daß die Dreiecke ACD und ACB einerlei Zeichen haben (Stereom. §. 2, 5), ſo iſt $D\overline{ACB} = B\overline{CA}D$, u. ſ. w., folglich (14)

$$6ABCD = AB.AC.AD\sin BAC\sin CAD\sin D\overline{ACB}$$
$$2ABC = AB.AC\sin BAC,\quad 2ACD = AC.AD\sin CAD$$
$$3ABCD = 2ABC.ACD\frac{\sin D\overline{ACB}}{AC} = 2ABC.ACD\frac{\sin D\overline{CA}B}{CA}$$***)

Ebenſo hat man

$$3BADC = 2BAD.BDC\frac{\sin C\overline{DB}A}{DB}$$

*) Bretſchneider Geometrie 677.
**) Jungius' (1610) Biographie von Guhrauer p. 297. Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158.
***) Gerg. Ann. 3 p. 323.

daher

$$9ABCD^2 = 4ABC.ACD.CBD.BAD\,\frac{\sin D\overline{CA}B\,\sin C\overline{DB}A}{CA.DB}$$

Dieſem Ausdruck ſtehn zwei andere Ausdrücke zur Seite, in denen je ein Paar gegenüberliegende Kanten mit den daran liegenden Flächenwinkeln vorkommen. Bezeichnet man das Volum des Tetraeders durch v, die den Ecken A, B, C, D gegenüberliegenden Flächen CBD, ACD, BAD, ABC durch α, β, γ, δ, die gegenüberliegenden Kanten BC und DA, CA und DB, AB und DC durch a und a_1, b und b_1, c und c_1, und die Flächenwinkel

$$\begin{array}{lll} C\overline{AB}D, & A\overline{BC}D, & B\overline{CA}D \\ B\overline{DC}A, & C\overline{DA}B, & A\overline{DB}C \end{array}$$

wie die Kanten, an denen ſie liegen, ſo iſt

$$9v^2 = 4\alpha\beta\gamma\delta\,\frac{\sin b\,\sin b_1}{bb_1} = \text{u. ſ. w.}$$

$$\frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{9v} = \frac{aa_1}{\sin a\,\sin a_1} = \frac{bb_1}{\sin b\,\sin b_1} = \frac{cc_1}{\sin c\,\sin c_1}\ ^*)$$

Wenn man in dieſer Gleichung die Flächenwinkel der als poſitiv vorausgeſetzten Flächen durch die Winkel ihrer poſitiven Normalen erſetzt, ſo erhält man Ausdrücke für die Produkte der gegenüberliegenden Kanten, durch welche die erſte Gleichung (7) in die zweite Gleichung (8) übergeht.

16. Aus der für das Tetraeder gefundenen Formel (14) folgt

$$36v^2 = AB.AC\sin n.AC.AD\sin l.AD.AB\sin m\,\frac{\sin^2(A)}{\sin l\,\sin m\,\sin n}$$

Nun iſt $AB.AC\sin n = 2ABC$, u. ſ. w. Bezeichnet man durch $\sin(A')$ den Sinus der Ecke, welche der Ecke A des Tetraeders polar ſo zugeordnet iſt, daß die Kugelſchnitte der beiden Ecken ſphäriſche Polarfiguren ſind, ſo hat man (§. 5, 11)

$$\sin(A') = \frac{\sin^2(A)}{\sin l\,\sin m\,\sin n}$$

folglich nach der angenommenen Bezeichnung

$$36v^2 = 8\beta\gamma\delta\sin(A') = \text{u. ſ. w.}^{**})$$

$$\frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{9v^2} = \frac{\alpha}{\sin(A')} = \frac{\beta}{\sin(B')} = \frac{\gamma}{\sin(C')} = \frac{\delta}{\sin(D')}$$

---

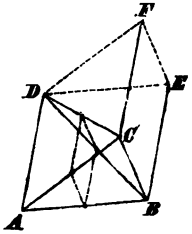
*) Bretſchneider a. a. O.
**) Bretſchneider a. a. O. Vergl. Lagrange sur les pyram. 17.

Durch diese Werte von α, β, γ, δ erhält man aus der allgemeinen Gleichung (3) die goniometrische Gleichung

$$\sin(A')\cos_{p1} + \sin(B')\cos_{p2} + \sin(C')\cos_{p3} + \sin(D')\cos_{p4} = 0$$

u. s. w. Vergl. 10.

17. Andere Ausdrücke des Tetraeders findet man durch Vergleichung desselben mit einem Prisma, das mit ihm eine Ecke und die anliegenden Kanten gemein hat. Macht man z. B. *BE* und *CF* gleich und gleichgerichtet mit *AD*, so ist *ABCD* der dritte Teil des Prisma, dessen Längenkanten *AD*, *BE*, *CF* sind. Die Seiten *EF*, *FC* des Parallelogramms *EFCB* sind gleich und gleichgerichtet mit den gegenüberliegenden Kanten *BC*, *DA* des Tetraeders, und mit den doppelten Seiten desjenigen seiner Mittelschnitte, welcher mit den Kanten *BC*, *DA* parallel ist. Bezeichnet man die Kanten wie bisher, ihre Winkel durch aa_1, bb_1, cc_1, ihre Normalabstände durch f_a, f_b, f_c, die parallelen Mittelschnitte durch ϑ_a, ϑ_b, ϑ_c, so hat man



$$4\vartheta_a = aa_1 \sin aa_1, \quad 4\vartheta_b = bb_1 \sin bb_1, \quad 4\vartheta_c = cc_1 \sin cc_1$$

$$6v = f_a aa_1 \sin aa_1 = f_b bb_1 \sin bb_1 = f_c cc_1 \sin cc_1 \text{*)}$$

$$3v = 2f_a\vartheta_a = 2f_b\vartheta_b = 2f_c\vartheta_c$$

Anmerkung. Die Flächen *FCBE*, *EBAD*, *DACF* des Prisma verhalten sich zu einander, wie die Seiten des Dreiecks, in welchem das Prisma durch eine zu den Längenkanten normale Ebene geschnitten wird. Ebenso verhalten sich zu einander die durch $2\vartheta_a$, γ, β bezeichneten Flächen. Daher ist (§. 4, 10) nach der angenommenen Bezeichnung der Flächen und Flächenwinkel

$$4\vartheta_a{}^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos a_1$$

und ebenso

$$4\vartheta_b{}^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\cos b_1$$

$$4\vartheta_c{}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos c_1$$

Nun ist (6)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\cos c_1 - 2\beta\gamma\cos a_1 - 2\gamma\alpha\cos b_1 = \delta^2$$

folglich hat man**)

$$4\vartheta_a{}^2 + 4\vartheta_b{}^2 + 4\vartheta_c{}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

---

*) Gerg. Ann. 18 p. 250. Steiner Crelle J. 23 p. 279. Vergl. Stereom. §. 8, 12.

**) Bretschneider a. a. O. Vergl. Schröter das Parallelhexagon 1881 Math. Ann. 18 p. 428.

Bezeichnet man die Höhen des Tetraeders durch h_α, h_β, h_γ, h_δ, so ist $3v = \alpha h_\alpha$, u. s. w. Durch die Substitution

$$2\vartheta_a = \frac{3v}{f_a}, \ldots, \quad \alpha = \frac{3v}{h_a}, \ldots$$

erhält man sofort*)

$$\frac{1}{f_a^2}+\frac{1}{f_b^2}+\frac{1}{f_c^2} = \frac{1}{h_\alpha^2}+\frac{1}{h_\beta^2}+\frac{1}{h_\gamma^2}+\frac{1}{h_\delta^2}$$

Aus den Gleichungen

$$3va_1 = 2\beta\gamma \sin a_1 \quad (15)$$
$$\beta^2+\gamma^2-4\vartheta_a^2 = 2\beta\gamma\cos a_1$$

folgt

$$(3va_1)^2 = 4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-4\vartheta_a^2)^2$$

d. h. nach Planim. §. 14, 23: das dreifache Produkt des Tetraeders mit einer Kante ist dem vierfachen Dreieck gleich, dessen Seiten die beiden Flächen sind, welche die Kante gemein haben, und der doppelte Mittelschnitt, welcher mit der Kante parallel ist.**)

18. Das sechsfache Produkt des Tetraeders mit dem Radius der umgeschriebenen Kugel ist dem Dreieck gleich, dessen Seiten die Produkte der gegenüberliegenden Kanten sind.***)

Beweis. Der Radius der Kugel $ABCD$ wird durch r bezeichnet. Die Geraden DA, DB, DC werden von einer Ebene, die mit der die Kugel in D berührenden Ebene parallel ist und von dieser Ebene den Abstand h_1 hat, in A_1, B_1, C_1 so geschnitten, daß

$$DA.DA_1 = DB.DB_1 = DC.DC_1 = 2rh_1 = p$$

$$A_1B_1 = p\frac{AB}{DA.DB}, \quad B_1C_1 = p\frac{BC}{DB.DC}, \quad C_1A_1 = p\frac{CA}{DC.DA}$$

(Planim. §. 14, 13). Setzt man $DA.DB.DC = q$, so ist

$$A_1B_1 = \frac{p}{q}DC.AB, \quad B_1C_1 = \frac{p}{q}DA.BC, \quad C_1A_1 = \frac{p}{q}DB.CA$$

folglich das Dreieck $A_1B_1C_1$ dem Dreieck ähnlich, dessen Seiten die Werte $DC.AB$, $DA.BC$, $DB.CA$ haben (Planim. §. 11, 2), und

---

*) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 45.
**) J. H. T. Müller Trigon. Anhang p. 291.
***) Der Radius der Kugel ist aus den Elementen des eingeschriebenen Tetraeders von Jungius (s. dessen Biographie von Guhrauer 1850 p. 297), Lagrange Pyram. 21, Legendre Géom. Note V, Carnot Mém. sur la relation 12 berechnet worden. In Carnot's Formel und in der davon nicht wesentlich verschiedenen Formel Crelles (math. Aufsätze I p. 117) ist der obige Satz enthalten, welchen Staudt Borchardt J. 57 p. 88 geometrisch in der hier mitgeteilten Art bewiesen hat.

deſſen nach Planim. §. 14, 23 zu berechnende Fläche den Wert ε hat. Nun iſt (14)

$$DABC : DA_1B_1C_1 = \frac{DA \,.\, DB \,.\, DC}{DA_1 \,.\, DB_1 \,.\, DC_1} = \frac{q^2}{p^3}$$

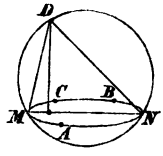
$$6DA_1B_1C_1 = 2A_1B_1C_1 \,.\, h_1 = 2\varepsilon \frac{p^2}{q^2} \frac{p}{2r} = \frac{\varepsilon}{r} \frac{p^3}{q^2}$$

folglich

$$6DABC = \varepsilon : r$$

Anmerkung. Bezeichnet man den Abſtand der Ebene ABC von dem Punkt D durch h, ſo hat man

$$6DABC = 2h \,.\, ABC = \varepsilon : r, \quad 2rh \,.\, ABC = \varepsilon$$



Zieht man den Hauptkreis durch D, welcher den Kreis ABC in M und N normal ſchneidet, ſo liegt die durch h bezeichnete Normale der Ebene ABC auf der Ebene DMN, und von den Strecken DM, DN iſt eine die kürzeſte, die andere die längſte unter den Strecken, welche von dem Punkt D bis an den Umfang des Kreiſes ABC reichen (Stereom. §. 2, 7). Weil aber das Dreieck DMN einem Hauptkreiſe eingeſchrieben iſt, ſo hat man nach Planim. §. 14, 24

$$DM \,.\, DN = 2rh$$

folglich $DM \,.\, DN \,.\, ABC = \varepsilon$, wie Planim. §. 14, 26.

19. Die Volume von zwei gegebenen Polyedern $AA_1A_2A_3 \ldots$ und $BB_1B_2B_3 \ldots$ werden durch α und β bezeichnet, eine der Strecken AA_1, AA_2, .. durch AA_p, eine der Strecken BB_1, BB_2, .. durch BB_r, und das Produkt $AA_p \,.\, BB_r \cos_{pr}$ durch c_{pr} (13). Das Produkt $36\alpha\beta$ kann durch Produkte von jedesmal 3 Größen wie c_{pr} ausgedrückt werden, und das Produkt $288\alpha\beta$ iſt eine ganze Funktion der Quadrate von den Strecken, welche die Spitzen des einen Polyeders mit den Spitzen des andern verbinden.*)

Beweis. Man konſtruiere durch A die Normalen t, u, v der Flächen BB_2B_3, BB_3B_1, BB_1B_2 der Tetraeders $BB_1B_2B_3$, und auf dieſen Normalen die Kanten AT, AU, AV des Parallelepipeds, deſſen Diagonale AA_3 iſt, ſo daß die Kugelſchnitte der Ecke A des Parallelepipeds und der Ecke B des Tetraeders ſphäriſche Polarfiguren ſind. Bezeichnet man die Normale der Fläche AA_1A_2 durch n, und die Geraden, deren Strecken AA_3, BB_3 ſind, durch a, b, ſo iſt (14)

*) Staudt Crelle J. 24 p. 255. Vergl. des Verf. Determ. §. 16, 13.

$$3AA_1A_2V = AA_1A_2 . AV \cos nv$$
$$3BB_1B_2B_3 = BB_1B_2 . BB_3 \cos bv$$

Die Diagonale AA_3 kann aus den Kanten AT, AU, AV durch parallele Verschiebung derselben zusammengesetzt werden. Weil aber AT und AU normal zu den Ebenen BB_2B_3 und BB_3B_1 sind, so sind sie normal zu der Geraden BB_3, mithin haben AA_3 und AV auf b gleiche Normalprojektionen, d. h.

$$AA_3 \cos ab = AV \cos bv$$

Folglich erhält man

$$9AA_1A_2V . BB_1B_2B_3 = AA_1A_2 . BB_1B_2 \cos nv . AA_3 . BB_3 \cos ab$$

Nach der festgesetzten Bezeichnung ist aber (13)

$$3AA_1A_2 . BB_1B_2 \cos nv = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

folglich

$$36AA_1A_2V . BB_1B_2B_3 = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})c_{33}$$

Hieraus erhält man durch Vertauschung von $B_1B_2B_3$ mit $B_2B_3B_1$, t, u, v mit u, v, t, und die entsprechende Vertauschung der auf die Punkte B sich beziehenden Numern der Größen c

$$36AA_1A_2T . BB_2B_3B_1 = (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22})c_{31}$$

und ebenso

$$36AA_1A_2U . BB_3B_1B_2 = (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})c_{32}$$

Nun ist $BB_1B_2B_3 = BB_2B_3B_1 = BB_3B_1B_2$, und

$$AA_1A_2T + AA_1A_2U + AA_1A_2V = AA_1A_2A_3$$

nach Stereom. §. 8, 14, folglich

$$36AA_1A_2A_3 . BB_1B_2B_3$$
$$= (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})c_{33} + (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22})c_{31} + (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})c_{32}$$

Indem man auf gleiche Weise jedes Tetraeder des ersten Polyeders mit jedem Tetraeder des zweiten Polyeders verbindet, erhält man den ersten Teil des ausgesprochenen Lehrsatzes. Der zweite Teil desselben ergiebt sich, wenn man die Größen $2c_{pr}$ durch Quadrate von Strecken ausdrückt wie 13, Anm.

Eine ähnliche Darstellung von $(36\alpha\beta)^2$ durch Produkte von Flächenpaaren mit dem Cosinus ihrer Winkel findet man in des Verf. Determinanten §. 16, 16.

Wenn die Punkte B, B_1, B_2, .. mit den Punkten A, A_1, A_2, .. der Reihe nach zusammenfallen, so wird $288\alpha^2$ eine ganze Funktion der Quadrate von den Strecken, welche die Spitzen des Polyeders verbinden. Für das Tetraeder ist $144\alpha^2$ durch die Quadrate der Kanten von Jungius und Euler ausgedrückt worden (14).

§. 7. Die projektivischen Formeln.

1. Wenn die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen, so heißt in dem folgenden die Formel $AC : BC$ das Verhältnis, nach welchem die Strecke AB in C geteilt ist (Planim. §. 8, 2). Dieses Verhältnis hat einen positiven oder einen negativen Wert, je nachdem die Strecken AC und BC einerlei Zeichen (Richtung) haben oder nicht (Planim. §. 14, 1), je nachdem also der Punkt C von der Strecke AB ausgeschlossen oder eingeschlossen ist. Durch das Verhältnis wird in Bezug auf zwei Punkte der dritte eindeutig bestimmt. Wenn das Verhältnis $AC : BC$ den Wert 1 hat, so ist C unendlich fern, weil

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB+BC}{BC} = \frac{AB}{BC}+1$$

den Wert 1 erreicht, während $AB : BC$ verschwindet. Wenn $AC : BC$ den Wert -1 hat, so ist C die Mitte von AB.

Wenn die Gerade AB durch die Gerade der Strecke PQ in C geschnitten wird, so ist das Verhältnis der Flächen

$$APQ : BPQ = AC : BC$$

Denn die Dreiecke APQ und BPQ haben die Basis PQ gemein, und das Verhältnis ihrer Höhen ist $= AC : BC$ (Planim. §. 10, 2).

Wenn die Gerade AB durch die Ebene des Dreiecks PQR in C geschnitten wird, so ist das Verhältnis der Volume

$$APQR : BPQR = AC : BC$$

Denn die Tetraeder $APQR$ und $BPQR$ haben die Basis PQR gemein, und das Verhältnis ihrer Höhen ist $= AC : BC$ (Stereom. §. 8, 11). Dabei haben die Dreiecke APQ und BPQ, wie die Tetraeder $APQR$ und $BPQR$ dieselben oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem die Strecke AB durch die Gerade PQ und die Ebene PQR außen oder innen geteilt wird.

Wenn ein beliebiger Punkt durch S, und die Geraden, welche denselben mit den Punkten A, B, C einer Geraden verbinden, durch a, b, c bezeichnet werden, so ist

$$AC : BC = SAC : SBC = (\sin ac : \sin bc)(SA : SB)$$

Denn nach beliebiger Wahl der positiven Richtungen von a, b, c hat man $2SAC = SA \cdot SC \sin ac$ (§. 4, 12) u. s. w.

Wenn überhaupt die Geraden a, b, c auf einer Ebene liegen oder mit einer Ebene parallel sind, so heißt die Formel $\sin ac : \sin bc$ das Verhältnis der Sinus, nach welchem der Winkel ab durch c oder eine

mit c parallele Gerade geteilt ist. Dieses Verhältnis hat den Wert -1 oder 1, wenn c den Winkel ab oder seinen Nebenwinkel halbiert. Durch das Verhältnis $\sin ac : \sin bc$ wird in Bezug auf die Geraden a, b die ihren gemeinschaftlichen Punkt enthaltende Gerade c eindeutig bestimmt, wie der Punkt C der Geraden AB durch das Verhältnis $AC : BC$. In der That ist (§. 4, 9)

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} = \frac{\sin(ab+bc)}{\sin bc} = \sin ab(\cot bc + \cot ab)$$

Wenn nun $\sin ac' : \sin bc' = \sin ac : \sin bc$ ist, so ist $\cot bc' = \cot bc$, folglich c' mit c parallel.

Das Verhältnis, nach welchem AB in C durch die Gerade PQ oder die Ebene PQR geteilt ist, wird im folgenden durch die Formeln

$$(A, B, C), \quad (A, B, PQ), \quad (A, B, PQR)$$

bezeichnet*), ebenso die Formel $\sin ac : \sin bc$ durch (a, b, c). Die Werte (A, B, C) und (B, A, C), (a, b, c) und (b, a, c) sind reciprok.

2. Wenn O einen beliebigen Punkt der Geraden AB bedeutet, so haben die Verhältnisse, nach denen OA in B und OB in A geteilt wird, die Summe 1.

$$(O, A, B) + (O, B, A) = 1$$

Wenn O einen beliebigen Punkt der Ebene ABC bedeutet, so haben die Verhältnisse, nach denen OA, OB, OC der Reihe nach durch die Geraden BC, CA, AB geteilt werden, die Summe 1.

$$(O, A, BC) + (O, B, CA) + (O, C, AB) = 1$$

Wenn O einen beliebigen Punkt des Raumes und $ABCD$ ein gegebenes Tetraeder bedeutet, so haben die Verhältnisse, nach denen OA, OB, OC, OD der Reihe nach durch die Ebenen BDC, CDA, ADB, ABC geteilt werden, die Summe 1.**)

$$(O, A, BDC) + (O, B, CDA) + (O, C, ADB) + (O, D, ABC) = 1$$

Beweis. Wenn O auf der Geraden AB liegt, so ist $AO + OB = AB$ (Planim. §. 14, 1), folglich

$$\frac{AO}{AB} + \frac{OB}{AB} = 1 = \frac{OB}{AB} + \frac{OA}{BA}$$

Wenn O auf der Ebene ABC liegt und die Geraden OA, OB, OC

*) Vergl. Möbius baryc. Calc. 180 ff.

**) Der zweite Satz ist von Euler 1780 gegeben worden (Mém. de Petersb. Tom. V. 1812 p. 96). Der dritte Satz kommt in Gerg. Ann. 9 p. 116 und 277 vor. Vergl. Möbius baryc. Calc. 160 und Chasles Aperçu hist. p. 302 d. Übers.

von den Geraden BC, CA, AB in A', B', C' geschnitten werden, so hat man (1)

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OBC}{ABC'} \quad \frac{OB'}{BB'} = \frac{OCA}{BCA'} \quad \frac{OC'}{CC'} = \frac{OAB}{CAB}$$

Nun ist $OBC + OCA + OAB = ABC = BCA = CAB$ (Planim. §. 9, 9), folglich

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

Wenn die Geraden OA, OB, OC, OD von den Ebenen BDC, CDA, ADB, ABC in A', B', C', D' geschnitten werden, so hat man (1)

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OBDC}{ABDC}, \text{ u. s. w.}$$

Nun ist $OBDC + OCDA + OADB + OABC = DABC = ABDC = ..$ (Stereom. §. 8, 15), folglich

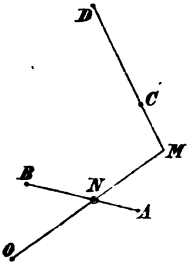
$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1$$

Es mag nicht unbemerkt bleiben, daß der dritte Satz aus den beiden ersten abgeleitet werden kann. Die Gerade CD hat mit der Ebene OAB den Punkt M gemein, so daß

$$(O, A, BM) + (O, B, MA) + (O, M, AB) = 1$$

Zugleich hat die Gerade OM mit der Geraden AB den Punkt N gemein, so daß

$$(O, C, DN) + (O, D, NC) + (O, N, CD) = 1$$



Nun ist $(O, M, AB) = (O, M, N)$, $(O, N, CD) = (O, N, M)$, und $(O, M, N) + (O, N, M) = 1$ folglich

$$(O, A, BDC) + (O, B, CDA) + (O, C, ADB) + (O, D, ABC) = 1$$

Anmerkung. Weil $(O, BC, A) = 1 - (O, A, BC)$, u. s. w., so ist in der angegebenen Weise

$$(O, BC, A) + (O, CA, B) + (O, AB, C) = 2$$
$$(O, BDC, A) + (O, CDA, B) + (O, ADB, C) + (O, ABC, D) = 3$$

3. Wenn auf einer Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, O einen beliebigen Punkt des Hauptkreises AB bedeutet, so ist $AO + OB = AB$, folglich (§. 4, 9)

$$\frac{\sin OB}{\sin AB} \cos OA + \frac{\sin OA}{\sin BA} \cos OB = 1$$

Wenn O einen beliebigen Punkt der Kugel bedeutet, und die Seiten BC, CA, AB eines sphärischen Dreiecks von den Hauptkreisen OA, OB, OC in A', B', C' geschnitten werden, wenn man ferner durch a, b, c, a', b', c' die Centralprojektionen von A, B, C, A', B', C' auf die Ebene bezeichnet, welche die Kugel in O berührt, so ist (2)

$$\frac{Oa'}{aa'}+\frac{Ob'}{bb'}+\frac{Oc'}{cc'}=1, \quad \frac{Oa}{a'a}+\frac{Ob}{b'b}+\frac{Oc}{c'c}=2$$

Nun ist $Oa=\operatorname{tang} OA$ (§. 3, 10), $aa'=aO+Oa'$, u. s. w., folglich

$$\frac{\operatorname{tang} OA'}{\operatorname{tang} AO+\operatorname{tang} OA'}+\frac{\operatorname{tang} OB'}{\operatorname{tang} BO+\operatorname{tang} OB'}+\frac{\operatorname{tang} OC'}{\operatorname{tang} CO+\operatorname{tang} OC'}=1$$

$$\frac{\operatorname{tang} OA}{\operatorname{tang} A'O+\operatorname{tang} OA}+\frac{\operatorname{tang} OB}{\operatorname{tang} B'O+\operatorname{tang} OB}+\frac{\operatorname{tang} OC}{\operatorname{tang} C'O+\operatorname{tang} OC}=2$$

Diese Gleichungen können nach §. 4, 9 umgeformt werden und lauten dann:

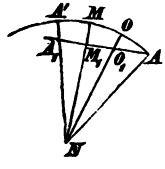
$$\frac{\sin OA'}{\sin AA'}\cos OA+\frac{\sin OB'}{\sin BB'}\cos OB+\frac{\sin OC'}{\sin CC'}\cos OC=1$$

$$\frac{\sin OA}{\sin A'A}\cos OA'+\frac{\sin OB}{\sin B'B}\cos OB'+\frac{\sin OC}{\sin C'C}\cos OC'=2$$

Als Differenz dieser Gleichungen ergiebt sich*)

$$\frac{\sin(AO+A'O)}{\sin AA'}+\frac{\sin(BO+B'O)}{\sin BB'}+\frac{\sin(CO+C'O)}{\sin CC'}=1$$

Anmerkung. Die Summe $\frac{\sin OA'}{\sin AA'}+\frac{\sin OB'}{\sin BB'}+\frac{\sin OC'}{\sin CC'}$ behält nur dann einen unveränderlichen Wert, wenn der Punkt O auf der Kugel einen Kreis beschreibt, der mit dem Kreise ABC concentrisch (parallel) ist.**) Man bezeichne durch M das sphärische Centrum des Kreises ABC, durch N das Centrum der Kugel, durch O_1, A_1, B_1, C_1 die Centralprojektionen von O, A', B', C' auf die Ebene ABC. Dann ist (2)



$$\frac{O_1A_1}{AA_1}+\frac{O_1B_1}{BB_1}+\frac{O_1C_1}{CC_1}=1$$

Nach (1) hat man $O_1A_1 : AA_1 = (\sin OA' : \sin AA')(NO_1 : NA)$, u. s. w., folglich

$$\frac{\sin OA'}{\sin AA'}+\frac{\sin OB'}{\sin BB'}+\frac{\sin OC'}{\sin CC'}=\frac{NA}{NO_1}$$

*) Euler a. a. O. Gudermann nied. Sphärik 394.
**) Steiner Crelle J. 2 p. 190. Gudermann nied. Sphärik 393.

Alſo hat die Summe $\frac{\sin OA'}{\sin AA'} + \ldots$ einen unveränderlichen Wert, wenn O_1 einen unveränderlichen Abſtand von N behält, d. h. wenn NO_1 einen Rotationskegel beſchreibt, deſſen Axe NM iſt, und wenn O einen Kreis beſchreibt, deſſen ſphäriſches Centrum M iſt. Dabei iſt

$$NM_1 = NA\cos AM = NO_1\cos OM$$

$$\frac{\sin OA'}{\sin AA'} + \frac{\sin OB'}{\sin BB'} + \frac{\sin OC'}{\sin CC'} = \frac{\cos OM}{\cos AM}$$

4. Eine gegebene Figur $ABCD\ldots$ werde aus einem beliebigen Centrum S ſowohl auf eine beliebige Ebene, als auch auf die Kugel projiciert, deren Centrum S und deren Radius eine Längeneinheit iſt. Die ſphäriſche Projektion der gegebenen Figur wird durch $A'B'C'D'\ldots$, die plane Projektion durch $A''B''C''D''\ldots$ bezeichnet. Wenn der Punkt M der gegebenen Figur auf der Geraden AB liegt, ſo liegt ſeine ſphäriſche Projektion M' auf dem Hauptkreis $A'B'$ und ſeine plane Projektion M'' auf der Geraden $A''B''$ bergeſtalt, daß (1)

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\sin A'M'}{\sin B'M'}\frac{SA}{SB}, \qquad \frac{A''M''}{B''M''} = \frac{\sin A'M'}{\sin B'M'}\frac{SA''}{SB''}$$

Aus den Verhältniſſen, nach denen Strecken der gegebenen Figur geteilt ſind, können nun Formeln gebildet werden, deren Wert von den Abſtänden SA, SB, .. unabhängig iſt. Solche Formeln heißen projektiviſch*), in Betracht daß ſie ihren Wert behalten, wenn man die Figur, auf welche ſie ſich beziehn, durch eine plane Centralprojektion der Figur, oder jede Strecke der Formel durch den Sinus ihrer ſphäriſchen Centralprojektion erſetzt. Z. B. Wenn die Punkte M und N auf der Geraden AB liegen, ſo iſt die Formel $\frac{AM}{BM}\frac{BN}{AN}$ projektiviſch, weil

$$\frac{AM}{BM}\frac{BN}{AN} = \frac{\sin A'M'}{\sin B'M'}\frac{\sin B'N'}{\sin A'N'} = \frac{A''M''}{B''M''}\frac{B''N''}{A''N''}$$

Wenn auf den Seiten AB, BC, CD, .., FA eines Polygons der Reihe nach die Punkte M, N, O, .., R liegen, ſo iſt

$$\frac{AM}{BM}\frac{BN}{CN}\cdots\frac{FR}{AR} = \frac{\sin A'M'}{\sin B'M'}\frac{\sin B'N'}{\sin C'N'}\cdots\frac{\sin F'R'}{\sin A'R'} = \frac{A''M''}{B''M''}\frac{B''N''}{C''N''}\cdots\frac{F''R''}{A''R''}$$

eine projektiviſche Formel.**) Der Wert einer projektiviſchen Formel

*) Poncelet propr. proj. 5 und Crelle J. 3 p. 213. Die Endung des Wortes rührt von Steiner her.

**) Ein Vielecksſchnittsverhältnis nach Möbius baryc. Calc. 215.

kann aus einer besondern Projektion der Figur abgeleitet werden, von welcher gewisse Punkte in unendliche Ferne fallen.

Wenn OP das harmonische Mittel (Algebra §. 1, 9) der n Strecken $OA, OB, OC, ..$ einer Geraden ist, so hat man

$$n = \frac{OP}{OA} + \frac{OP}{OB} + \frac{OP}{OC} + ..$$

oder nach Subtraktion der einzelnen Quotienten von $1 = \frac{OA}{OA} = ..$

$$\frac{PA}{OA} + \frac{PB}{OB} + \frac{PC}{OC} + .. = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{\sin P'A'}{\sin O'A'} + \frac{\sin P'B'}{\sin O'B'} + \frac{\sin P'C'}{\sin O'C'} + .. = 0$$

$$\frac{P''A''}{O''A''} + \frac{P''B''}{O''B''} + \frac{P''C''}{O''C''} + .. = 0$$

d. h. die gegebene Gleichung ist projektivisch, $O''P''$ ist das harmonische Mittel von $O''A''$, $O''B''$, $O''C''$, ...*)

5. Das Produkt der Verhältnisse (der Sinus-Verhältnisse), nach denen die Seiten AB, BC, CA eines geradlinigen (sphärischen) Dreiecks durch die Geraden (Hauptkreise) geteilt werden, welche einen beliebigen Punkt O der Ebene (Kugel) ABC mit den Punkten C, A, B verbinden, hat den Wert -1.**)

Beweis. Bei dem planen Viereck $ABCO$ ist (1)

$$(A, B, CO)(B, C, AO)(C, A, BO) = \frac{ACO}{BCO}\,\frac{BAO}{CAO}\,\frac{CBO}{ABO} = -1$$

weil $ACO = -CAO$, u. s. w.

Bezeichnet man die Teilpunkte von BC, CA, AB durch P, Q, R, und eine sphärische Centralprojektion der Punkte $A, B, ..$ (4) durch $A', B', ..$, so ist

$$\frac{BP}{CP}\,\frac{CQ}{AQ}\,\frac{AR}{BR} = \frac{\sin B'P'}{\sin C'P'}\,\frac{\sin C'Q'}{\sin A'Q'}\,\frac{\sin A'R'}{\sin B'R'}$$

*) Poncelet Crelle J. 3 p. 235. Möbius Crelle J. 4 p. 111. Allgemeiner Graßmann Crelle J. 24 p. 273.

**) Giov. Ceva de lineis se invicem secantibus, Mediol. 1678. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 299 d. Übers. Die Auffassung des Produkts von Teilungs-Verhältnissen und die Bestimmung der Zeichen rührt von Möbius her. Baryc. Calc. 198.

eine projektiviſche Formel. Um den Wert derſelben zu finden, projiciere man die Figur aus einem beliebigen Punkt S auf eine Ebene, die mit QRS parallel iſt. In der Projektion $A''B''..$ iſt $C''A''$ mit $B''O''$ und $A''B''$ mit $O''C''$ parallel, weil die Punkte Q'' und R'' unendlich fern ſind. Daher iſt das Viereck $C''A''B''O''$ ein Parallelogramm und

$$\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR} = \frac{B''P''}{C''P''} = -1$$

Umgekehrt ſchließt man: Wenn die plane Formel

$$\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR}$$

oder die ſphäriſche Formel

$$\frac{\sin BP}{\sin CP}\frac{\sin CQ}{\sin AQ}\frac{\sin AR}{\sin BR}$$

den Wert -1 hat, ſo bilden die Geraden (Hauptkreiſe) AP, BQ, CR einen Büſchel, d. h. ſie gehn durch einen Punkt. Wird AP von BQ in O, AB von CO in R' geſchnitten, ſo iſt

$$\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR'}{BR'} = -1$$

folglich $\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR}$ von -1 verſchieden, gegen die Vorausſetzung. U. ſ. w.

Anwendungen. Wenn die Seiten BC, CA, AB eines geradlinigen (ſphäriſchen) Dreiecks einen Kreis in P, Q, R berühren, ſo bilden die Geraden (Hauptkreiſe) AP, BQ, CR einen Büſchel.*) Denn unter den Strecken BC, CA, AB werden drei oder eine durch die Berührungspunkte P, Q, R innen geteilt. Nun iſt $AR = AQ$ u. ſ. w. Derſelbe Satz gilt für Centralprojektionen der Planfigur auf eine Ebene, ſowie für ſtereographiſche Projektionen der ſphäriſchen Figur (Stereom. §. 5, 20).

Wenn AP, BQ, CR den Perimeter des geradlinigen oder ſphäriſchen Dreiecks ABC halbieren, ſo ſind P, Q, R die Berührungspunkte des dem Dreieck eingeſchriebenen Kreiſes; folglich bilden AP, BQ, CR einen Büſchel.

In dem ſphäriſchen wie im geradlinigen Dreieck ABC bilden AP, BQ, CR einen Büſchel, wenn P, Q, R die Mitten der Seiten ſind**),

*) Ceva.
**) Schulz Sphärik II, 52.

oder wenn AP, BQ, CR die Fläche halbieren.*) Denn man hat in dem ersten Falle $\sin BP : \sin CP = -1$, u. s. w. In dem zweiten Falle ist zufolge der Gleichung $ARC = CRB$ (§. 5, 13)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AR}{\sin\frac{1}{2}RB} = \frac{\cos\frac{1}{2}CA}{\cos\frac{1}{2}BC}$$

u. s. w., folglich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AR}{\sin\frac{1}{2}RB}\,\frac{\sin\frac{1}{2}BP}{\sin\frac{1}{2}PC}\,\frac{\sin\frac{1}{2}CQ}{\sin\frac{1}{2}QA} = 1$$

Zugleich folgt aus der Gleichung der Flächen CAR und QAB (§. 5, 14)

$$\cot\tfrac{1}{2}CA\cot\tfrac{1}{2}AR = \cot\tfrac{1}{2}QA\cot\tfrac{1}{2}AB, \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{\cot\frac{1}{2}AR}{\cot\frac{1}{2}RB}\,\frac{\cot\frac{1}{2}BP}{\cot\frac{1}{2}PC}\,\frac{\cot\frac{1}{2}CQ}{\cot\frac{1}{2}QA} = 1$$

Indem man das Quadrat der ersten Gleichung mit der zweiten Gleichung multipliciert, findet man

$$\frac{\sin AR}{\sin RB}\,\frac{\sin BP}{\sin PC}\,\frac{\sin CQ}{\sin QA} = 1, \qquad \frac{\sin AR}{\sin BR}\,\frac{\sin BP}{\sin CP}\,\frac{\sin CQ}{\sin AQ} = -1$$

6. Das Produkt der Verhältnisse, nach denen die Seiten eines Polygons durch eine Gerade oder eine Ebene geteilt werden, ist 1. Denselben Wert hat das Produkt der Sinus-Verhältnisse, nach denen die Seiten eines sphärischen Polygons durch einen Hauptkreis geteilt werden.**)

Beweis. Wenn ABC ein geradliniges Dreieck und MN eine Gerade seiner Ebene ist, so hat man (1)

$$(A, B, MN)(B, C, MN)(C, A, MN) = \frac{AMN}{BMN}\,\frac{BMN}{CMN}\,\frac{CMN}{AMN} = 1$$

u. s. w. Wenn $ABCD$ ein unebenes Viereck und MNO eine beliebige Ebene ist, so findet man

$$(A, B, MNO)(B, C, MNO)(C, D, MNO)(D, A, MNO) = 1$$

indem man (A, B, MNO), .. durch Tetraederverhältnisse ausdrückt (1), u. s. w.

Bezeichnet man die Teilpunkte von AB, BC, .. durch P, Q, .., und eine sphärische Centralprojektion der Punkte A, B, .. durch A', B', .. (4), so ist

---

*) Steiner Crelle J. 2 p. 52. Gudermann Crelle J. 8 p. 368 und nieb. Sph. 192.

**) Menelaus Sphaerica III, 1. Dieser Satz bildete, wie man aus dem Almagest I, 9 erkennt, das Fundament der alten sphärischen Trigonometrie. Vergl. Schubert Nov. Act. Petrop. (1796) 12 p. 165. Der ganze Umfang des Satzes ist durch Carnot Transvers. 3 und Möbius baryc. Calc. 198 bestimmt worden.

$$\frac{AP}{BP}\frac{BQ}{CQ}\cdots = \frac{\sin A'P'}{\sin B'P'}\frac{\sin B'Q'}{\sin C'Q'}\cdots$$

eine projektiviſche Formel. Um den Wert derſelben zu finden, projiciere man die Figur aus einem beliebigen Punkt der Ebene MNO auf eine Ebene, die mit MNO parallel iſt. In der Projektion $A''B''\ldots$ ſind die Punkte P'', Q'', .. unendlich fern, alſo hat die projektiviſche Formel den Wert 1.

Umgekehrt ſchließt man: Wenn das Produkt der Verhältniſſe (der Sinus-Verhältniſſe), nach denen die Seiten eines ebenen oder unebenen (ſphäriſchen) $n$ecks geteilt ſind, den Wert 1 hat, und wenn $n-1$ Teilpunkte auf einer Geraden oder einer Ebene (einem Hauptkreiſe) liegen, ſo liegt auch der letzte Teilpunkt auf derſelben Geraden oder Ebene (Hauptkreis). Vergl. 5.

Anwendungen. Wenn auf BC, CA, AB die Punkte P, Q, R liegen, wenn man die Geraden, auf welchen BC, CA, AB, AP, BQ, CR liegen, durch f, g, h, p, q, r bezeichnet, und wenn man

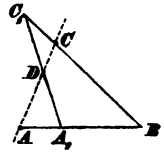
$$m = \frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR}, \qquad \mu = \frac{\sin gp}{\sin hp}\frac{\sin hq}{\sin fq}\frac{\sin fr}{\sin gr}$$

ſetzt, ſo iſt $m\mu = -1$, weil (1)

$$BP : CP = (\sin hp : \sin gp)(AB : AC), \text{ u. ſ. w.}$$

In dem Falle, daß die Geraden AP, BQ, CR durch einen Punkt gehn, hat man $m = -1$ (5), folglich $\mu = 1$. In dem Falle, daß die Punkte P, Q, R auf einer Geraden liegen, hat man $m = 1$, folglich $\mu = -1$.

Wenn in einem Dreieck ein Winkel und die Summe (Differenz) der anliegenden Seiten unverändert bleibt, ſo liegt die Mitte der dritten Seite auf einer beſtimmten Geraden.*) Die Seiten A_1B, BC_1, C_1A_1 werden von einer Geraden in A, C, D ſo geſchnitten, daß



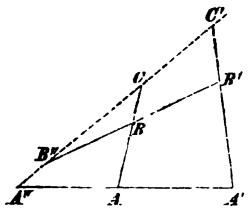
$$\frac{C_1D}{A_1D}\frac{A_1A}{BA}\frac{BC}{C_1C} = 1$$

Iſt nun das Verhältnis $A_1A : C_1C$ gegeben, ſo iſt auch das Verhältnis $C_1D : A_1D$ gegeben, und der Teilpunkt D der Seite C_1A_1 liegt auf der Geraden AC.

Wenn die Verhältniſſe gleich ſind, nach denen die Strecken AB und $A'B'$ in C und C' durch eine Gerade oder Ebene geteilt werden, ſo

*) Leibniz Acta Erud. 1685 p. 501. Demonstratio geom. etc. Steiner Crelle J. 24 p. 191. Vergl. Planim. §. 12, 4.

sind auch die Verhältnisse gleich, nach denen die Strecken AA' und BB' in A'' und B'' durch dieselbe Gerade oder Ebene geteilt werden.*) Denn man hat

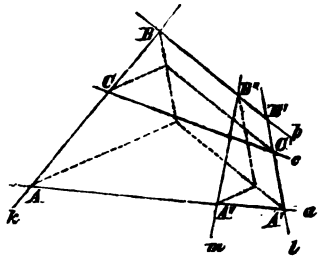


$$\frac{AA''}{A'A''}\,\frac{A'C'}{B'C'}\,\frac{B'B''}{BB''}\,\frac{BC}{AC} = 1$$

Wenn nun $\frac{A'C'}{B'C'}\,\frac{BC}{AC} = 1$ ist, so ist auch

$$\frac{AA''}{A'A''}\,\frac{B'B''}{BB''} = 1$$

Wenn die Geraden a, b, c und die Geraden k, l, m mit je einer Ebene parallel sind, dergestalt daß a, b, c mit k und l die Punkte A, B, C und A', B', C', a und b mit m die Punkte A'' und B'' gemein haben, so hat auch c mit m einen Punkt gemein.**) Denn man hat (Stereom. §. 1, 7)



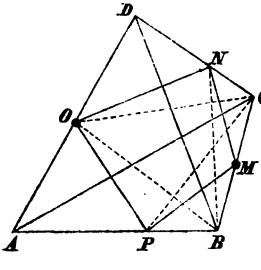
$$\frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} \text{ und } \frac{AC}{CB} = \frac{A'C''}{C''B'}$$

folglich

$$\frac{AA''}{A'A''}\,\frac{A'C'}{B'C''}\,\frac{B'B''}{BB''}\,\frac{BC}{AC} = 1$$

also liegt C auf der Ebene $A''C'B''$.

Wenn eine Ebene zwei gegenüberliegende Kanten eines Tetraeders halbiert, so halbiert sie auch das Volum desselben.***) Die Ebene, welche die Kanten BC und AD in M und O halbiert und die Kanten CD und AB in N und P schneidet, teilt das Tetraeder $ABCD$ in zwei Körper, von denen einer aus den Pyramiden besteht, deren gemeinschaftliche Spitze B ist und deren Basen $MNOP$ und OND sind, während der andere die Pyramiden umfaßt, deren gemeinschaftliche Spitze C ist und deren Basen $MPON$ und AOP sind. Die vierseitigen Pyramiden haben gleiche Volume, weil sie



*) Vergl. Planim. §. 12, 4.

**) Auf diesem Satze beruht die zweifache Beschreibung eines geradlinigen Paraboloids. Stereom. §. 1, 8. Vergl. Meier Hirsch geom. Aufgaben II, 182.

***) Bobillier nach Lafrémoire's Sammlung VI, 1, Gergonne's Ann. 1 p. 362.

dieselbe Basis und zufolge der Gleichung $BM = MC$ gleiche Höhen haben. Ferner hat man

$$BOD : AOP = (DO : OA)(AB : AP)$$
$$BODN : AOPC = (DO : OA)(AB : AP)(ND : CD)$$
$$\frac{AP}{PB}\,\frac{BM}{MC}\,\frac{CN}{ND}\,\frac{DO}{OA} = 1$$

Nun ist $\frac{DO}{OA} = 1$, $\frac{BM}{MC} = 1$, folglich $\frac{PB}{AP} = \frac{CN}{ND}$ und $\frac{AB}{AP} = \frac{CD}{ND}$, also $BODN : AOPC = 1$.

Die Geraden, welche 4 Punkte einer Ebene verbinden, bestimmen drei neue Punkte, die durch ebensoviel Gerade verbunden werden können. Die gemeinschaftlichen Punkte der konstruierten Geraden bestimmen mit den vorhandenen Punkten neue Gerade, diese wiederum neue Punkte, u. s. f. Aus den Verhältnissen, nach welchen zwei Strecken der Figur, die auf verschiedenen Geraden liegen, durch je eine Gerade der Figur geteilt sind, kann das Verhältnis berechnet werden, nach welchem eine andere Strecke der Figur durch eine Gerade derselben geteilt wird. Der entsprechende Satz der Sphärik ist fast gleichlautend.

Die Ebenen, welche durch 5 Punkte des Raumes bestimmt sind, bestimmen wiederum andere Punkte, durch welche neue Ebenen bestimmt sind. Die konstruierten Ebenen bestimmen neue Punkte, diese wiederum neue Ebenen, u. s. f. Aus den Verhältnissen, nach welchen drei Strecken der Figur, die auf verschiedenen Geraden und nicht sämtlich auf einer Ebene liegen, durch je eine Ebene der Figur geteilt sind, kann das Verhältnis berechnet werden, nach welchem eine andere Strecke der Figur durch eine Ebene derselben geteilt wird.*)

7. Das Produkt der Verhältnisse, nach denen die Seiten eines Polygons durch einen Kreis oder eine Kugel geschnitten werden, ist 1.**) Bezeichnet man die Potenz des Punktes A in Bezug auf den Kreis oder die Kugel durch (A), so hat man in der That

$$\frac{(A)}{(B)}\,\frac{(B)}{(C)}\,\frac{(C)}{(A)} = 1$$

auch dann, wenn einzelne Paare von Durchschnittspunkten imaginär sind.

Das angegebene Produkt, welches den unveränderlichen Wert 1 hat, ist projektivisch (4). Daher gilt nicht nur der entsprechende Satz der Sphärik, sondern es kann auch für den Kreis eine plane Central-

*) Vergl. Möbius baryc. Calc. 155 ff. 198 ff.
**) Carnot Transvers. 9 und 10. Vergl. Poncelet propr. proj. 34.

projektion desselben (eine Linie zweiten Grades) und für die Kugel ein Relief derselben (Stereom. §. 5, 11 — eine elliptische Fläche zweiten Grades) gesetzt werden.

8. Wenn die Strecke AB sowohl in C als auch in D geteilt ist, so heißt der Quotient der beiden Verhältnisse $(AC : BC) : (AD : BD)$ das **Doppelverhältnis der Punkte** A, B, C, D (in dieser Ordnung), und wird durch (A, B, C, D) bezeichnet, so daß*)

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}\,\frac{BD}{AD}$$

Wenn der Winkel der Geraden a und b durch die Geraden c und d geteilt ist, so heißt der Quotient der Sinus-Verhältnisse

$$(\sin ac : \sin bc) : (\sin ad : \sin bd)$$

das **Doppelverhältnis der Geraden** a, b, c, d, die einen planen Büschel bilden oder wenigstens mit einer Ebene parallel sind, und wird durch (a, b, c, d) bezeichnet.

Wenn der Flächenwinkel der Ebenen α und β durch die Ebenen γ und δ geteilt ist, so heißt der Quotient der Sinus-Verhältnisse

$$(\sin \alpha\gamma : \sin \beta\gamma) : (\sin \alpha\delta : \sin \beta\delta)$$

das **Doppelverhältnis der Ebenen** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die einen Büschel bilden oder doch mit einer Geraden parallel sind, und wird durch $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ bezeichnet.

In der Sphärik versteht man unter dem Doppelverhältnis der Punkte eines Hauptkreises A, B, C, D die Formel

$$(A, B, C, D) = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD}$$

und unter dem Doppelverhältnis der Hauptkreise eines Büschels a, b, c, d die Formel

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$$

*) Die Doppelverhältnisse sind zuerst von Möbius 1827 unter dem Namen Doppelschnittsverhältnisse untersucht und auf die angegebene Weise bezeichnet worden. Baryc. Calc. 182 ff. Weitere geometrische Anwendungen derselben verdankt man Steiner 1832 Systematische Entwickelung u. s. w. Chasles Ap. hist. 1837 p. 32 d. Übers. und note 9, Géometrie supérieure 1852, Sections coniques 1865. Die von Chasles gewählte Benennung rapport anharmonique nimmt Bezug darauf, daß 4 Elemente, deren Doppelverhältnis -1 ist, harmonisch heißen. Unabhängig von Größenbegriffen ist das Doppelverhältnis von 4 Raumelementen von Staudt (Geometrie der Lage 1847 p. 43) definiert worden.

Das Doppelverhältnis von Punkten einer Geraden (A, B, C, D) hat einen poſitiven Wert, wenn die Punkte C und D von der Strecke AB beide eingeſchloſſen oder beide ausgeſchloſſen ſind, einen negativen Wert dagegen, wenn der eine eingeſchloſſen, der andere ausgeſchloſſen iſt. Es hat den Wert 1, wenn D mit C in endlicher oder unendlicher Ferne zuſammenfällt (1). Es hat den Wert -1, wenn C und D die Strecke AB der eine innen, der andere außen nach demſelben Verhältnis teilen. In dem letzten Falle heißen die Punkte C und D den Punkten A und B harmoniſch zugeordnet. Planim. §. 8, 6.

Das Doppelverhältnis von Geraden eines planen Büſchels (a, b, c, d) hat einen poſitiven Wert, wenn die Geraden c und d den Winkel ab (und den Scheitelwinkel) beide innen oder beide außen teilen, einen negativen Wert, wenn die eine den Winkel innen, die andere außen teilt. Es hat den Wert 1, wenn d mit c zuſammenfällt. Es hat den Wert -1, wenn c und d den Winkel ab die eine innen, die andere außen nach demſelben Sinus-Verhältnis teilen. In dem letzten Falle heißt der Büſchel harmoniſch. Planim. §. 8, 7. Ebenſo wird das Doppelverhältnis von Ebenen eines Büſchels, von Punkten eines Hauptkreiſes, von Hauptkreiſen eines Büſchels beurteilt.

Wenn das erſte Element mit dem dritten und das zweite mit dem vierten vertauſcht wird, ſo bleibt der Wert des Doppelverhältniſſes unverändert.

$$(C, D, A, B) = (A, B, C, D)$$

$$\frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

Wenn das erſte Element mit dem zweiten, oder das dritte mit dem vierten vertauſcht wird, ſo erhält das Doppelverhältnis den reciproken Wert

$$(A, B, D, C)(A, B, C, D) = 1$$

weil $\left(\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}\right)\left(\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}\right) = 1$. Ebenſo findet man überhaupt*)

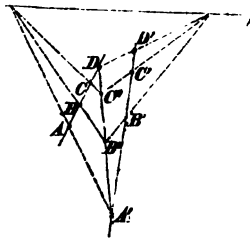
$$(A, B, C, D)(A, B, D, E) = (A, B, C, E)$$

9. Das Doppelverhältnis von Punkten einer Geraden iſt projektiviſch (4). Wenn man die Punkte A, B, C, D einer Geraden aus einem beliebigen Punkt S durch die Geraden $a, b, c\ d$ auf eine beliebige Gerade der Ebene SAB projiciert, und die Projektionen durch A', B', C', D' bezeichnet, ſo hat man (1)

*) Möbius baryc. Calc. 184.

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = (A', B', C', D')^*)$$

Das Doppelverhältnis von Punkten einer Geraden behält auch dann noch seinen Wert, wenn man die Punkte durch einen Büschel von Ebenen auf einer Gerade projiciert.**)



Die Ebenen α, β, γ, δ, welche die Gerade s gemein haben, gehn durch die Punkte A, B, C, D einer Geraden, und schneiden eine beliebige zweite Gerade in A', B', C', D'. Die Gerade $A'D$ wird von den Ebenen β, γ in B'', C'' geschnitten, so daß die Geraden AA', BB'', CC'' und $B''B'$, $C''C'$, DD' je einen planen Büschel bilden. Daher ist nach dem obigen Satze

$$(A, B, C, D) = (A', B'', C'', D) = (A', B', C', D')$$

Wenn der plane Büschel von Geraden a'', b'', c'', d'' ein Normalschnitt des Büschels der Ebenen α, β, γ, δ ist, so hat man identisch

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a'', b'', c'', d'')$$

Werden die Geraden a'', b'', c'', d'' von einer beliebigen Geraden ihrer Ebene in A'', B'', C'', D'' geschnitten, so ist nach dem obigen

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a'', b'', c'', d'') = (A'', B'', C'', D'') = (A, B, C, D)$$

Projiciert man also die Punkte einer Geraden A, B, C, D durch die Geraden a, b, c, d und durch die Geraden a', b', c', d', durch die Ebenen α, β, γ, δ und durch die Ebenen α', β', γ', δ', die je einen Büschel bilden, so hat man

$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D) = (a', b', c', d')$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$
$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d') = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

Und wenn ein Büschel von Hauptkreisen a, b, c, d einer Kugel von einem Hauptkreis in den Punkten A, B, C, D, von einem andern Hauptkreis in den Punkten A', B', C', D' geschnitten wird, wenn ferner durch die Punkte eines Hauptkreises A, B, C, D sowohl die Hauptkreise a, b, c, d, als auch die Hauptkreise a', b', c', d' gehn, die je einen Büschel bilden, so ist***)

---

*) Dieser Fundamentalsatz steht bereits unter den Lemmen zu Euclids Porismen in Pappus' Sammlung VII, 129 ff. Vergl. Chasles a. a. O., Géom. supér. Préf. p. XXI, Les porismes d'Euclide 1860.

**) Dieser Zusatz ist für harmonische Elemente von Carnot Transvers. 19, allgemein von Möbius baryc. Calc. 196 bewiesen worden.

***) Steiner syst. Entw. 29. 34. Gudermann nied. Sph. 177 ff.

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = (A', B', C', D')$$
$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D) = (a', b', c', d')$$

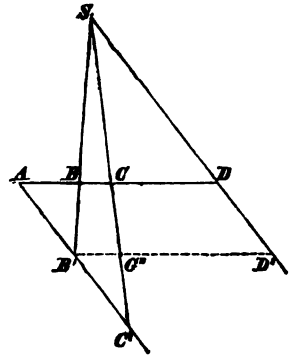
Anmerkung. Um den Wert des Doppelverhältnisses von Punkten einer Geraden (A, B, C, D) zu finden, projiciere man die Figur $ABCD$ aus einem beliebigen Punkt S auf die Gerade, welche durch A parallel mit DS geht. In der Projektion $AB'..$ liegt D' unendlich fern, folglich ist

$$(A, B, C, D) = (A, B', C') = AC' : B'C'$$

Zieht man noch parallel mit AD die Gerade durch B', welche CS in C'', DS in D'' schneidet, so findet man unmittelbar

$$BC : BD = B'C'' : B'D'', \quad AC : B'C'' = AC' : B'C', \quad AD = B'D''$$

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{B'C''} : \frac{AD}{B'D''} = AC' : B'C'$$



Das Doppelverhältnis von Geraden oder Ebenen eines Büschels, (a, b, c, d) oder $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, wird am einfachsten durch (A', B', C') ausgedrückt, wenn eine mit d oder δ parallele Gerade die Büschel in A', B', C' und in unendlicher Ferne schneidet.

10. Wenn das Doppelverhältnis von Punkten einer Geraden (A, B, C, D) oder von Geraden einer Ebene (a, b, c, d) den Wert n hat, so ist*)

$$\frac{n-1}{AB} = \frac{n}{AC} - \frac{1}{AD}$$

$$\frac{n-1}{\operatorname{tang} ab} = \frac{n}{\operatorname{tang} ac} - \frac{1}{\operatorname{tang} ad}$$

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = n \text{ oder } n.AD.BC - AC.BD = 0$$

$BC = AC - AB$, $BD = AD - AB$, so erhält man

$$n.AC.AD - n.AD.AB - AC.AD + AC.AB = 0$$

und durch Division die erste der aufgestellten Gleichungen.

Die andere Gleichung kann aus der ersten abgeleitet werden. Wenn die Geraden a, b, c, d eines planen Büschels von einer zu a normalen Geraden in A, B, C, D geschnitten werden, so ist

*) Vergl. Möbius dioptr. Bilder (Leipz. Berichte 1855 p. 8).

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = n \quad (9)$$

$$AB : AC : AD = \operatorname{tang} ab : \operatorname{tang} ac : \operatorname{tang} ad \quad (3)$$

folglich u. s. w. Man hat aber auch (9)

$$\frac{\sin bd}{\sin ad} - n\frac{\sin bc}{\sin ac} = 0 \text{ oder } \frac{\sin(ad-ab)}{\sin ad \sin ab} - n\frac{\sin(ac-ab)}{\sin ac \sin ab} = 0$$

folglich $(\cot ad - \cot ab) - n(\cot ac - \cot ab) = 0$, u. s. w.

Wenn insbesondere die gegebenen Elemente harmonisch sind, so ist $n = -1$, also

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

$$\frac{2}{\operatorname{tang} ab} = \frac{1}{\operatorname{tang} ac} + \frac{1}{\operatorname{tang} ad}$$

In diesem Falle hat die Mittte M von AB und die Gerade m, welche den Winkel ab halbiert, die besondern Eigenschaften, daß*)

$$MB^2 = MC.MD, \qquad \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{MC}{MD}$$

$$\operatorname{tang}^2 mb = \operatorname{tang} mc \operatorname{tang} md, \qquad \frac{\sin^2 ac}{\sin^2 ad} = \frac{\sin 2mc}{\sin 2md}$$

Denn man hat $AD.BC + AC.BD = 0$, d. i.

$$(AM+MD)(BM+MC)+(AM+MC)(BM+MD) = 0$$

Nun ist $AM = MB = -BM$, folglich u. s. w. Ferner

$$\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AC.CB}{AD.BD} = \frac{(AM+MC)(MB-MC)}{(AM+MD)(MD-MB)}$$

$$= \frac{MB^2-MC^2}{MD^2-MB^2} = \frac{MC}{MD}$$

Wenn die Geraden a, b, c, d, m den Punkt S gemein haben und von einer zu m normalen Geraden in A, B, C, D, M geschnitten werden, so ist $(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = -1$ und M die Mitte von AB. Nun ist

$$MB : MC : MD = \operatorname{tang} mb : \operatorname{tang} mc : \operatorname{tang} md$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin ac}{\sin ad}\frac{SC}{SD} \quad (1), \quad SC \cos mc = SD \cos md$$

$\operatorname{tang} mc \cos^2 mc = \frac{1}{2}\sin 2mc$, u. s. w.

Anwendungen. Eine den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC enthaltende Gerade schneidet die Seiten in A', B', C' und die durch die Spitze C gezogene Parallele der Basis AB in T so, daß die Geraden CS, CT, CA, CB und die Punkte S, T, A', B' harmonisch sind. Daher ist

*) Apollonius con. I, 37. Lahire sect. con. 1685 p. 1 ff. Poncelet propr. proj. 31. Gudermann nied. Sphärik 196.

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} = \frac{2}{ST} = \frac{1}{C'S}$$

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} = 0^*)$$

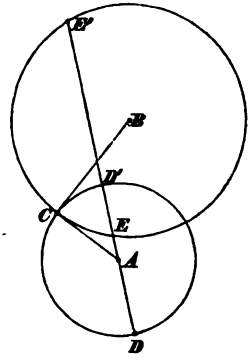
Eine den Schwerpunkt S des Tetraeders $ABCD$ enthaltende Gerade ſchneidet die Flächen in A', B', C', D' und die parallelen Ebenen, deren eine die Kante AB, die andre die Kante CD enthält, in U, V ſo, daß ſowohl die Ebenen CDS, CDV, CDA, CDB und die Punkte S, V, A', B', als auch die Ebenen ABS, ABU, ABC, ABD und die Punkte S, U, C', D' harmoniſch ſind, d. h.

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} = \frac{2}{SV}, \quad \frac{1}{SC'} + \frac{1}{SD'} = \frac{2}{SU}$$

Nun iſt S die Mitte von UV (Stereom. §. 6, 4), folglich

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} + \frac{1}{SD'} = 0$$

Wenn zwei Kreiſe (A) und (B) einander normal ſchneiden, ſo ſchneidet jeder von ihnen die Diameter des andern harmoniſch.**) Iſt C ein gemeinſchaftlicher Punkt der Kreiſe, ſo iſt AC eine Tangente des Kreiſes (B). Wird der Diameter DD' des Kreiſes (A) von dem Kreis (B) in E und E' geſchnitten, ſo iſt $AE.AE' = AC^2 = AD'^2$ und $(D, D', E, E') = -1$. Dasſelbe gilt von zwei ſich normal ſchneidenden Kugeln. Den entſprechenden Satz über zwei ſich normal ſchneidende Kreiſe einer Kugel hat Gubermann nied. Sphärik 307 gegeben.

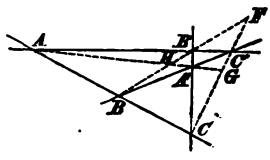


11. Die Diagonalen der durch 4 Gerade einer Ebene beſtimmten Vierecke teilen einander harmoniſch.***)

Beweis. Die Geraden AB, BA', $A'B'$, $B'A$ bilden 3 Vierecke mit den Diagonalen AA', BB', CC', ſo daß AA' von BB' und CC' harmoniſch geteilt wird, u. ſ. w. Das Doppelverhältnis der

*) Maclaurin Tract. de lin. geom. propr. (Anhang der Algebra) 1748 §. 98.
**) Poncelet propr. proj. 79.
***) Bei Pappus VII, 131 findet ſich eine Umkehrung dieſes alten Satzes, der von Desargues Brouillon projet 1639 (éd. Poudra, Paris 1864, I p. 186), neuerlich von Carnot géom. de pos. 225 reproduciert worden iſt. Vergl. Poncelet propr. proj. 155.

Punkte A, A', und der beiden Punkte, welche die Gerade AA' mit BB' und CC' gemein hat, wird nach (1) durch (A, A', BB', CC') bezeichnet. Um seinen Wert zu finden, projiciere man die Figur aus einem beliebigen Punkt S des Raumes auf eine Ebene, die mit der Ebene $CC'S$ parallel ist. Die Projektion des Vierecks $ABA'B'$ ist ein Parallelogramm (5), die Projektionen von AA' und BB' halbieren einander, die Projektion von CC' ist unendlich fern. Daher ist $(A, A', BB', CC') = -1$. Ebenso findet man $(B, B', CC', AA') = -1$ und $(C, C', AA', BB') = -1$.



Derselbe Satz gilt von den Diagonalen der durch 4 Hauptkreise einer Kugel bestimmten sphärischen Vierecke.

Anmerkung. Bezeichnet man die gemeinschaftlichen Punkte der Diagonalen durch F, G, H, die Mitten der Diagonalen durch A'', B'', C'', so hat man (10)

$$A''A^2 = A''G.A''H, \quad B''B^2 = B''H.B''F, \quad C''C^2 = C''F.C'G$$

Hieraus schließt man, daß die von A'' bis an den Kreis FGH reichende Tangente desselben so lang ist als $A''A$, u. s. w., daß also die Kreise, von denen A und A', B und B', C und C' Gegenpunkte sind, den Kreis FGH normal schneiden. Diese Kreise bilden einen Büschel (Planim. §. 14, 11), also liegt das Centrum ihres Orthogonalkreises FGH mit den gemeinschaftlichen Punkten P, P' des Büschels auf der Linie gleicher Potenzen in Bezug auf die Kreise des Büschels. Die gemeinschaftliche Sehne PP' des Büschels wird durch den Orthogonalkreis FGH harmonisch geteilt, weil sie durch sein Centrum geht (10, Anm.).

Ähnliche Bemerkungen gelten von der entsprechenden sphärischen Figur.*)

Wenn man die Seiten eines Dreiecks FGH harmonisch nach gegebenen Verhältnissen teilt, deren Produkt 1 ist (vergl. 5 und 6),

$$FC : GC = FC' : C'G = p : q$$
$$GA : HA = GA' : A'H = q : r$$
$$HB : FB = HB' : B'F = r : p$$

so bilden die Kreise, von welchen A und A', B und B', C und C' Gegenpunkte sind, einen Büschel. Die gemeinschaftlichen Punkte P, P' dieser Kreise haben eine solche Lage zu den Punkten F, G, H, daß

$$FP : GP : HP = FP' : GP' : HP' = p : q : r$$

*) Gudermann analyt. Sph. p. 138. Vergl. Plücker 1831 Entw. 2 p. 198. Chasles géom. supér. 345. Möbius Leipz. Berichte 1854 p. 87.

(Planim. §. 8, 6). Die gemeinschaftliche Sehne PP' wird von dem Kreis FGH normal und harmonisch geteilt.

12. Wenn das zweite Element eines Doppelverhältnisses mit dem dritten vertauscht wird, so erhält das Doppelverhältnis den Wert, der das gegebene Doppelverhältnis zu 1 ergänzt.*)

$$\text{I.}\quad (A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$$

Macht man nach (9, Anm.)

$$(A, B, C, D) = (A, B', C')$$

so wird auch

$$(A, C, B, D) = (A, C', B')$$

Nun ist $(A, B', C') + (A, C', B') = 1$ (2), folglich u. s. w.

Für 4 Punkte A, B, C, D einer Ebene und die Gerade EF derselben hat man

$$\text{II.}\quad (A, B, CD, EF) + (A, C, DB, EF) + (A, D, BC, EF) = 1$$

und für 5 Punkte A, B, C, D, E des Raumes und die Ebene FGH

$$\text{III.}\quad (A, B, CED, FGH) + (A, C, DEB, FGH) + (A, D, BEC, FGH) + (A, E, BCD, FGH) = 1$$

wenn wiederum in einem Doppelverhältnis neben den Punkten A, B durch die Gerade CD oder die Ebene CDE ihr Durchschnitt mit der Geraden AB bezeichnet wird, u. s. w. Projiciert man nämlich aus einem beliebigen Punkt S die Ebene $ABCD$ auf die Ebene, welche durch A parallel mit der Ebene EFS geht, und bezeichnet man die Projektion durch $AB' \ldots$, so ist (9)

$$(A, B, CD, EF) = (A, B', C'D'), \text{ u. s. w.}$$

Hiernach fließt die Gleichung (II) aus der zweiten der oben (2) bewiesenen Gleichungen. Die Gleichung (III) wird aus (II) ebenso abgeleitet, wie die dritte der bewiesenen Gleichungen (2) aus der zweiten, oder auch direkt durch Betrachtung einer Figur, die mit der gegebenen Raumfigur perspektivisch und kollinear ist (Stereom. §. 5, 11) und in welcher den Punkten der Ebene FGH unendlich ferne Punkte entsprechen.

13. Aus der Gleichung (12, I) folgt ohne weiteres für 4 Punkte A, B, C, D einer Geraden

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0$$

Vergl. Planim. §. 14, 15.

*) Möbius baryc. Calc. 184.

Bei 5 Punkten $A, \ldots, E$ einer Ebene haben die Doppelverhältnisse von Punkten einer Geraden (A, CE, B, DE) und (A, C, BE, DE) denselben Wert, als das Doppelverhältnis von Geraden (AE, CE, BE, DE). Bei 6 Punkten $A, \ldots, F$ des Raumes haben (A, CEF, B, DEF) und (A, C, BEF, DEF) denselben Wert (9). Folglich ist in diesen Fällen auch

$$(A, B, CE, DE) + (A, C, BE, DE) = 1$$
$$(A, B, CEF, DEF) + (A, C, BEF, DEF) = 1$$

Indem man die Verhältnisse, nach denen AB und AC geschnitten werden, durch Verhältnisse von Dreiecksflächen oder Tetraedervolumen ausdrückt (1), erhält man*)
für 5 Punkte einer Ebene

$$ABE.CDE + BCE.ADE + CAE.BDE = 0$$

für 6 Punkte des Raumes

$$ABEF.CDEF + BCEF.ADEF + CAEF.BDEF = 0$$

Aus der Gleichung (12, II) folgt ebenso
für 6 Punkte einer Ebene

$$ABC.DEF + ACD.BEF + ADB.CEF = BCD.AEF$$

für 7 Punkte des Raumes

$$ABCG.DEFG + ACDG.BEFG + ADBG.CEFG = BCDG.AEFG$$

Aus der Gleichung (12, III) folgt für 8 Punkte des Raumes

$$BCDE.AFGH + ACED.BFGH + ADEB.CFGH + ABEC.DFGH + ABCD.EFGH = 0$$

Anmerkung. Die Gleichung (12, I) besteht auch dann, wenn an die Stelle der Punkte einer Geraden Gerade gesetzt werden, die mit einer Ebene parallel sind. Demnach ist

$$(a, b, c, d) + (a, c, b, d) = 1^{**})$$
$$\sin ab \sin cd + \sin bc \sin ad + \sin ca \sin bd = 0$$

Vergl. §. 4, 6. Wenn die Geraden a, b, c, d einen Punkt eines Kreises gemein haben, und den Kreis außerdem in A, B, C, D schneiden, so verhalten sich die Sehnen $AB, BC, \ldots$ wie die Sinus der sie einschließenden Peripheriewinkel, und man hat

$$AB.CD + BC.AD + CA.BD = 0$$

wie a. a. O. bewiesen worden ist.

---

*) Monge und Möbius. Vergl. des Verf. Determ. §. 3, 11.
**) Möbius Crelle J. 24 p. 90.

Wenn das Dreieck ABC aus dem beliebigen Punkt S durch die Geraden a, b, c projiciert wird, ſo hat man §. 6, 14

$$SABC = \tfrac{1}{8} SA \,.\, SB \,.\, SC \sin abc$$

Hiernach fließen aus den gefundenen Gleichungen für Dreiecke einer Ebene die goniometriſchen Relationen für 5 und 6 Gerade des Raumes*)

$$\sin abe \sin cde + \sin bce \sin ade + \sin cae \sin bde = 0$$
$$\sin abc \sin def + \sin acd \sin bef + \sin adb \sin cef = \sin bcd \sin aef$$

14. I. Wenn die Doppelverhältniſſe (A, B, C, D) und (A', B', C', D') von Punkten, die je auf einer Geraden liegen, gleiche Werte haben, und die Geraden AA', BB', CC' einen Punkt S gemein haben, ſo bilden AA', BB', CC', DD' einen planen Büſchel. Es ſind die Doppelverhältniſſe (9)

$$(AS, BS, CS, DS) = (A, B, C, D), \quad (A'S, B'S, C'S, D'S) = (A', B', C', D')$$

mithin $(AS, BS, CS, DS) = (A'S, B'S, C'S, D'S)$. Nun fällt AS mit $A'S$, BS mit $B'S$, CS mit $C'S$ zuſammen, alſo auch DS mit $D'S$ (1).

Wenn insbeſondere $(A, B, C, D) = (A', B', C', D)$ iſt, ſo bilden die Geraden AA', BB', CC' einen planen Büſchel.**) Bezeichnet man durch S den gemeinſchaftlichen Punkt der Geraden AA' und BB', ſo iſt

$$(AS, BS, CS, DS) = (A'S, B'S, C'S, DS)$$

Nun fällt AS mit $A'S$, BS mit $B'S$ zuſammen, alſo fällt auch CS mit $C'S$ zuſammen.

II. Wenn ferner die Doppelverhältniſſe (a, b, c, d) und (a', b', c', d') von Geraden planer Büſchel gleich ſind, und die Durchſchnittspunkte aa', bb', cc' auf einer Geraden r liegen, ſo ſchneiden ſich d und d' auf derſelben Geraden. Denn zufolge der Vorausſetzung ſind die Doppelverhältniſſe von Punkten (ar, br, cr, dr) und $(a'r, b'r, c'r, d'r)$ einander gleich. Nun fällt ar mit $a'r$, br mit $b'r$, cr mit $c'r$ zuſammen, alſo auch dr mit $d'r$.

Wenn insbeſondere $(a, b, c, d) = (a', b', c', d)$ iſt, ſo liegen die Punkte aa', bb', cc' auf einer Geraden. Denn die Gerade, welche die Punkte aa' und bb' enthält, wird von den Geraden der beiden Büſchel ſo geſchnitten, daß $(aa', bb', c, d) = (aa', bb', c', d)$, u. ſ. w.

---

*) Die Möglichkeit derartiger Relationen hat Poncelet angedeutet: propr. proj. 45 und Crelle J. 3 p. 265.

**) Pappus VII, 136 und 142. Steiner ſyſt. Entw. 14 und 31. Chasles géom. sup. 38.

III. Wenn die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ je einen Büschel bilden, und unter den Geraden $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ irgend zwei einen Punkt gemein haben, so haben alle denselben gemein. Denn der gemeinschaftliche Punkt der Geraden $\alpha\alpha', \beta\beta'$ liegt auf den Ebenen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, folglich auf der gemeinschaftlichen Geraden sowohl der Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, als auch der Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, mithin auf den Ebenen $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$ d. h. auf den Geraden $\gamma\gamma'$ und $\delta\delta'$.

Wenn die Doppelverhältnisse $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ von Ebenen, die je einen Büschel bilden, gleich sind, und die Geraden $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ auf einer Ebene ε liegen, so bilden die Geraden $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ einen planen Büschel. Denn diese Geraden haben einen Punkt gemein, und die Doppelverhältnisse von Geraden $(\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon, \gamma\varepsilon, \delta\varepsilon)$, $(\alpha'\varepsilon, \beta'\varepsilon, \gamma'\varepsilon, \delta'\varepsilon)$ sind gleich, also fällt $\delta\varepsilon$ mit $\delta'\varepsilon$ zusammen, d. h. $\delta\delta'$ liegt auf ε.

Wenn insbesondere $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta)$ ist, so bilden die Geraden $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ einen planen Büschel. Denn die Geraden $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$ liegen auf der Ebene δ und haben deshalb einen Punkt gemein, der auf den Ebenen $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$, also auch auf den Geraden $\beta\beta', \gamma\gamma'$ liegt. Bezeichnet man die Ebene der Geraden $\beta\beta', \gamma\gamma'$ durch ε, so sind die Doppelverhältnisse von Geraden $(\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon, \gamma\varepsilon, \delta\varepsilon)$, $(\alpha'\varepsilon, \beta'\varepsilon, \gamma'\varepsilon, \delta\varepsilon)$ gleich, also fällt $\alpha\varepsilon$ mit $\alpha'\varepsilon$ zusammen, d. h. $\alpha\alpha'$ liegt auf ε.

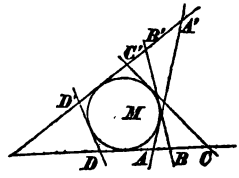
Anwendung. Wenn die planen (sphärischen) Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspektivisch liegen (Stereom. §. 5, 7), so liegen die gemeinschaftlichen Punkte der entsprechenden Geraden (Hauptkreise) AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ auf einer Geraden (Hauptkreis), und umgekehrt.*) Bezeichnet man durch F den Punkt, welchen AB und $A'B'$ gemein haben, so sind zufolge der perspektivischen Lage die Doppelverhältnisse von Punkten (A, B, CC', F) und (A', B', CC', F) einander gleich. Also sind auch die Doppelverhältnisse von Geraden (AC, BC, CC', FC) und $(A'C', B'C', CC', FC')$ einander gleich. Folglich liegen die gemeinschaftlichen Punkte der Geraden AC und $A'C'$, BC und $B'C'$ mit F auf einer Geraden. U. s. w.

15. Wenn zwei Tangenten eines Kreises oder einer planen Centralprojektion des Kreises (einer Linie zweiten Grades) von 4 Tangenten derselben Kurve die eine in A, B, C, D, die andere in A', B', C', D'

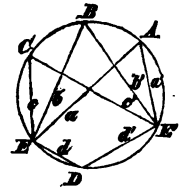
*) Gudermann nieb. Sphärik 211. Chasles géom. sup. 365.

geschnitten werden, so sind die Doppelverhältnisse der entsprechenden Punkte gleich.*)

Wenn zwei Punkte eines Kreises oder einer planen Centralprojektion des Kreises mit 4 Punkten derselben Kurve der eine durch die Geraden a, b, c, d, der andere durch die Geraden a', b', c', d' verbunden werden, so sind die Doppelverhältnisse der entsprechenden Geraden gleich.



Beweis. Bezeichnet man das Centrum des Kreises durch M, so sind die Winkel $2AMA'$, $2BMB'$, $2CMC'$, $2DMD'$ von derselben Größe (Planim. §. 6, 13). Wird die Figur $MABCD$ in ihrer Ebene um den Punkt M gedreht, bis A auf die Gerade MA' fällt, so fallen B, C, D auf die Geraden MB', MC', MD'. Daher ist $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$ in allen planen Schnitten eines die gegebene Figur projicierenden Kegels (9).



Andrerseits sind die Winkel $2aa'$, $2bb'$, $2cc'$, $2dd'$ von derselben Größe, wenn ihre Scheitel auf einem Kreise liegen (Planim. §. 4, 2). Dreht man die Figur $abcd$ in ihrer Ebene um den Punkt ab, bis die Gerade a mit a' parallel wird, so werden b, c, d mit b', c', d' parallel. Daher ist $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$ in allen planen Schnitten eines die gegebene Figur projicierenden Kegels.

Umgekehrt schließt man:

Wenn die Punkte A, B, C, D und A', B', C', D' auf je einer Geraden derselben Ebene so gegeben sind, daß $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$, so berühren die Geraden AA', BB', CC', DD' eine bestimmte von AB und $A'B'$ berührte Linie zweiten Grades.

Wenn auf einer Ebene die Geraden a, b, c, d und a', b', c', d' je einen Büschel bilden, so daß $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$, so liegen die Punkte aa', bb', cc', dd' auf einer bestimmten durch die Punkte ab und $a'b'$ gehenden Linie zweiten Grades.

Beweis. Werden zwei Tangenten einer Kurve der angegebenen Art von 3 Tangenten derselben Kurve in A, B, C und A', B', C', von einer andern Geraden in D und D' so geschnitten, daß (A, B, C, D)

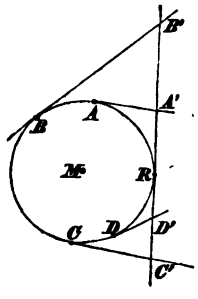
*) Die Sätze dieses Artikels, welche nebst den daraus abgeleiteten Sätzen auch für sphärische Projektionen des Kreises gelten, verdankt man Steiner syst. Entw. 37 ff.

$= (A', B', C', D')$ ist, so ist DD' eine Tangente derselben Kurve. Würde die Kurve nicht von DD', sondern von DE' berührt, so wäre $(A, B, C, D) = (A', B', C', E')$ verschieden von (A', B', C', D'). U. s. w.

Anmerkung. Der bewiesene Doppelsatz kann mit Vorteil auch ausgedrückt werden wie folgt:

Durch dieselben 4 Tangenten einer Linie zweiten Grades werden auf allen andern Tangenten derselben Linie gleiche Doppelverhältnisse von Punkten bestimmt, z. B. $(A, B, C, D) = (A', B', C', D') = \ldots$ Unter dem Doppelverhältnis von 4 Tangenten einer Linie zweiten Grades wird das Doppelverhältnis von Punkten verstanden, die durch die gegebenen Tangenten auf einer beliebigen andern Tangente bestimmt werden.

Durch dieselben 4 Punkte einer Linie zweiten Grades werden mit allen andern Punkten derselben Linie gleiche Doppelverhältnisse von Geraden bestimmt, z. B. $(AE, BE, CE, DE) = (AE', BE', CE', DE') = \ldots$ Unter dem Doppelverhältnis von 4 Punkten einer Linie zweiten Grades wird das Doppelverhältnis von Geraden verstanden, welche die gegebenen Punkte mit einem beliebigen Punkt der Kurve verbinden.



Vier Tangenten einer Linie zweiten Grades oder vier Punkte derselben sind demnach harmonisch, wenn ihr Doppelverhältnis den Wert -1 hat.

Das Doppelverhältnis von 4 Tangenten einer Linie zweiten Grades hat denselben Wert als das Doppelverhältnis ihrer Berührungspunkte.*) Wenn A, B, C, D, R Punkte eines Kreises sind, und die durch R gehende Tangente von den durch A, B, C, D gehenden Tangenten in A', B', C', D' geschnitten wird, so sind die Geraden RA, RB, RC, RD normal zu den Geraden, welche die Punkte A', B', C', D' mit dem Centrum M verbinden. Dreht man die Figur $RABCD$ in ihrer Ebene um den Punkt R, bis RA mit MA' parallel wird, so werden RB, RC, RD mit MB', MC', MD' parallel. Daher ist

$$(RA, RB, RC, RD) = (MA', MB', MC', MD') = (A', B', C', D')$$

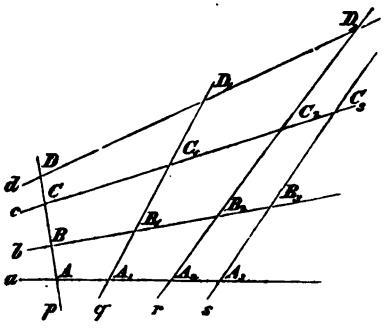
*) Steiner syst. Entw. 43. Chasles Ap. hist. note 15 und 16, géom. supér 663. Vergl. unten (23).

16. Wenn mit 3 Geraden p, q, r, von denen nicht zwei auf einer Ebene liegen, 4 Gerade a, b, c, d je einen Punkt gemein haben, so sind die Doppelverhältnisse von Punkten

$$(pa, pb, pc, pd), \quad (qa, qb, qc, qd), \quad (ra, rb, rc, rd)$$

von derselben Größe. Eine Gerade s, die mit 3 unter den Geraden a, b, c, d je einen Punkt gemein hat, hat auch mit der vierten einen Punkt gemein, und liegt demnach auf dem sowohl durch die Geraden p, q, r als auch durch die Geraden a, b, c bestimmten geradlinigen Hyperboloid. Stereom. §. 1, 8.*)

Beweis. Auf der Geraden q werden 4 Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 beliebig angenommen. Die Ebenen pA_1, pB_1, pC_1, pD_1 schneiden die Gerade r in A_2, B_2, C_2, D_2 so, daß die Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2, welche durch a, b, c, d bezeichnet werden, mit der Geraden p die Punkte A, B, C, D gemein haben. Nun ist (9)



$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = (pA_1, pB_1, pC_1, pD_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$$
$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = (rA_1, rB_1, rC_1, rD_1) = (A, B, C, D)$$

folglich

$$(A, B, C, D) = (A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$$

Durch einen beliebigen Punkt A_3 der Geraden a ziehe man die Gerade s, welche b und c in B_3 und C_3 schneidet, und die Gerade t, welche b und d in B_4 und D_4 schneidet. Dann ist nach dem bewiesenen Satze

$$(B, B_1, B_2, B_3) = (A, A_1, A_2, A_3)$$
$$(B, B_1, B_2, B_4) = (A, A_1, A_2, A_3)$$

folglich

$$(B, B_1, B_2, B_4) = (B, B_1, B_2, B_3)$$

Daher fällt B_4 und B_3, t mit s zusammen, und s schneidet die Gerade d.

Umgekehrt schließt man:

---

*) Steiner syst. Entw. 51, III. Chasles Ap. hist. note 9. Die zwei Serien von Geraden des hyperbolischen Hyperboloids sind in einem besondern Falle von Wren 1669, allgemein von Monge 1795 entdeckt worden. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 238 d. Übers.

Wenn zwei Gerade nicht auf einer Ebene liegen und auf der einen die Punkte A, B, C, D, auf der andern die Punkte A', B', C', D' so gegeben sind, daß $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$, so liegen die Geraden AA', BB', CC', DD' auf einem bestimmten geradlinigen Hyperboloid, welches die Geraden AB und $A'B'$ enthält. Und wenn die Doppelverhältnisse von Ebenen, die je einen Büschel bilden, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ einander gleich sind, so liegen die Geraden $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ auf einem bestimmten geradlinigen Hyperboloid, welches die Geraden $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ enthält. Denn eine Gerade r, welche die Geraden AA', BB', CC' schneidet, hat auch mit DD' einen Punkt gemein, weil die Doppelverhältnisse von Ebenen

$$(rA, rB, rC, rD) \text{ und } (rA', rB', rC', rD')$$

gleiche Werte haben, also die Ebenen rD und rD' zusammenfallen. Und die Gerade r, welche die Geraden $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ schneidet, hat auch mit $\delta\delta'$ einen Punkt gemein, weil die Doppelverhältnisse von Punkten

$$(r\alpha, r\beta, r\gamma, r\delta) \text{ und } (r\alpha', r\beta', r\gamma', r\delta')$$

gleiche Werte haben, also die Punkte $r\delta$ und $r\delta'$ zusammenfallen.

Anmerkung. Durch dieselben 4 Geraden a, b, c, d eines geradlinigen Hyperboloids, die zu einem System gehören, so daß nicht zwei auf einer Ebene liegen, werden auf allen Geraden des andern Systems $p, q, \ldots$ gleiche Doppelverhältnisse von Punkten bestimmt. Unter dem Doppelverhältnis von 4 Geraden eines Hyperboloids wird das Doppelverhältnis von Punkten verstanden, welche die gegebenen Geraden (der einen Serie) auf einer beliebigen Geraden (der andern Serie) bestimmen.

In einem hyperboloidischen (oder paraboloidischen) Sechseck wie $ABB_2C_2C_1A_1$ gehen die Diagonalen AC_2, BC_1, B_2A_1 durch einen Punkt. Stereom. §. 5, 7 Anm.*)

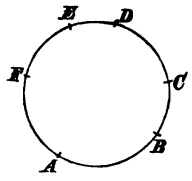
17. Wenn das Sechseck $ABCDEF$ einem Kreise (einer planen oder sphärischen Linie zweiten Grades) eingeschrieben ist, so liegen die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten AB und DE, BC und EF, CD und FA auf einer (Pascal'schen) Geraden.**)

---

*) Dandelin 1825 Gerg. Ann. 15. p. 393 und 16 p. 229. Hesse Crelle J. 24 p. 40.

**) Pascal 1640 Essai pour les coniques lemme 1 ohne Beweis (dieser kurze Aufsatz Oeuvres éd. Lahure II p. 354—7 gründet sich auf Desargues' Arbeiten). Das eingeschriebene Sechseck wird von Pascal hexagrammum mysticum genannt. A. a. O. p. 639.

Wenn das Sechseck *abcdef* einem Kreise (einer planen oder sphärischen Linie zweiten Grades) umgeschrieben ist, so gehn die Geraden, welche die gegenüberliegenden Eckpunkte *ab* und *de*, *bc* und *ef*, *cd* und *fa* verbinden, durch einen (Brianchon'schen) Punkt.*)



Beweis. Die Doppelverhältnisse von Geraden (*FC, FD, FE, FA*) und (*BC, BD, BE, BA*) haben denselben Wert, nämlich den Wert des Doppelverhältnisses von 4 bestimmten Punkten einer Linie zweiten Grades (15, Anm.). Die Büschel von Geraden bestimmen, der eine auf der Geraden *CD*, der andere auf der Geraden *DE*, die gleichen Doppelverhältnisse von Punkten (9)

(*C, D, FE, FA*) und (*BC, D, E, BA*)

Daher (14) gehn durch einen Punkt

die Gerade, welche *C* mit dem gemeinschaftlichen Punkt der Geraden *BC* und *DE* verbindet, d. i. *BC*,

die Gerade, welche den gemeinschaftlichen Punkt der Geraden *CD* und *FE* mit *E* verbindet, d. i. *EF*,

die Gerade, welche den gemeinschaftlichen Punkt der Geraden *CD* und *FA* mit dem gemeinschaftlichen Punkt der Geraden *AB* und *DE* verbindet. Also enthält die dritte Gerade den gemeinschaftlichen Punkt der beiden ersten.

Der Beweis des zugeordneten Satzes wird ebenso mit gegenseitiger Vertauschung von Geraden und Punkten geführt.

Umgekehrt schließt man: Wenn ein Sechseck eine Pascal'sche Gerade oder einen Brianchon'schen Punkt hat, so ist es einer bestimmten Linie zweiten Grades ein- oder umgeschrieben.

Anmerkung. Durch 6 Punkte oder Tangenten einer Linie zweiten Grades werden mehrere Pascal'sche Gerade oder Brianchon'sche Punkte bestimmt, die wiederum besondere Eigenschaften haben.**)

18. Die in (17) bewiesenen Sätze gelten auch dann noch, wenn an die Stelle der Linie zweiten Grades zwei Gerade oder Punkte treten.

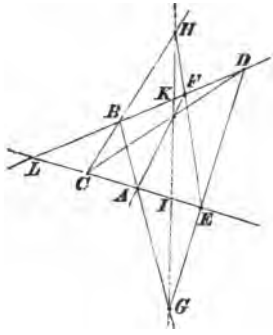
Wenn von einem Sechseck *ABCDEF* drei nichtfolgende Eckpunkte *A, C, E* auf einer Geraden, die übrigen auf einer andern Geraden liegen, so liegen die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten *AB* und *DE*, *BC* und *EF*, *CD* und *FA* auf einer Geraden.

---

*) Brianchon 1806 J. de l'Éc. polyt. Cah. 13 p. 301.

**) Dieselben sind von Steiner (syst. Entw. p. 311) und Kirkman angegeben worden. Vgl. Planim. §. 4, 6. Crelle J. 5 p. 268, 41 p. 269 und 66, 58 p. 174, 68 p. 193, 75 p. 1.

Wenn von einem Sechseck *abcdef* drei nichtfolgende Seiten *a*, *c*, *e* durch einen Punkt, die übrigen durch einen andern Punkt gehn, so gehn die Geraden, welche die gegenüberliegenden Eckpunkte *ab* und *de*, *bc* und *ef*, *cd* und *fa* verbinden, durch einen Punkt.*)



Beweis. Bezeichnet man die gemeinschaftlichen Punkte von *AB* und *DE* durch *G*, von *BC* und *EF* durch *H*, von *GH* und *ACE* durch *J*, von *GH* und *BDF* durch *K*, von *ACE* und *BDF* durch *L*, so ist (9)

$$(L, J, A, E) = (L, K, B, D)$$
$$(L, J, E, C) = (L, K, F, B)$$

folglich durch Multiplikation (8)

$$(L, J, A, C) = (L, K, F, D)$$

Daher (14) gehn die Geraden *JK*, *AF*, *CD* durch einen Punkt, d. h. der gemeinschaftliche Punkt von *CD* und *FA* liegt auf der Geraden *JK* oder *GH*.

Der zugeordnete Satz wird unter gegenseitiger Vertauschung von Geraden und Punkten ebenso bewiesen.

19. Vier Punkte einer Ebene *A*, *B*, *C*, *D* bestimmen 3 Paare von Geraden, *AB* und *CD*, *BC* und *AD*, *CA* und *BD*, die Seiten und Diagonalen des Vierecks *ABCD*, welche auf einer beliebigen Geraden der Ebene eine Involution von Punkten bilden, d. h. mit ihr 3 Paare entsprechender Punkte dergestalt gemein haben, daß je 4 aus den 3 Paaren gewählte Punkte dasselbe Doppelverhältnis haben, als die entsprechenden Punkte.

Vier Gerade einer Ebene *a*, *b*, *c*, *d* bestimmen 3 Paare von Punkten, *ab* und *cd*, *bc* und *ad*, *ca* und *bd*, welche mit einem beliebigen Punkt der Ebene verbunden eine Involution von Geraden bilden, d. h. 3 Paare von entsprechenden Geraden dergestalt bestimmen, daß je 4 aus den 3 Paaren gewählte Gerade dasselbe Doppelverhältnis haben, als die entsprechenden Geraden.**)

*) Der erste Satz kommt bei Pappus VII, 138 und 139 vor, der andere ist von Poncelet propr. proj. 169 hinzugefügt worden. Vergl. Steiner syst. Entw. 23, III und p. 312.

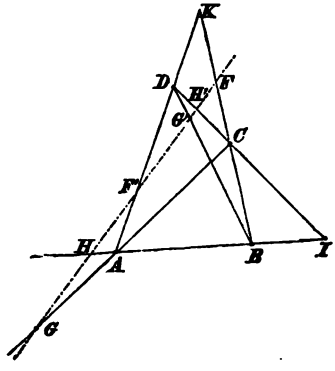
**) Von dem ersten Satz hatten die griechischen Geometer Kenntnis nach Pappus VII, 130. Unter den Neuern hat zuerst Desargues a. a. O. p. 171 die Involution von Punkten untersucht und den Namen Involution eingeführt. Vergl. Brianchon lignes du 2. ordre 8 und Poncelet propr. proj. 178, Chasles Ap. hist. note X, géom. sup. 220. 339 ff. Staudt Geometrie der Lage §. 16. Aus der Projektivität der Involutionen erkennt man die Giltigkeit der obigen Sätze in der Shpärik. Nach Analogie der (binären) Involution von Paaren sind ternäre, quaternäre u. s. w. Involutionen in Betracht gezogen worden: Möbius Leipziger Berichte 1855—6, Jonquieres 1859 Annali di matem. t. 2 p. 86, Cremona Curve piane 21. Vergl. meine analytische Geometrie §. 7.

Beweis. Die beliebig angenommene Gerade habe mit den Geraden BC, CA, AB die Punkte F, G, H, mit den Geraden AD, BD, CD die entsprechenden Punkte F', G', H' gemein. Dann ist (9)

$$(DA, DB, DC, DG) = (A, DB, C, G)$$
$$= (BA, BD, BC, BG)$$

folglich auf der Geraden, welche die Büschel schneidet,

$$(F', G', H', G) = (H, G', F, G)$$
$$= (F, G, H, G')$$



Man hat aber auch $(F', H', G', G) = (F, H, G, G')$ nach (12, I), d. h.

$$\frac{F'G'}{H'G'} : \frac{F'G}{H'G} = \frac{FG}{HG} : \frac{FG'}{HG'}$$

oder

$$\frac{F'G'}{HG'} : \frac{F'G}{HG} = \frac{FG}{H'G} : \frac{FG'}{H'G'}$$

mithin $(F', H, G', G) = (F, H', G, G')$. Diese Gleichung entspringt aus der vorigen durch gegenseitige Vertauschung von H und H', oder von F und F'. Also haben je 4 aus den 3 Paaren F und F', G und G', H und H' gewählte Punkte dasselbe Doppelverhältnis als die entsprechenden Punkte.

Der zugeordnete Satz wird ebenso bewiesen.

Anmerkung. Die Gleichung $(F, G, H, G') = (F', G', H', G)$, durch welche die Involution der 3 Paare F und F', G und G', H und H' von Punkten einer Geraden bestimmt wird, kann den Ausdruck

$$\frac{F'H'}{G'H'} \frac{G'F}{HF} \frac{HG}{F'G} = 1$$

oder nach gegenseitiger Vertauschung von F und F', G und G'

$$\frac{FH'}{GH'} \frac{GF'}{HF'} \frac{HG'}{FG'} = 1$$

erhalten und aus (6) abgeleitet werden.

Wenn ein Punkt der Involution z. B. G unendlich fern ist, so fällt der entsprechende Punkt G' mit einem bestimmten Punkt O zusammen, der zufolge der Gleichung $(F', H, G', G) = (F, H', G, G')$ so liegt, daß

$$(F', H, O)(F, H', O) = 1, \quad FO.F'O = HO.H'O$$

ist. Demnach hat O gleiche Potenzen in Bezug auf Kreise FF' und HH'.

Wenn ein Punkt der Involution mit dem entsprechenden zusammenfällt, z. B. H mit H' in J, dem gemeinschaftlichen Punkt von AB und CD, so ist zufolge der angeführten Gleichung

$$(F, J, G, G')(F', J, G, G') = 1$$

Wenn außerdem F' und F in K, dem gemeinschaftlichen Punkt von BC und AD, zusammenfallen, so wird $(K, J, G, G')^2 = 1$, und weil GG' nicht zugleich verschwinden kann,

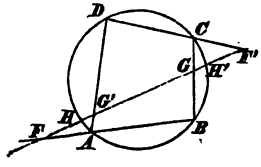
$$(K, J, G, G') = -1 \quad (11)$$

Drei Paare von Punkten oder Tangenten einer Linie zweiten Grades bilden eine Involution, wenn je 4 aus den 3 Paaren gewählte Punkte oder Tangenten in der oben (14, Anm.) festgesetzten Bedeutung dasselbe Doppelverhältnis haben, als die entsprechenden Punkte oder Tangenten. Die Geraden, welche die entsprechenden Punkte verbinden, gehn durch einen Punkt; die Punkte, welche die entsprechenden Tangenten gemein haben, liegen auf einer Geraden. Vergl. unten (21).

Drei Paare von Geraden eines Hyperboloids, unter denen nicht zwei auf einer Ebene liegen, bilden eine Involution, wenn je 4 aus den 3 Paaren gewählte Gerade dasselbe Doppelverhältnis haben (16, Anm.), als die entsprechenden Geraden.

20. Zwei Punkte einer Linie zweiten Grades und die beiden Paare nicht folgender Seiten eines eingeschriebenen Vierecks bestimmen eine Involution von Punkten.*)

Zwei Tangenten einer Linie zweiten Grades und die beiden Paare nicht folgender Eckpunkte eines umgeschriebenen Vierecks bestimmen eine Involution von Geraden.



Beweis. Sind H und H' Punkte eines dem Viereck $ABCD$ umgeschriebenen Kreises, werden AB und CD, BC und DA von der Geraden HH' in F und F', G und G' geschnitten, so ist das Doppelverhältnis der Punkte B, D, H, H' (15, Anm.)

$$(AB, AD, AH, AH') = (CB, CD, CH, CH')$$

folglich (9)

$$(F, G', H, H') = (G, F', H, H') = (F', G, H', H)$$

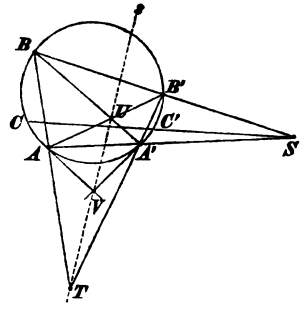
Ebenso wird der zugeordnete Satz bewiesen.

21. Wenn einer Linie zweiten Grades die Figuren $AB\ldots$ und $A'B'\ldots$ so eingeschrieben sind, daß die Geraden AA', BB', $\ldots$, welche

*) Desargues a. a. O. Vergl. Pascal Essai p. les coniques éd. Lahure II. p. 356. Poncelet a. a. O. Chasles Ap. hist. note X, 20, géom. sup. 656 und 667.

die entsprechenden Punkte A und A', .. verbinden, durch einen Punkt S gehen, so liegen die gemeinschaftlichen Punkte der entsprechenden Geraden AB und $A'B'$, .., AB' und $A'B$, .. und der Tangenten an entsprechenden Punkten auf einer Geraden s. Jedes Paar entsprechender Punkte ist dem Punkt S und der Geraden s harmonisch zugeordnet. Die Gerade s heißt die (harmonische, reciproke) **Polare des Punktes S in Bezug auf die Linie zweiten Grades.**

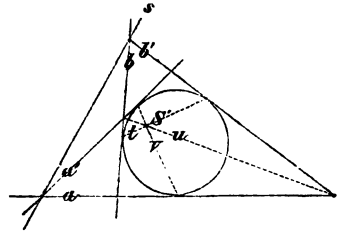
Wenn einer Linie zweiten Grades die Figuren ab .. und $a'b'$ .. so umgeschrieben sind, daß die Punkte aa', bb', .., welche die entsprechenden Geraden a und a', .. gemein haben, auf einer Geraden s liegen, so gehn die Geraden, welche die entsprechenden Punkte ab und $a'b'$, .., ab' und $a'b$, .. und die Berührungspunkte von entsprechenden Tangenten verbinden, durch einen Punkt S. Jedes Paar entsprechender Tangenten ist der Geraden s und dem Punkt S harmonisch zugeordnet. Der Punkt S heißt der (harmonische, reciproke) **Pol der Geraden s in Bezug auf die Linie zweiten Grades.***)



Beweis. Ist das Sechseck $ABC'A'B'C$ einer Linie zweiten Grades beliebig eingeschrieben, so liegen nach Pascal's Theorem (17) die gemeinschaftlichen Punkte der Geraden

AB und $A'B'$, BC' und $B'C$, $C'A'$ und CA

auch dann auf einer Geraden, wenn C' mit A', C mit A, folglich $C'A'$ mit der Tangente a', CA mit der Tangente a der Kurve zusammenfällt. Bezeichnet man also die gemeinschaftlichen Punkte von AA' und BB', AB und $A'B'$, AB' und $A'B$, a und a' durch S, T, U, V, so liegen T, U, V auf einer Geraden. Nun bilden die Geraden AB, $A'B'$, TS, TU einen harmonischen Büschel (11), daher ist auch (9)



---

*) Die harmonische Teilung von AA' durch S und s war den griechischen Geometern bekannt: Apollonius Conica I, 34. III, 37. Pappus VII, 161. Vergl. Planim. §. 14, 5 und Stereom. §. 5, 12. Der obige Satz wurde vollständiger ergründet durch Lahire (Sect. con.) und Maclaurin (de lin. geom. propr. II, Anhang der Algebra). Vergl. Poncelet propr. proj. 186. 194. Die weitere Bedeutung des Satzes ist besonders von Brianchon J. de l'Éc. polyt. Cah. 13 p. 297 erkannt worden. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 397 d. Übers., Steiner syst. Entw. 44, Chasles Géom. sup. 675 ff. und die Anm. zu Stereom. §. 1, 9.

$$(A, A', S, TU) = -1$$
$$(AV, A'V, SV, UV) = -1$$

Zieht man ferner durch S eine Gerade, welche die Kurve in C und C_1 schneidet, und bezeichnet den gemeinschaftlichen Punkt der Geraden AC und $A'C'$ durch W, so hat man

$$(AV, A'V, SV, WV) = -1$$

woraus folgt, das W auf der Geraden UV liegt, u. s. w.

Der zugeordnete Satz wird ebenso bewiesen.

Anmerkung. Wenn die Paare von entsprechenden Punkten A und A', B und B', C und C' einer Linie zweiten Grades so liegen, daß die Geraden AA', BB', CC' durch einen Punkt S gehn, so bilden sie eine Involution (19, Anm.). Und wenn die Paare von entsprechenden Tangenten a und a', b und b', c und c' einer Linie zweiten Grades so liegen, daß ihre gemeinschaftlichen Punkte aa', bb', cc' einer Geraden s angehören, so bilden sie eine Involution. Denn die gemeinschaftlichen Punkte von AB und $A'B'$, AC' und $A'C$, AC und $A'C'$ liegen auf einer Geraden, der Polare von S. Daher ist (9)

$$(AA', AB, AC', AC) = (A'A, A'B', A'C, A'C')$$

d. h. das Doppelverhältnis der Punkte A', B, C', C der Linie zweiten Grades ist dem Doppelverhältnis der entsprechenden Punkte A, B', C, C' gleich, u. s. w.

22. Wenn die Gerade s die Polare des Punktes S in Bezug auf eine Linie zweiten Grades ist, so ist der Punkt S der Pol der Geraden s. Wäre der Punkt T der Pol von s, so wäre für zwei Tangenten a, a', die mit s denselben Punkt gemein haben und die Kurve in A und A' berühren,

$$(A, A', s, T) = (a, a', s, T) = -1$$

folglich (A, A', s, S) von -1 verschieden, gegen die über S gemachte Voraussetzung.

Wenn s die Polare von S ist und mit der Kurve den Punkt E gemein hat, so ist die Gerade SE eine Tangente der Kurve. Hat die Gerade SE mit der Kurve den Punkt E' gemein, so ist

$$(E, E', s, S) = -1$$

Weil aber E auf s liegt, so liegt auch E' auf s, d. h. EE' verschwindet. Daher ist jede Sehne der Kurve die Polare des Punktes, welchen die Tangenten ihrer Endpunkte gemein haben. Insbesondere ist jede Tangente die Polare ihres Berührungspunktes.

Wenn die Geraden t, u, v, .. durch den Punkt S gehn, so liegen ihre Pole auf der Polare s des Punktes S. Wenn nämlich die Gerade t

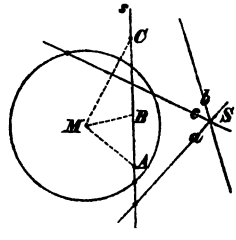
die Kurve in P und P' schneidet, so ist ihr Pol der gemeinschaftliche Punkt der durch P und P' gehenden Tangenten, welcher auf der Polare von S liegt (21). Wenn die Gerade u die Kurve berührt, so ist ihr Pol der Berührungspunkt, welcher auf der Polare von S liegt. Wenn die Gerade v die Kurve weder schneidet noch berührt, so gehn durch den Punkt sv zwei Tangenten der Kurve, die sowohl mit v und ihrem Pol V, als auch mit S und s einen harmonischen Büschel bestimmen; nun geht v durch S, also liegt V auf s.

Parallele Sehnen einer Linie zweiten Grades, welche den unendlich fernen Punkt S gemein haben, werden von der Polare s desselben halbiert; die Polaren von unendlich fernen Punkten sind Diameter der Kurve. Die Polare der Mitte eines Diameters geht durch den unendlich fernen Punkt des Diameters und durch den unendlich fernen Pol desselben, ist also unendlich fern; eine Gerade, die durch die Mitte eines Diameters geht, hat einen unendlich fernen Pol und ist ein Diameter der Kurve. Alle Diameter derselben haben also eine gemeinschaftliche Mitte, den Pol der unendlich fernen Geraden (Stereom. §. 1, 4), das Centrum der Linie zweiten Grades.

23. Wenn die Punkte A, B, C, D auf einer Geraden liegen, so bilden ihre Polaren in Bezug auf eine Linie zweiten Grades a, b, c, d einen Büschel dergestalt, daß*)

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$$

Beweis. Ist S der Pol der Geraden s in Bezug auf den Kreis (M), so gehn durch S die Polaren a, b, c, d der auf s liegenden Punkte A, B, C, D (22). Die Geraden MA, MB, .. sind normal zu $a, b, \ldots$ Dreht man die Figur MAB .. in ihrer Ebene um den Punkt M, bis MA mit a parallel ist, so werden MB, MC, MD mit b, c, d parallel, folglich ist



$$(MA, MB, MC, MD) = (a, b, c, d)$$
$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$$

wie oben (15, Anm.) in dem Falle gefunden wurde, daß A, B, C, D Punkte der Linie zweiten Grades bedeuten.

*) Möbius baryc. Calc. 290. Magnus Aufgaben I p. 65. Chasles Géom. sup. 691.